Şimdiye kadar elektromanyetik dalgaları iletken olmayan ortamlarda inceledik. Eğer ortam iletken ise, bu sefer elektrik alandan dolayı ortamda bir akım olacaktır. Ohm yasasını kullanarak $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ yazabiliriz.

~~Elektrik alan için yine bir düzlem dalga seçersek~~

$$\vec{J} = \sigma\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

$(\phi, \vec{A})$ potansiyelleri için yine düzlem dalgalar seçersek

$$\vec{J} = \sigma\left(-i\vec{k}\phi + i\frac{\omega}{c}\vec{A}\right)$$

olacaktır. Potansiyeller için dalga denklemlerine döner ve bu ifadeleri yerleştirir isek vektör potansiyel için:

$$-k^2\vec{A} + \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2\vec{A} = -\vec{k}\left(\vec{k}\cdot\vec{A} - \frac{\omega\mu\varepsilon}{c}\phi\right) - i\frac{4\pi\mu}{c}\sigma\left(\frac{\omega}{c}\vec{A} - \vec{k}\right.$$

$$-k^2\vec{A} + \frac{\mu\omega}{c^2}\left(\omega\varepsilon + i4\pi\sigma\right)\vec{A} = -\vec{k}\left[\vec{k}\cdot\vec{A} - \frac{\mu}{c}\left(\omega\varepsilon + i4\pi\sigma\right)\phi\right]$$

skalar potansiyel için:

$$-k^2\phi + \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{c^2}\phi = -\frac{\omega}{c}\left[\vec{k}\cdot\vec{A} - \frac{\mu}{c}\omega\varepsilon\phi\right]$$

$$\Rightarrow -k^2\phi + \frac{\mu\omega}{c^2}\left(\omega\varepsilon + i4\pi\sigma\right)\phi = -\frac{\omega}{c}\left[\vec{k}\cdot\vec{A} - \frac{\mu}{c}\left(\omega\varepsilon + i4\pi\sigma\right)\phi\right]$$

Bu denklemin, daha önceki denklemlerden tek farkı ε yerine

$$\varepsilon \longrightarrow \eta = \varepsilon\left(1 + i\,\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$$

gelmesidir. Dolayısıyla, artık ortamın kırma endeksi $n = \sqrt{\varepsilon\mu} \rightarrow \sqrt{\eta\mu}$'de ~~artı~~ karmaşık sayıdır. ω, k arasındaki bağıntı artık

$$k^2 = \frac{\mu\eta}{c^2}\omega^2 = \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{c^2}\left(1 + i\,\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$$

olarak verilir. Buradan k vektörünün de artık karmaşık bir ~~sayı~~ vektör olduğu görülür.

$k = k_R + i k_K$ olarak yazarsak

$$k_R^2 - k_K^2 = \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{c^2} \quad ; \quad 2k_R k_K = \frac{4\pi\mu\omega^2\sigma}{c^2}$$

$\Rightarrow$ Bu denklemlerin çözümünden k_R ve k_K'yı buluruz. Yine bu denklemlerden, EM dalganın, iletkenin içinde giderken şiddetinin azalacağı da görülebilir ($k_K \neq 0$ olduğu için.)

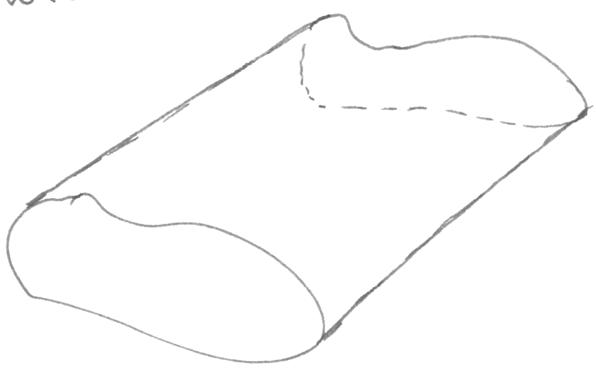
Elektrik ve Manyetik alanlar arasındaki

$$\vec{B} = +\frac{c}{\omega}\,\vec{k} \times \vec{E}$$ bağıntısına dönersek,

herhangi bir ortamda $|\vec{k}| \neq \frac{\omega}{c}$ olduğu için, $\vec{E}$ ve $\vec{B}$ alanlarının büyüklükleri farklıdır. $\sigma = 0$ olduğu durumda aynı fazda değişirler. ancak ortamın iletkenliği farklıysa aralarında bir faz farkı da oluşur.

