Şimdiye kadar serbest yüklerin olmadığı bölgelerdeki EM ~~dalgala~~ alanları inceledik ve bu bölgelerde EM dalgaların varlıklarını gösterdik.

Şimdi ise verilen bir yük ve akım yoğunluğunun $(\rho, \vec{J})$ yaratacağı EM alanı inceleyelim.

Bu durumda Lorentz ayarında, potansiyeller

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{pmatrix}\varphi \\ \vec{A}\end{pmatrix} = -4\pi\begin{pmatrix}\rho \\ \vec{J}/c\end{pmatrix}$$ (sistemin boşlukta olduğunu varsaydık)

denklemlerini sağlayacaklardır. Bu denklemi çözmek için Green fonksiyonlarını kullanabiliriz.

$G(\vec{r}, t; \vec{r}\,', t')$ fonksiyonu

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\vec{r}, t; \vec{r}\,', t') = -4\pi\,\delta(t-t')\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

~~koşulunu~~ denklemini sağlayan bir fonksiyon olsun. O zaman

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = -4\pi\,\varphi(\vec{r}, t)$$

denkleminin çözümü

$$\psi(\vec{r}, t) = \int d^3r'\,dt'\; G(\vec{r}, t; \vec{r}\,', t')\,\varphi(\vec{r}\,', t')$$

olarak yazılabilir. Bu ifadenin, denklemi çözdüğü sağına ve soluna $\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ operatörünü uygulayarak gösterilebilir.

$G(\vec{r},t;\vec{r}\,',t')$'ne $t=t'$ anında $\vec{r}=\vec{r}\,'$ noktasında bir an için oluşup yok olan birim yükün yarattığı potansiyel olarak bakabiliriz. Zaman ve konum öteleme simetrisinden dolayı bu ifade sadece $\vec{r}-\vec{r}\,'$ ve $t-t'$'ne bağlı olabilir: $G(\vec{r},t;\vec{r}\,',t') = G(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t')$ ve bu G fonksiyonu

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\vec{r},t) = -4\pi\,\delta^3(\vec{r})\,\delta(t)$$

denklemini sağlar. Bu denklemi görmek için $G(\vec{r},t)$'yi Fourier dönüşümü şeklinde yazacağız:

$$G(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k\,d\omega}{(2\pi)^4}\, G(\vec{k},\omega)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

Dirac deltaların da Fourier gösterimini kullanırsak

$$\delta^3(\vec{r})\,\delta(t) = \int \frac{d^3k\,d\omega}{(2\pi)^4}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

$$G(\vec{k},\omega) = \frac{4\pi}{\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

olarak buluruz. Buradan da Green Fonksiyonunun konum uzayındaki ifadesini

$$G(\vec{r},t) = 4\pi \int \frac{d^3k\,d\omega}{(2\pi)^4}\, \frac{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}}{\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

olarak hesaplayabiliriz.

Bu ifadedeki ω integralini hesaplamaya kalktığımızda hemen bir problemle karşılaşırız:

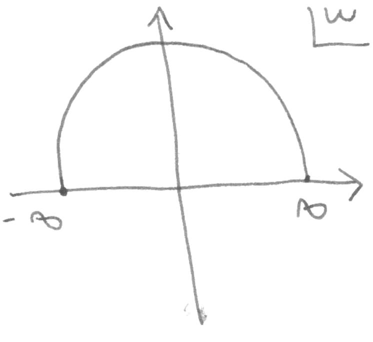
$$\omega = \mp ck \equiv \mp c\sqrt{\vec{k}^2}$$

değerlerinde, integrali alınan ifade ıraksar. Bundan kurtulmak için karmaşık düzlemde bu integrale bakabiliriz. Bu tekillikleri karmaşık düzlemde reel eksenden biraz ötelersek, bu tekillik probleminden kurtuluruz. Bu tekilliklerin her birini, reel eksenin altına, ya da üstüne kaydırabiliriz. Hangisini yapacağımızı bize sınır koşulları belirleyecektir.

