

MIT AçıkDersSistemi

<http://ocw.mit.edu>

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

Bu bilgilere atıfta bulunmak veya kullanım koşulları hakkında bilgi için

<http://ocw.mit.edu/terms> web sitesini ziyaret ediniz.

18.034 PROBLEM SETİ 2

Notasyon. $' = d/dx$

1. k bir sabit olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$$

olsun. k sabiti ne seçilirse seçilsin $y' = f(x)$ diferansiyel denkleminin orjini içeren bir aralıkta mevcut bir çözümünün olmadığını gösteriniz.

2. f fonksiyonun tüm reel ekseninde sürekli ve sınırlı olduğunu kabul edelim. Eğer f' sürekli ise $y' = yf(y)$, $y(0) = y_0 \neq 0$ başlangıç değer probleminin sıfırdan farklı çözümünün tüm x değerleri için mevcut olduğunu gösteriniz. (Tekliği kullanmaya ihtiyacınız olabilir.)

3. Birkhoff-Rota, s. 20, p.9.

4. (Ricatti denklemi) $y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$ biçimindeki diferansiyel denklemdir. Genel olarak Ricatti denklemi elemanter yollarla* çözülemez. Bununla birlikte,

(a) y_1 bir özel çözüm ise, genel çözüm, u belli bir tip Bernouilli denkleminin genel çözümü olmak üzere, Riccati denkleminin genel çözümü $y = y_1 + u$ şeklindedir. (bkz PROBLEM SETİ 1).

(b) Yukarıdaki metodu kullanarak $y' = 1 - x^2 + y^2$ Ricatti denklemini çözünüz.

5. $Ly = y'' + y$ olsun. $Ly = 3 \sin 2x + 3 + 4e^x$ diferansiyel denkleminin denge çözümünü, yani $y(0) = y'(0) = 0$ koşullarını sağlayan çözümü, bulacağız.

(a) $Ly = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

(b) Deneme çözümler kullanarak $Ly = 3 \sin 2x$, $Ly = 3$, ve $Ly = 4e^x$ denklemlerini çözünüz.

(c) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \sin 2x + 3 + 4e^x$ ifadesindeki sabitleri belirleyerek çözümü bulunuz

6. (Euler denklemi) p ve q sabit sayılar olmak üzere, $x^2y'' + pxy' + qy = 0$ biçimindeki denklem Euler denklemidir.

(a) $x = e^t$ değişken değişimi ile denklemin sabit katsayılı bir denkleme indirgenildiğini gösteriniz.

* 1841 yılında Liouville tarafından gösterildi.

(b) $x^2y'' + xy' + y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulmak için (a) daki yöntemi kullanınız.

(c) Hangi p değerleri için $x^2y'' + pxy' + 2y = 0$ denkleminin genel çözümü $(-\infty, \infty)$ reel ekseninin tamamında tanımlıdır.