Dalga Rehberleri ve Rezonans Boşlukları

Daha önceki kısımda, bütün uzaydaki EM dalgalarla ilgilendik. Şimdi ise sonlu bir hacimde dalgaların yayılması ile ilgileneceğiz. Dalga rehberleri, sabit bir kesit alanına sahip sonsuz silindirimsi boşluklardır.



Eğer uçları kapalıysa bunlara da rezonans boşlukları denir. Silindirin eksenini z-ekseni olarak seçelim.

Önceki kısımda, skalar ve vektörel potansiyelin dalga denklemini sağladığını göstermiştik:

$$\left(\nabla^2 - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{Bmatrix}\phi \\ \vec{A}\end{Bmatrix} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$$

Dalga rehberlerinin ideal metalden yapıldığını varsayacağız, yani $\sigma = \infty$ ve dolayısıyla metalin içinde $\vec{E} = \vec{B} = 0$ olacaktır. Rehberin içinde ise yine dalga denklemini sağlayacaktır.

Sistemin z-ekseni boyunca öteleme simetrisi olduğundan, potansiyeller için

$$\begin{pmatrix} \Phi(\vec{r},t) \\ \vec{A}(\vec{r},t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(x,y) \\ \vec{A}(x,y) \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)}$$

şeklinde çözümler arayabiliriz. En genel çözüm bu şekilde yazılabilen bütün çözümler üzerinden bir toplam içerecektir

Dalga denklemine yerleştirirsek, $\Phi(x,y)$ ve $\vec{A}(x,y)$ için

$$\left(\vec{\nabla}_\perp^2 - k^2 + \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2\right)\begin{Bmatrix} \Phi(x,y) \\ \vec{A}(x,y) \end{Bmatrix} = 0$$

elde ederiz. Ve ayar koşulu

$$\vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{A}_\perp(x,y) + ik\vec{A}_z(x,y) - i\frac{\mu\varepsilon\omega}{c}\Phi(x,y) = 0$$

Buralarda
$$\vec{A}_\perp(x,y) = A_x\hat{x} + A_y\hat{y}$$
$$\vec{A}(x,y) = \vec{A}_\perp(x,y) + A_z\hat{z}$$
$$\vec{\nabla}_\perp = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}$$
$$\vec{\nabla}_\perp^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

olarak tanımladık.

Vektor ve skalar potansiyel için

$$\Lambda(\vec{r},t) = \Lambda(x,y)e^{i(kz-\omega t)}$$

olacak şekilde bir ayar dönüşümü yapalım. Bu dönüşüm altında

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda = \vec{A} + \vec{\nabla}_\perp \Lambda + ik\Lambda$$

$$\phi \longrightarrow \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t} = \phi + \frac{i\omega}{c}\Lambda$$

olacaktır. Veya z-yönü ve z-ye dik yönleri ayıracak olursak,

$$\vec{A}_\perp \rightarrow \vec{A}_\perp + \vec{\nabla}_\perp \Lambda$$

$$A_z \rightarrow A_z + ik\Lambda$$

$$\phi \rightarrow \phi + \frac{i\omega}{c}\Lambda$$

Bu dönüşüm altında $\vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{A}_\perp + ikA_z - i\frac{\mu\varepsilon\omega}{c}\phi = 0$ ayar koşulunun ne kadar değiştiğine bakalım:

$$\Delta\left(\vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{A}_\perp + ikA_z - i\frac{\mu\varepsilon\omega}{c}\phi\right) = \nabla_\perp^2 \Lambda - k^2\Lambda + \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2\Lambda$$

olacaktır. ~~değ~~ Eğer bu sıfır ise, yeni potansiyeller de dalga denklemini sağlar.

Eğer herhangi bir $(\vec{A},\phi)$ çözümü bulursak, $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$ ayar koşulunu sağlayan ve aynı EM alana karşılık gelen bir başka çözümü $\Lambda = \frac{ic}{\omega}\phi$ ~~elde ederek~~ alarak bulabiliriz.

Bu çözümün en büyük özelliği $\phi = 0$ olmasıdır.