ω integraline daha detaylı bakacak olursak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{e^{-i\omega t}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

eğer bu integral kapalı bir eğri üzerinde alsaydı Rezidü teoremini kullanarak bu integrali hesaplayabilirdik. Integral reel eksen üzerinden $-\infty$'dan $+\infty$'a kadar olduğu için, bu eğriyi, sonsuzdaki bir yarıçember üzerinden kapatabiliriz. Eğer yukarıdaki yarı çember üzerinden kapatırsak



yarı çember üzerinde $\mathrm{Im}\,\omega = +\infty$ olacak ve

$$e^{-i\omega t} = e^{-i(\mathrm{Re}\,\omega)t}\, e^{(\mathrm{Im}\,\omega)t}$$

ve eğer $t<0$ ise $e^{(\mathrm{Im}\,\omega)t} = 0$

olacaktır.

Dolayısıyla, $t<0$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{e^{-iwt}}{k^2 - \frac{w^2}{c^2}} = \int_{\frown} dw \frac{e^{-iwt}}{k^2 - \frac{w^2}{c^2}} \qquad t<0 \text{ ise}$$

olacaktır. Benzer şekilde, eğer aşağıdan kapatırsak, $t>0$ için sonsuzdaki yarı çemberin katkısı sıfır olacağından

$$\int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{e^{-iwt}}{k^2 - \frac{w^2}{c^2}} = \int_{\smile} dw \frac{e^{-iwt}}{k^2 - \frac{w^2}{c}} \qquad t>0 \text{ ise}$$

olacaktır. Şimdi $G(\vec{r},t)$'ye nasıl sınır koşulları koyabileceğimize bakalım. Eğer $t<0$ ise, henüz birim yük hiç oluşmamıştır. Dolayısıyla hiç bir potansiyelin oluşmaması lazım. Bu durumda

$$G(\vec{r},t)=0, \quad t<0 \text{ ise}$$

olmalıdır. $t<0$ ise $G(\vec{r},t)$ integralini yukarı karmaşık düzlemden kapattığımız için, buradaki rezidülerden katkı alacaktır. $G(\vec{r},t)=0$ olması için yukarı karmaşık düzlemde hiç bir tekilliğin olmaması gerekir. Bu da bize

$$w=\mp ck\text{'daki tekillikleri,}$$

reel eksenin hemen altına itmemiz gerektiğini söyler:

$$w=\mp ck - i0^+$$

Burada 0^+, 0'dan büyük sonsuz küçük bir sayı olarak kullanılmıştır.

Bu durumda, $t > 0$ için

$$\frac{G(\vec{k},t)}{4\pi} = -2\pi i \sum_{\text{rezidüler}} \text{Rezidü}\left(\frac{e^{-i\omega t}}{k^2-\frac{(\omega+i0^+)^2}{c^2}}\right)$$

Baştaki "−" işareti eğrinin yönünden kaynaklanmaktadır.

Rezidüleri hesapladığımızda

$$\frac{G(\vec{k},t)}{4\pi} = +2\pi i\left(\frac{e^{-i\frac{k}{c}t}}{2k/c} + \frac{e^{i\frac{k}{c}t}}{-2k/c}\right)$$

$$= \frac{c\pi i}{k}\left(e^{-ikct} - e^{ikct}\right)$$

olarak buluruz. $\vec{k}$ integralinin içine yerleştirir isek

$$G(\vec{r},t) = \overset{4\pi}{\cancel{2\pi}}\, i c \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4}\left(e^{-ikct} - e^{ikct}\right)\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{k}$$

Küresel koordinatlarda yazarsak

$$= \frac{\overset{4\pi}{\cancel{2\pi}}\, i}{(2\pi)^4}\, c\int_0^\infty dk\, \frac{k^2}{\cancel{k}}\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\int_0^{2\pi} d\phi\left(e^{-ikct} - e^{ikct}\right)e^{ikr\cos\theta}$$

$$= \frac{\overset{4\pi}{\cancel{2\pi}}\, i}{(2\pi)^4}\, c\int_0^\infty dk\, \cancel{k}\; 2\pi\, \frac{e^{ikr\cos\theta}}{\cancel{ik}r}\Bigg|_{\cos\theta=-1}^{\cos\theta=+1}\left(e^{-ikct} - e^{ikct}\right)$$

$$= \overset{4\pi}{}\frac{1}{8\pi^2}\frac{c}{r}\int_0^\infty dk\, \cancel{k}\left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right)\left(e^{-ikct} - e^{ikct}\right)$$

$$= \frac{4\pi}{8\pi^2 r}c\int_0^\infty dk\left[e^{ik(r-ct)} - e^{ik(r+ct)} - e^{-ik(r+ct)} + e^{-ik(r-ct)}\right]$$

$$= \frac{4\pi}{8\pi^2 r}c\int_{-\infty}^{\infty} dk\left[e^{ik\left(r-\frac{t}{c}\right)} - e^{ik\left(r+\frac{t}{c}\right)}\right]$$

$$= \frac{\cancel{4\pi}}{8\pi^2 r}c\,\cancel{2\pi}\left[\delta(r-ct) - \delta(r+ct)\right]$$

Şu anda $t>0$ için hesap yaptığımız ve $r>0$ olduğu için $\delta(r+ct)=0$'dır ve

$$G(\vec{r},t) = c\,\frac{\delta(r-ct)}{r}$$

olarak bulunur. Bunu kullanarak potansiyelleri yazarsak

$$\phi(\vec{r},t) = c\int d^3r'\,dt'\,\frac{\delta(|\vec{r}-\vec{r}\,'|-c(t-t'))}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\rho(\vec{r}\,',t')$$

$$\phi(\vec{r},t) = \int d^3r'\,\frac{\rho\left(\vec{r}\,',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \int d^3r'\,\frac{1}{c}\,\frac{\vec{J}\left(\vec{r}\,',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

elde ederiz. Statikte elde ettiğimiz ifadelere çok benzemekle beraber, t anında $\vec{r}$ noktasında ~~ki~~ potansiyeli belirleyen yükler $\vec{r}\,'$ noktasında $\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$ süre önce bulunan yüklerdir. Dolayısıyla $\vec{r}\,'$ noktasındaki bir değişim diğer noktalara c hızı ile ulaşırlar. Bundan sonra

$$t_g \equiv t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$$

olarak kullanacağız.

Bu bulduğumuz potansiyellerin gerçekten aradığımız potansiyeller olduğunu göstermek için, son olarak, bu çözümlerin Lorentz ayarını sağladığını göstermemiz gerekir.

$$\phi = \int d\vec{r}' dt' \rho(\vec{r}', t') G(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$$

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int d\vec{r}' dt' \vec{j}(\vec{r}', t') G(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$$

olarak yazalım. Buradan

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{c} \int d\vec{r}' dt' \vec{j}(\vec{r}', t') \cdot \vec{\nabla}_r G(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$$

$$= -\frac{1}{c} \int d\vec{r}' dt' \vec{j}(\vec{r}', t') \cdot \vec{\nabla}_{r'} G(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$$

$$\vec{j} \cdot \vec{\nabla}_{r'} G = \vec{\nabla}_{r'} \cdot (\vec{j} G) - (\vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{j}) G$$

olduğunu kullanırsak, $\vec{\nabla}_{r'} \cdot (\vec{j} G)$ terimini bir yüzey integraline çevirebiliriz, ki bu integral katkı vermez. Böylece

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{c} \int d\vec{r}' dt' (\vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{j}) G(\vec{r} - \vec{r}'; t - t')$$

buluruz. Benzer şekilde

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \int d\vec{r}' dt' \frac{\partial \rho}{\partial t'} G(\vec{r} - \vec{r}'; t - t')$$

olduğu da gösterilebilir. Buradan

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{c} \int d\vec{r}' dt' \left[\vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t'} \right] G(\vec{r} - \vec{r}'; t - t')$$

$$= 0$$

bulunur. Buradaki son eşitlik

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

süreklilik denkleminden elde edilmiştir.