$\Phi = 0$ olduğundan ve ayar koşulunu kullanırsak $A_z = \pm \frac{i}{k} \vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{A}_\perp$

olarak buluruz. Yani EM alanı tasvir etmek için lazım olan $(\Phi, \vec{A})$ potansiyellerinden (toplam 4 tane) sadece iki tanesi bağımsız ve fizikseldir.

Öncelikle, $\vec{E}$ ve $\vec{B}$ alanlarını, bu iki bağımsız potansiyel cinsinden yazalım. Bağımsız ve fiziksel potansiyellerimizi $A_x(x,y)$ ve $A_y(x,y)$ olarak seçelim.

$$
\begin{aligned}
\vec{B}(x,y,z) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r},t) \\
&= \left(\vec{\nabla}_\perp + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(\vec{A}_\perp + \hat{z} A_z\right) \\
&= \vec{\nabla}_\perp \times \vec{A}_\perp + \vec{\nabla}_\perp \times (\hat{z} A_z) + \hat{z} \times \frac{\partial \vec{A}_\perp}{\partial z} \\
&= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z} + \left(-\hat{y}\frac{\partial A_z}{\partial x} + \hat{x}\frac{\partial A_z}{\partial y}\right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z}\hat{y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\hat{x}\right)
\end{aligned}
$$

$A_z = \pm \frac{i}{k}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}\right)$ olduğunu da kullanırsak Manyetik alanın bütün bileşenlerini A_x ve A_y'nin türevleri ~~bileşenleri~~ cinsinden ifade edebiliriz. Benzer şekilde elektrik alan için

$$
\begin{aligned}
\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= \frac{i\omega}{c}\vec{A} = \frac{i\omega}{c}\vec{A}_\perp + \frac{i\omega}{c} A_z \hat{z} \\
&= \frac{i\omega}{c}\vec{A}_\perp \mp \frac{\omega}{kc}\left(\vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{A}_\perp\right)\hat{z}
\end{aligned}
$$

buluruz.

Devam etmeden önce, potansiyellerle çalışmak yerine $\vec{E}$ ve $\vec{B}$ alanlarıyla dönelim.
Öncelikle, sadece E_z ve B_z'yi bilmemin, bütün $\vec{E}$ ve $\vec{B}$ alanını bilmeye yeteceğini gösterelim.

$$-E_z = \frac{\omega}{kc}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}\right)$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

Eğer A_x ve A_y'nin E_z ve B_z cinsinden ifadelerini bulursak, $\vec{E}_\perp$ ve $\vec{B}_\perp$ alanlarını E_z ve B_z cinsinden yazabiliriz. Bunu ise şöyle yapabiliriz:

$$-\frac{kc}{\omega}\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$= \cancel{\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial x}} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} - \cancel{\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y}}$$

$$= \vec{\nabla}_\perp^2 A_y$$

$$= \left(k^2 - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2\right) A_y$$

$$\Rightarrow A_y = \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{kc}{\omega}\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)\frac{1}{k^2 - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2}$$

Son adımda A_y'nin sağladığı hareket denklemini ve $k^2 - \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{c^2} \neq 0$ olduğunu kullandık, $k^2 = \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{c^2}$ olduğu durumu sonradan inceleyeceğiz.

Benzer şekilde, A_x'i bulmak için

$$-\frac{kc}{\omega}\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x}} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}$$

$$= \vec{\nabla}_\perp^2 A_x$$

$$= \left(k^2 - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2\right) A_x$$

Buradan da

$$A_x = \left(-\frac{kc}{\omega}\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\right)\frac{1}{k^2 - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2}$$

buluruz. A_x ve A_y için bulduğumuz bu ifadeleri $\vec{E}_\perp$ ve $\vec{B}_\perp$ alanlarının ifadelerinde yerleştirir isek

$$\vec{E}_\perp = \frac{-1}{k^2 - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2}\left(ik\vec{\nabla}_\perp E_z - \frac{i\omega}{c}\hat{z}\times\vec{\nabla}_\perp B_z\right)$$

ve

$$\vec{B}_\perp = \frac{-1}{k^2 - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2}\left[ik\vec{\nabla}_\perp B_z + \frac{i\omega}{c}\mu\varepsilon\left(\hat{z}\times\vec{\nabla}_\perp\right)E_z\right]$$

olarak buluruz. Buradan da görülebileceği üzere, E_z ve B_z'i belirlemek, bütün $\vec{E}$ ve $\vec{B}$ alanlarını belirlemek için yeterlidir.