Şimdi herhangi bir hareket yapan noktasal yükün yaratacağı potansiyele bakalım. Bu yükün ~~yaratacağı~~ yük yoğunluğunu ve akımı

$$\rho(\vec{r},t) = q\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0(t))$$

$$\vec{j}(\vec{r},t) = q\dot{\vec{r}}_0(t)\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0(t))$$

olarak yazabiliriz, burada $\vec{r}_0(t)$ yükün yörüngesidir.

$$\Phi(\vec{r},t) = \int d^3r' \quad q\,\frac{\delta^3(\vec{r}'-\vec{r}_0(t_g))}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

integralini almamız lazım. Bu integrali karıştıran, Dirac deltanın içinin $\vec{r}'$ bağımlılığı hem $\vec{r}'$ ifadesinden hem de t_g'deki $\vec{r}'$ bağımlılığından gelmektedir. Bu ifadeyi şöyle hesaplayabiliriz:

$$\Phi(\vec{r},t) = c\int d^3r'\,dt' \quad q\,\delta^3(\vec{r}'-\vec{r}_0(t'))\,\frac{\delta\left(|\vec{r}-\vec{r}'|-c(t-t')\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\Phi(\vec{r},t) = c\int dt' \quad q\,\frac{\delta\left(|\vec{r}_0(t')-\vec{r}|-c(t-t')\right)}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}$$

Dirac deltanın $\delta(f(x)) = \sum_{x_0} \frac{\delta(x-x_0)}{|f'(x_0)|}$, $f(x_0)=0$

özelliğini kullanırsak

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{qc}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t_g)|}\,\frac{1}{\left|\frac{d}{dt'}\left(|\vec{r}_0(t')-\vec{r}|-c(t-t')\right)\right|_{t'=t_g}}$$

şeklinde yazabiliriz.

Türevi hesaplayacak olursak

$$\frac{d}{dt'}\left(|\vec{r}_0(t')-\vec{r}| - c(t-t')\right)\Big|_{t'=t_g}$$

$$= \left(\vec{v}_0(t')\cdot\frac{(\vec{r}_0(t')-\vec{r})}{|\vec{r}_0(t')-\vec{r}|}+c\right)\Big|_{t'=t_g}$$

$$= \vec{v}_0(t_g)\cdot\frac{\vec{r}_0(t_g)-\vec{r}}{|\vec{r}_0(t_g)-\vec{r}|}+c$$

olarak buluruz. Dolayısıyla

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{qc}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t_g)|}\frac{1}{-\vec{v}_0(t_g)\cdot\hat{n}+c} = \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t_g)|}\frac{1}{1-\frac{\vec{v}_0(t_g)\cdot\hat{n}}{c}}$$

elde edilir. Burada $\hat{n} = \frac{-\vec{r}_0(t_g)+\vec{r}}{|\vec{r}_0(t_g)-\vec{r}|}$ birim vektörünü tanımladık. Bu birim vektor t_g anındaki parçacığın konumundan $\vec{r}$ noktasına doğru yönelmiş birim vektördür.

Benzer şekilde vektör potansiyel de

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{q\vec{v}_0(t_g)/c}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t_g)|}\frac{1}{1-\frac{\vec{v}_0(t_g)\cdot\hat{n}}{c}}$$

olarak elde edilir. Burada $t_g = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t_g)|}{c}$ denkleminin çözümünden elde edilir.

Bu potansiyellere Lienard-Wiechert potansiyelleri adı verilir.

Şimdi de sabit hızla hareket eden bir parçacığın yaratacağı potansiyelleri bulalım.

$\vec{r}_0(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$ olarak yazılabilir. t_g'yi bulmak için

$c(t-t_g) = |\vec{r} - \vec{r}_0(t_g)|$. Denklemini çözmeliyiz. Karesini alırsak

$$\Rightarrow c^2 (t-t_g)^2 = (\vec{r} - \vec{r}_0(t_g))^2 = (\vec{r} - \vec{r}_0 - \vec{v}_0 t_g)^2$$

$$c^2(t^2 + t_g^2 - 2t t_g) = (\vec{r} - \vec{r}_0)^2 + v_0^2 t_g^2 - 2\vec{v}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) t_g$$

$$\Rightarrow t_g^2 (v_0^2 - c^2) - 2t_g \left[\vec{v}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) - t c^2\right] - c^2 t^2 + (\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = 0$$

$$t_g = \frac{1}{v_0^2 - c^2}\left(\left[\vec{v}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) - t c^2\right] \mp \sqrt{\left(\vec{v}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) - t c^2\right)^2 + (v_0^2 - c^2)\left[t^2 c^2 - (\vec{r} - \vec{r}_0)^2\right]}\right)$$

$$t_g = \left\{\left[\vec{v}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) - t c^2\right] \mp \sqrt{\left[\vec{v}_0 (\vec{r} - \vec{r}_0) - t c^2\right]^2 + (c^2 - v_0^2)\left[(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 - t^2 c^2\right]}\right\} \frac{1}{v_0^2 - c^2}$$

buluruz. İşareti seçmek için $\vec{v}_0 = 0$ durumuna bakacak olursak

$$t_g = \frac{-tc^2 \mp \sqrt{\cancel{t^2 c^4} + c^2\left[(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 - \cancel{t^2 c^2}\right]}}{-c^2}$$

$$= \frac{-tc^2 \mp c|\vec{r} - \vec{r}_0|}{-c^2}$$

$$t_g = t \pm \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}$$

Buluruz. Doğru olan işaret alttaki işaret olduğu için

$$t_g = \frac{\left[\vec{v}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) - t c^2\right] + \sqrt{\left[\vec{v}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) - t c^2\right]^2 + (c^2 - v_0^2)\left[(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 - t^2 c^2\right]}}{v_0^2 - c^2}$$

elde ederiz.

Bu ifadeyi sadeleştirmek için karekökün içindeki ifadeye bakalım. Parantezleri açarsak

$$\cancel{t^2 c^4} + [\vec{v}_0 \cdot (\vec{r}-\vec{r}_0)]^2 - 2tc^2 \vec{v}_0 (\vec{r}-\vec{r}_0) + c^2 (\vec{r}-\vec{r}_0)^2 - \cancel{t^2 c^4}$$
$$- v_0^2 (\vec{r}-\vec{r}_0)^2 + v_0^2 t^2 c^2$$
$$= [\vec{v}_0 \cdot (\vec{r}-\vec{r}_0)]^2 - v_0^2 (\vec{r}-\vec{r}_0)^2 + c^2 [\vec{r}-\vec{r}_0 - t\vec{v}_0]^2$$

$\vec{v}_0$ ile $(\vec{r}-\vec{r}_0)$ arasındaki açıya α' dersek ve

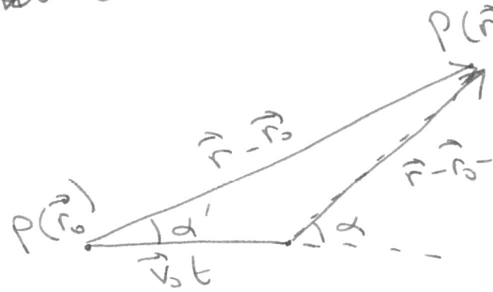
$$\vec{r}-\vec{r}_0 - t\vec{v}_0 \equiv \vec{w}$$

olarak tanımlarsak

$$= v_0^2 (\vec{r}-\vec{r}_0)^2 [\cos^2\alpha' - 1] + c^2 \vec{w}^2$$

$$= c^2 w^2 \left(1 - \frac{v_0^2 (\vec{r}-\vec{r}_0)^2}{c^2 \vec{w}^2} \sin^2\alpha'\right)$$

Vektörleri ve açıları bir diyagramda gösterir isek



~~üçgendeki sinüs bağıntıları~~ üçgenden

$$|\vec{r}-\vec{r}_0| \sin\alpha' = |\vec{w}| \sin\alpha$$

olduğu rahatça görülür. Dolayısıyla yukarıdaki ifadeyi

$$= c^2 w^2 \left(1 - \frac{v_0^2 \cancel{(\vec{r}-\vec{r}_0)^2}}{c^2 \cancel{w^2}} \frac{\cancel{w^2} \sin^2\alpha}{\cancel{(\vec{r}-\vec{r}_0)^2}}\right)$$

$$= c^2 w^2 \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \sin^2\alpha\right)$$

olarak yazabiliriz. Dikkat ederseniz, $\vec{w}$ vektörü $\vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$ noktasından, yani parçacığın t anındaki, t_g anındaki değil, $\vec{r}$ noktasını gösteren vektördür.