$E_z = \frac{i\omega}{c} A_z$ olduğundan, ve A_z dalga denklemini sağladığından, E_z de dalga denklemini sağlar:

$$\left(\vec{\nabla}_\perp^2 - k^2 + \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{c^2}\right) E_z = 0$$

Benzer şekilde, $B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$

olduğundan ve A_x ile A_y dalga denklemini sağladığından, B_z de dalga denklemini sağlayacaktır:

$$\left(\vec{\nabla}_\perp^2 - k^2 + \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{c^2}\right) B_z = 0$$

Bu denklemleri çözebilmek için sınır koşullarını da belirlememiz gerekir. Ideal metalin içinde $\vec{E} = \vec{B} = 0$ olduğundan

$$\vec{E} \times \hat{n}\big|_S = 0 \quad \text{ve} \quad \vec{B} \cdot \hat{n}\big|_S = 0$$

olması gerekir. Yüzeyde yükler birikebileceği ve akımlar oluşabileceği için $\vec{B} \cdot \hat{n}\big|_S$ ve $\vec{H} \times \hat{n}\big|_S$ için birşey söyleyemeyiz.

Bu koşulları E_z ve B_z cinsinden yazabiliriz:

$$\vec{E}\times\hat{n}\Big|_S = E_z\,\hat{z}\times\hat{n}\Big|_S = 0 \Rightarrow \boxed{E_z\Big|_S = 0}$$

$$\vec{B}\cdot\hat{n}\Big|_S = \vec{B}_\perp\cdot\hat{n}\Big|_S$$

$$= -\frac{1}{k^2-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2}\left[ik\,\hat{n}\cdot\left(\vec{\nabla}_\perp B_z\right) + \frac{i\omega}{c}\mu\varepsilon\,\hat{n}\cdot\left(\hat{z}\times\vec{\nabla}_\perp\right)E_z\right]$$

$$= \frac{-ik}{k^2-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2}\,\hat{n}\cdot\left(\vec{\nabla}_\perp B_z\right)\Big|_S = 0.$$

Burada $\hat{n}\cdot\left(\hat{z}\times\vec{\nabla}_\perp\right)E_z = 0$ olduğunu kullandık çünkü $\left(\hat{z}\times\vec{\nabla}_\perp\right)E_z = \hat{z}\times\left(\vec{\nabla}_\perp E_z\right)$ ve yüzeyde $E_z = 0 =$ sabit olduğu için $\vec{\nabla}_\perp E_z$, yüzeye diktir, yani $\hat{n}$ ile paraleldir.

Dolayısıyla $\hat{n}\cdot\left(\vec{\nabla}_\perp B_z\right)\Big|_S = \boxed{\frac{\partial B_z}{\partial n}\Big|_S = 0}$

olması gerekir. Hepsini toplarsak

$$\left(\nabla_\perp^2 - k^2 + \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2\right)\begin{Bmatrix}E_z\\ B_z\end{Bmatrix} = 0$$

denklemlerini

$$E_z\Big|_S = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial B_z}{\partial n}\Big|_S = 0$$

sınır koşulları ile çözmemiz gerekir.

Bu denklemlere öz değer bulma problemleri olarak bakabiliriz: sadece belli ω, k değerleri için bu denklemlerin sınır koşullarını sağlayan çözümü olacaktır.

Bu dalgaları, özelliklerine göre üçe ayırabiliriz:

i) Her yerde $E_z=0$ olan dalgalar; bu dalgalara TE dalgaları adı verilir.

ii) Her yerde $B_z=0$ olan dalgalar; bu dalgalara da TM dalgaları adı verilir.

iii) Her yerde $E_z=B_z=0$ olan dalgalar; bu dalgalara da TEM dalgaları adı verilir.

Daha önce $\vec{E}_\perp$ ve $\vec{B}_\perp$ alanlarını E_z ve B_z cinsinden yazmıştık. Eğer $E_z=B_z=0$ ise (TEM dalgaları), $\vec{E}=\vec{B}=0$ olması gerekiyormuş gibi görünebilir. Bu durumdan kurtulabilmek için TEM dalgalarında $k^2=\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2$ olması gerekir.