istenirse, vektörler cinsinden

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \cdot \vec{V}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t)|\,|\vec{V}_0|}\right)^2$$ olarak

da yazılabilir. Böylece karekökün içindeki ifade

$$= c^2 w^2 \left[1 - \frac{V_0^2}{c^2} + \frac{\cancel{V_0^2}}{c^2} \frac{(\vec{w} \cdot \vec{V}_0)^2}{w^2 \cancel{V_0^2}}\right]$$

$$= c^2 w^2 \left(1 - \frac{V_0^2}{c^2}\right) + (\vec{w} \cdot \vec{V}_0)^2$$

$$= c^2 w^2 + \left[(\vec{w} \cdot \vec{V}_0)^2 - w^2 V_0^2\right]$$

olarak da yazılabilir. Böylece, sayfa 200'deki ifadeden

$$t_g = \frac{\vec{V}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) - t c^2 + \sqrt{\left[(\vec{w} \cdot \vec{V}_0)^2 - w^2 V_0^2\right] + c^2 w^2}}{V_0^2 - c^2}$$

olarak buluruz. Potansiyelleri hesaplamak için

~~$\vec{r}_0(t_g) = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t_g$ ifadesine ihtiyacımız var.~~

~~Yerine yerleştirir isek~~

$$\cancel{\vec{r}_0(t_g) = \frac{\vec{r}_0 (V_0^2 - c^2) + [\vec{V}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)] \vec{V}_0 - t c^2 \vec{V}_0 + \sqrt{}}{V_0^2 - c^2}}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_0(t_g)| = c(t - t_g)$$

ifadesine ihtiyacımız var. Yerine yerleştirir isek

$$|\vec{r} - \vec{r}_0(t_g)| = c \; \frac{t V_0^2 - \cancel{t c^2} - \vec{V}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) + \cancel{t c^2} - \sqrt{}}{V_0^2 - c^2}$$

$$= + c \frac{\left[\vec{V}_0 (\vec{r} - \vec{r}_0 - \vec{V}_0 t) + \sqrt{}\right]}{V_0^2 - c^2}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_0(t_g)| = + c \frac{\vec{w} \cdot \vec{V}_0 + \sqrt{}}{}$$

Bu ifadeyi, potansiyellere yerleştirerek, sabit hızda hareket eden bir yükün yaratacağı potansiyeli bulabiliriz.

$$\phi = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_g)|} \frac{1}{1 - \frac{\vec{v}_0(t_g)}{c} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0(t_g))}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_g)|}}$$

$$= \frac{qc}{c|\vec{r} - \vec{r}_0(t_g)| - \vec{v}_0(t_g) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0(t_g))}$$

Burada, işlemleri kolaylaştırmak için, sabit hızda harekette

$$\vec{r}_0(t_g) - \vec{r}_0(t) = \vec{v}_0(t_g - t)$$

$$\Rightarrow \vec{r}_0(t_g) = \vec{r}_0(t) + \vec{v}_0(t_g - t) = \cancel{\vec{w} + \vec{v}_0(t_g - t)}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_0(t_g) = \vec{r}_0(t) - \vec{v}_0 \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_g)|}{c}$$

olduğunu kullanabiliriz. Dolayısıyla

$$\phi = \frac{qc}{c|\vec{r} - \vec{r}_0(t_g)| - \vec{v}_0(t_g) \cdot \left[\vec{r} - \vec{r}_0(t) + \vec{v}_0 \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_g)|}{c}\right]}$$

$$= \frac{qc^2}{(c^2 - v_0^2)|\vec{r} - \vec{r}_0(t_g)| - \vec{w} \cdot \vec{v}_0 c}$$

$$= \frac{qc}{\cancel{\vec{w} \cdot \vec{v}_0} + \sqrt{\quad} - \cancel{\vec{w} \cdot \vec{v}_0}}$$

$$\phi = \frac{qc}{\sqrt{(\vec{w} \cdot \vec{v}_0)^2 - w^2 v_0^2 + c^2 w^2}}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde

$$\vec{A} = \frac{q\vec{v}_0}{\sqrt{(\vec{w} \cdot \vec{v}_0)^2 - w^2 v_0^2 + c^2 w^2}}$$

olarak bulunur.

Potansiyelleri bulduktan sonra, artık sabit hızda hareket eden bir parçacığın yaratacağı elektrik ve manyetik alanları bulabiliriz. Bunun için ϕ ve $\vec{A}$ nın konum ve zamana göre türevlerini almamız lazım. Dikkat ederseniz, ϕ'de $\vec{A}$'da konum ve zamana $\vec{w}$ aracılığıyla bağlıdırlar.