Bu bağıntı ise, sonsuz bir ortamdaki EM dalgaların sağladığı bağıntıya benzer.

$k^2=\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2$ için $\vec{E}_\perp$ ve $\vec{B}_\perp$ Laplace denklemini sağlar:

$$\vec{\nabla}_\perp \begin{Bmatrix} \vec{E}_\perp \\ \vec{B}_\perp \end{Bmatrix} = 0.$$

$E_z = B_z = 0$ olduğundan, sayfa 177'deki denklemlerden

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0 \qquad A_z = 0$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0$$

olduğunu görürüz. A_x, A_y potansiyelleri cinsinden $\vec{E}_\perp$ ve $\vec{B}_\perp$ ifadelerini kullanırsak

$$\cancel{\vec{E}_\perp \cdot \vec{B}_\perp = \frac{i\omega}{c}(A_x \hat{x} + A_y \hat{y}) \cdot \left[(+\hat{y}\, ik A \right.}$$

$$\vec{E}_\perp = \frac{i\omega}{c}(A_x \hat{x} + A_y \hat{y})$$

$$\vec{B}_\perp = ik(A_x \hat{y} - A_y \hat{x})$$

Dolayısıyla $\vec{E}_\perp \cdot \vec{B}_\perp = 0$'dır, yani $\vec{E}_\perp$ ve $\vec{B}_\perp$ vektörleri birbirine diktir. Ayrıca yukarıdaki ifadelerden

$$\vec{B}_\perp = ik\, \hat{z} \times (A_x \hat{x} + A_y \hat{y})$$

$$= \frac{ikc}{i\omega}\, \hat{z} \times \vec{E}_\perp$$

$$\boxed{\vec{B}_\perp = \frac{kc}{\omega}\, \hat{z} \times \vec{E}_\perp}$$

olarak da yazabiliriz.

~~$E_\perp$ Laplace denklemini sağladığı ve metalin yüzünde~~

TEM dalgasında potansiyeller cinsinden

$$\vec{E}_\perp = \frac{i\omega}{c}\vec{A}_\perp$$

$$E_z = (\vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{A}_\perp)\frac{\omega}{kc} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{A}_\perp = 0$$

~~olduğ~~ olarak yazabiliriz. Dolayısıyla

$\vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{E}_\perp = 0$ olacaktır.

Aynı zamanda

$$B_z\hat{z} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z} = (\vec{\nabla}_\perp \times \vec{A}_\perp)$$

olduğunda ve TEM dalgalarda $B_z = 0$ olduğundan, $\vec{\nabla}_\perp \times \vec{A}_\perp = 0$ olacaktır ve dolayısıyla $\vec{\nabla}_\perp \times \vec{E}_\perp = 0$ olacaktır.

Burada $\vec{E}_\perp = -\vec{\nabla}_\perp \phi_\perp(x,y)$ olarak yazabiliriz ve $\phi_\perp(x,y)$, Laplace denklemini sağlar:

$$\nabla^2_\perp \phi_\perp = 0.$$

Yüzeyin içinde $\vec{E} = 0$ olduğundan, elektrik alanın yüzeye dik olması gerektiğini söylemiştik, yani $\vec{E}_\perp \cdot \hat{n} = 0$, dolayısıyla, metalin yüzeyi espotansiyel yüzeyidir. Laplace denkleminin çözümlerinin yerel maximum veya minimumları yoktur. Dolayısıyla eğer dalga rehberinin tek bir yüzeyi varsa, $\phi_\perp$ heryerde sabit olmalıdır. Dolayısıyla böyle rehberlerde TEM dalgası üretemeyiz.

TEM dalgası elde etmek için, dalga rehberinin, farklı potansiyele sahip olabilen (dolayısıyla bir iletkenle bağlı olmayan) en az iki yüzeye sahip olması gerekir, Bunun bir örneği koaksiyel kablodur.

Silindirik bir koaksiyel kablo düşünelim

iç yarıçapı a, dış yarıçapı b olsun.

TEM dalgaları bulmak için öncelikle iki boyutlu bir potansiyel tanımlayalım:

$$\vec{E}_{\perp}(x,y) = -\vec{\nabla}_{\perp}\, \phi_{\perp}(x,y)$$

$\vec{E}_{\perp}(x,y)$'yi bulduktan sonra, $\vec{B}_{\perp}(x,y) = \frac{kc}{\omega}\hat{z} \times \vec{E}_{\perp}$

olarak bulabiliriz. $\phi_{\perp}(x,y)$, iki boyutlu Laplace denklemini sağlayacaktır. Silindirik koordinatları kullanırsak

$$\nabla^2 \phi_{\perp}(\rho,\phi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\phi_{\perp}(\rho,\phi) = 0.$$

Bu denklemin çözümünü

$$\phi_{\perp}(\rho,\phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_m(\rho)\, e^{im\phi}$$

şeklinde arayacak olursak, $R_m(\rho)$

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2}\right] R_m(\rho) = 0$$

Denklemini sağlaması gerekir.

$m \neq 0$ için bu denklemin en genel çözümü

$$R_m(\rho) = A_m \rho^m + B_m \rho^{-m}$$

olarak yazılabilir.

$m = 0$ için ise çözümü

$$R_0(\rho) = A_0 \ln(\rho/\rho_0)$$

olarak yazılabilir. Böylece en genel çözüm

$$\Phi_\perp(\rho,\phi) = \sum_{m\neq 0} \left(A_m \rho^m + B_m \rho^{-m}\right) e^{im\phi} + A_0 \ln(\rho/\rho_0)$$

olarak bulunur. Buradaki sabitler sınır koşulları kullanarak bulunur:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_\perp(\rho=a,\phi) &= \Phi_1 \\ \Phi_\perp(\rho=b,\phi) &= \Phi_2 \end{aligned}\right\} \text{ sabit.}$$

$\rho = a$ ve $\rho = b$'de $\Phi_\perp$ sabit olduğu için $A_m = B_m = 0$, $m \neq 0$, olmalıdır. A_0 ve ρ_0 sabitleri ise

$$\left.\begin{aligned} A_0 \ln\left(\frac{a}{\rho_0}\right) &= \Phi_1 \\ A_0 \ln\left(\frac{b}{\rho_0}\right) &= \Phi_2 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \rho_0 &= \left(a^{\Phi_2} b^{-\Phi_1}\right)^{\frac{1}{\Phi_2-\Phi_1}} = a\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{\Phi_1}{\Phi_2-\Phi_1}} \\ A_0 &= (\Phi_1 - \Phi_2)\frac{1}{\ln(a/b)} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu çözümdende görüleceği üzere $a \to 0$ iken (yani ortadaki metali kaldırdığımızda) $A_0 \to 0$ olacağından, bu durumda TEM dalgaları yoktur.

$$\Phi_\perp(\rho,\phi) = A_0 \ln(\rho/\rho_0)$$

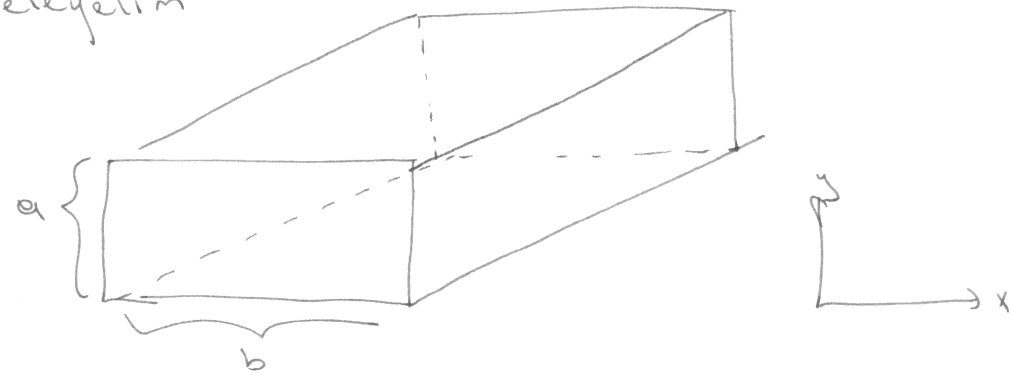
olarak bulduğumuzdan, artık $\vec{E}$ ve $\vec{B}$ alanlarını bulabiliriz:

$$\vec{E}_\perp = -\vec{\nabla}_\perp \Phi_\perp = -\frac{A_0}{\rho}\hat{\rho}$$

$$\vec{B}_\perp = \frac{kc}{\omega}\left(-\frac{A_0}{\rho}\right)\hat{z}\times\hat{\rho} = -A_0 \frac{kc}{\omega\rho}\hat{\phi}$$

olur.