Yani

$$\phi(\vec{r},t) = \phi\left(\vec{w}(\vec{r},t)\right) \equiv \phi(\vec{w})$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{V}_0/c\,\phi(\vec{w})$$

Eğer ϕ'nin $\vec{w}$'ya göre türevlerini hesaplarsak, $\vec{r}$ ve t'ye göre türevleri de kolayca hesaplayabiliriz:

$$\frac{\partial \phi}{\partial w_i} = \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{qc}{\left[(\vec{w}\cdot\vec{V}_0)^2 - w^2 V_0^2 + c^2 w^2\right]^{3/2}}\left[2(\vec{w}\cdot\vec{V}_0)V_{0i} - 2w_i V_0^2 + 2w_i c^2\right]$$

$$= \frac{-qc}{\left[(\vec{w}\cdot\vec{V}_0)^2 - w^2 V_0^2 + c^2 w^2\right]^{3/2}}\left[(\vec{w}\cdot\vec{V}_0)\vec{V}_0 + \vec{w}(c^2 - V_0^2)\right]_i$$

Şimdi, elektrik alanı hesaplayalım:

$$\vec{E}_i = -\frac{\partial}{\partial x_i}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} = -\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial w_j} - \frac{1}{c}\frac{\partial w_j}{\partial t}\frac{\partial A_i}{\partial w_j}$$

$$= -\frac{\partial \phi}{\partial w_i} + \frac{(V_0)_j}{c^2}(V_0)_i\frac{\partial \phi}{\partial w_j}$$

$$= \frac{-qc}{[\quad]^{3/2}}\left[-\cancel{(\vec{w}\cdot\vec{V}_0)\vec{V}_0} + \vec{w}(c^2 - V_0^2) + \frac{\vec{V}_0}{\cancel{c^2}}\left[\cancel{(\vec{w}\cdot\vec{V}_0)V_0^2} + \cancel{(\vec{w}\cdot\vec{V}_0)}(\cancel{c^2} - \ldots\right.\right.$$

$$\vec{E} = \frac{qc(c^2 - V_0^2)}{\left[(\vec{w}\cdot\vec{V}_0)^2 - w^2 V_0^2 + c^2 w^2\right]^{3/2}}\vec{w}$$

Manyetik alanı hesaplarsak

$$\vec{B}_i = (\vec{\nabla}\times\vec{A})_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{(V_0)_k}{c}\phi(\vec{w})$$

$$= \varepsilon_{ijk}\frac{V_{0k}}{c}\underbrace{\frac{\partial w_\ell}{\partial x_j}}_{\delta_{\ell j}}\frac{\partial\phi(\vec{w})}{\partial w_\ell}$$

$$= \varepsilon_{ijk}\frac{V_{0k}}{c}\frac{\partial\phi}{\partial w_j}$$

$$= \varepsilon_{ijk}\frac{V_{0k}}{c}\left(\frac{\partial\phi}{\partial w_j} - \frac{(V_0)_\ell (V_0)_j}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial w_\ell}\right)$$

Burada $\varepsilon_{ijk}V_{0k}V_{0j}=0$ olduğunu kullandık

$$= \varepsilon_{ijk}\frac{V_{0k}}{c}(-E_j)$$

$$= -\left(\frac{\vec{E}\times\vec{V}_0}{c}\right)_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\vec{V}_0}{c}\times\vec{E}},$$

olarak bulunur.

Elektrik alan ifadesini daha yakından inceleyecek olursak, her noktadaki elektrik alan yine yükün o anda bulunduğu noktadan uzağa doğrudur. En şiddetli olduğu yer $\vec{w}\cdot\vec{V}_0=0$ olduğu yerdedir, yani hareket doğrultusuna dik yöndedir. Bu doğrultudaki elektrik alan

$$\vec{E} = \cancel{\frac{q\phi\,\vec{w}}{w^2}} \quad \frac{q}{w^3}\frac{\vec{w}}{\sqrt{1-V_0^2/c^2}}$$ olarak verilir.

En zayıf olduğu doğrultuda hareket doğrultusundadır.