Şimdide, dikdörtgensel bir dalga rehberini inceleyelim



Böyle bir dalga rehberinde TEM dalgalarının olamayacağını görmüştük, dolayısıyla

$$k^2 - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2 \neq 0.$$

Önce TE dalgalarına bakalım. Bu dalgalar için $E_z = 0$ olacaktır, ve $\vec{E}_\perp$ ile $\vec{B}_\perp$, B_z cinsinden belirlenecektir. B_z ise

$$\left(\vec{\nabla}_\perp^2 + \gamma^2\right) B_z = 0$$

denkleminin

$$\left.\frac{\partial B_z}{\partial n}\right|_S = 0$$

sınır koşulu ile ~~elde~~ çözümünden elde edilir. Burada $\gamma^2 = -k^2 + \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2$ olarak şekilde tanımladık

Değişkenleri ayırarak $B_z(x,y) = X(x)Y(y)$ şeklinde bir çözüm arar isek, X ve Y fonksiyonları

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \alpha X = 0 \quad ; \quad \frac{d^2Y}{dy^2} + \beta Y = 0$$

denklemlerini sağlamalıdır. Burada α ve β
$\gamma^2 = \alpha + \beta$ koşulunu sağlayan ~~ben~~ sabitlerdir.

α ve β'nin işaretine bağlı olarak,
X ve Y fonksiyonları ya ~~harmonik~~ trigonometrik fonksiyonlardır, ya da üstel olarak artan/azalan fonksiyonlardır.
X(x) ve Y(y) için sınır koşulları

$$X'(0) = X'(b) = 0$$
$$Y'(0) = Y'(b) = 0$$

olarak belirlenir. Eğer $\alpha(\beta) < 0$ ise, fonksiyonlar üstel olarak artan/azalan fonksiyonlar olacağı için, bu sınır koşullarını sağlayamazlar, dolayısıyla $\alpha, \beta > 0$ olması gerekir, bu da

$$\gamma^2 = k^2 - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2 > 0$$ olmasını gerektirir.

$\alpha, \beta > 0$ için, sınır koşullarını sağlayan X ve Y fonksiyonları

$$X(x) = A\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad n,m = \cancel{0}1,2,\ldots$$

$$Y(y) = B\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

olarak yazılabilir. Buradan

α ve β'nın alabileceği değerler

$$\alpha = n^2 \frac{\pi^2}{a^2} \quad ; \quad \beta = m^2 \frac{\pi^2}{b^2}$$

olarak bulunur ve dolayısıyla

$$-k^2 + \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2 = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)$$

olarak yazılabilir. Buradan da

ω'nın alabileceği en küçük değer

$$\omega = \frac{c\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

olarak bulunur. Daha düşük frekanslı dalgalar, dalga rehberinin içine yollansa da, rehber içinde ilerleyemeyecektir.

Koaksiyel kablodaki TEM kipi için böyle bir koşul bulmamıştık, dolayısıyla her frekanstaki dalgalar bir koaksiyel kabloda ilerlerken, içi boş bir dalga rehberinde sadece belli frekanslar ilerleyebilir.

Rezonans oyuklarına gelince, genel olarak, bir iletkenin içindeki herhangi bir oyuk rezonans oyuğu olarak düşünülebilir.

Örnek olarak, biraz önce incelediğimiz dalga rehberinin iki ucunu düzlemlerle kapattığımızı varsayalım.

Bu durumda

$$(B_z(\vec{r},t))_{nm} = A\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)e^{i(kz-wt)}$$

dalgası, $z=0$ ve $z=L$'de olarak alabileceğimiz kapaklarda sınır koşulunu sağlamayacaktır. Buralardaki sınır koşulunu sağlayan dalgaları

$$\left(B_z(\vec{r},t)\right)_{nml} = A\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{l\pi}{L}z\right)e^{-iw_{nml}t}$$

olarak yazabiliriz. Artık w_{nml}'değerleri sürekli olarak değişemez. Olası w_{nml} değerleri

$$\frac{\mu\varepsilon}{c^2}w^2_{nml} = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{l^2}{L^2}\right)$$

olarak yazılabilir. Bu durumda dalgalar durağan dalgalardır. $\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$ olduğunu kullanırsak, bulduğumuz çözümlerin $\vec{k} = \mp\frac{n\pi}{a}\hat{x} \mp \frac{m\pi}{b}\hat{y} \mp \frac{l\pi}{L}\hat{z}$

dalga vektörlerinin toplamı olduğunu görürüz. Yani burada yaratılan herhangi bir dalga bütün duvarlardan yansıyacaktır ve belirli frekans ve dalga vektörüne sahip olanlar dışındakiler sönümlenecektir.

Faz hızı ve gurup hızı

$$\psi = \psi_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt)}$$

olarak verilen bir düzlem dalganın hızının

$$\vec{v} = \frac{w\vec{k}}{k^2}$$

olduğunu belirtmiştik. Buradaki hız, faz hızı dediğimiz hızdır. Oysa, dalgalar çoğu zaman birden fazla olarak gezerler. Eğer birbirine yakın frekans ve dalga vektörüne sahip iki dalga alırsak, genlikleri aynı ise

$$\psi = \psi_0 \left(e^{i(\vec{k}_1\cdot\vec{r} - w_1 t)} + e^{i(\vec{k}_2\cdot\vec{r} - w_2 t + \delta)} \right)$$

olarak yazabiliriz. Burada δ iki dalga arasındaki olası faz farkıdır. Biraz düzenlemeyle ve $\Delta\vec{k} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$, $\Delta w = w_1 - w_2$, $\vec{k} = \frac{\vec{k}_1 + \vec{k}_2}{2}$, $w = \frac{w_1 + w_2}{2}$ olarak tanımlarsak, aynı dalgayı

$$\psi = \psi_0 \left(e^{\frac{i}{2}(\Delta\vec{k}\cdot\vec{r} - \Delta w t - \frac{\delta}{2})} + e^{-\frac{i}{2}(\Delta\vec{k}\cdot\vec{r} - \Delta w t - \frac{\delta}{2})} \right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt + \delta/2)}$$

$$= 2\psi_0 \cos\left(\frac{\Delta\vec{k}\cdot\vec{r}}{2} - \frac{\Delta w t}{2} \right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt + \delta/2)}$$

olarak da yazabiliriz. Bu ifadeyi

$\vec{v}_f = \frac{w\vec{k}}{k^2}$ faz hızıyla hareket eden ve genliği de $2\psi_0 \cos\left(\frac{\Delta\vec{k}\cdot\vec{r}}{2} - \frac{\Delta w}{2} t \right)$ olarak değişen bir dalga olarak düşünebiliriz.

Bu dalganın taşıdığı enerjiyi genliği belirlediği için, ve genliğin kendisi de

$$\vec{V}_g = \Delta\omega \frac{\vec{\Delta k}}{(\Delta k)^2} \;;\; V_g = |\vec{V}_g| = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \rightarrow \frac{\partial\omega}{\partial k}$$

hızı ile hareket eden bir dalga olduğu için, $\vec{V}_g$'yi enerji taşıma hızı olarak yorumlayabiliriz. Bu hıza gurup hızı denir.

Bunları dalga rehberlerine uygularsak, (n,m) tipi için k ve ω arasındaki bağıntıyı

$$\omega^2 = \frac{c^2}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left[k^2 + \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)\right] \equiv \frac{c^2}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left[k^2 + \gamma_{nm}^2\right]$$

olarak bulmuştuk. Buradan, faz hızını ~~burada~~

$$V_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left(1 + \gamma_{nm}^2 / k^2\right)^{1/2}$$

olarak buluruz. Boşlukta düşünürsek, $\mu = \varepsilon = 1$ için

$$V_f = c\left(1 + \gamma_{nm}^2 / k^2\right)^{1/2} > c$$

olarak buluruz. Yani dalga rehberlerindeki EM dalganın faz hızı ışık hızından fazladır. Gurup hızını hesaplayacak olursak,

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{k}{\sqrt{k^2 + \gamma_{nm}^2}} = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left(1 + \gamma_{nm}^2 / k^2\right)^{-1/2}$$

olarak bulunur. Ve gurup hızı, ki bilgiyi taşıyan hız gurup hızıdır, her zaman ışık hızından azdır. Ayrıca

$$v_g V_f = \frac{c^2}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$ olduğuna da dikkat ediniz.