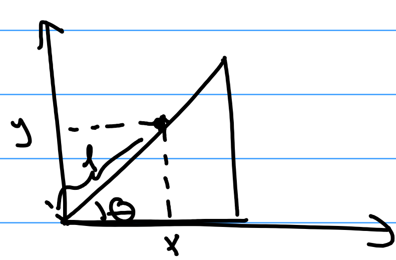
ders kitabı: Landau, "Mechanics, Vol 1"

herhangi bir sistemin durumunu klasik mekanikte belirleyebilmek için, onu oluşturan parçacıkların konum ve hızlarını belirlememiz gerekir.

N parçacık içeren bir sistemde, parçacıkların konumlarını belirlemek için 3N koordinatı bilmemiz gerekir. Bu koordinatlar arasında bazı koşullar olabilir (mesela parçacıklar belli bir yüzey üzerinde hareket ediyor olabilirler.) Bu koşulları $f_i(\vec{r}_j) = 0$ olarak ($j = 1, ..., N$, $i = 1, ..., M$) olarak yazalım.

Bu durumda, parçacıkların konumunu birbirinden bağımsız $3N-M$ parametre cinsinden belirleyebiliriz. Bunları q_i, $i = 1, .., 3N-M$ olarak gösterelim. Bu q_i koordinatlarına genelleştirilmiş koordinatlar deriz.
$\dot{q}_i$'lerin zamana göre türevleri de genelleştirilmiş hızlardır.

<u>Örnek</u>



Eğik düzlemde kayan noktasal bir kütle düşünelim. Bu kütlenin konumunu belirtmek için pek çok farklı parametreleri kullanabiliriz. Bunlardan ikisi

i) (x,y) koordinatları
ii) l uzunluğu

(x,y) koordinatlarını kullanırsak, bu koordinatlar

$$\frac{y}{x} = \tan\theta \Rightarrow f(x,y) = y - x\tan\theta = 0$$

koşulunu sağlamalıdır.

$\square$

Genel fizik derslerinde, bir sistemin davranışını belirlemek için Newton'un dinamik yasaları kullanılır ve

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$ denklemi çözülmeye

çalışılır.

Bu derste, aynı probleme farklı bir bakış açısı getirmeye çalışacağız.

Başlangıç prensibini şöyle ifade edebiliriz: incelediğimiz sistemi q_i genelleştirilmiş koordinatları ile tasvir edelim. O zaman, öyle bir $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ fonksiyonu vardır ki, eylemi

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)$$

olarak tanımlarsak, S eyleminin minimumu sisteminin hareketini belirler ($t_2 - t_1$ yeterince küçükse, bu bir minimumdur, aksi takdirde, bir extremumdur).

Bir başka deyişle $q_i(t) = q_i^\circ(t)$ sistemin zamanla nasıl değiştiğinin çözümleri olsun. $q_i(t)$'yi $q_i(t_1) = q_i^\circ(t_1)$ ve $q_i(t_2) = q_i^\circ(t_2)$ alacak şekilde sabit alarak $q_i(t) = q_i^\circ(t) + \delta q(t)$ ($\delta q(t)$ yeterince küçük) yazarsak eylemin değeri artar ya da sabit kalır.

$$S[q_i^\circ + \delta q] - S[q_i^\circ] \geq 0$$

L fonksiyonunun nasıl yazılabileceğini sonradan inceleyeceğiz. Şu anda yukarıdaki koşulu kullanarak $q_i^\circ(t)$ koordinatlarının nasıl bir denklem sağlaması gerektiğine bakalım.

$$S[q_i^\circ + \delta q_i] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i^\circ + \delta q_i^\circ, \dot{q}_i^\circ + \delta \dot{q}_i^\circ, t)\, dt$$

(burada koordinatların t argumanlarını kolaylık olması için yazmadık)

δq_i° ve $\delta \dot{q}_i^\circ$ küçük olduğundan L fonksiyonunun Taylor açılımını yapıp, ilk terimi alabiliriz:

$$S[q_i + \delta q_i] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i^\circ, \dot{q}_i^\circ, t)\, dt$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i\right] dt$$
$$+ \ldots$$

yazılmayan terimler δq_i cinsinden ikinci derecedir.

Buradaki ilk integral $S[q_i^\circ]$'dir.
q_i°'in, eylemin ekstremum noktası olma şartı,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] dt = 0$$

olduğu anlamına gelir.

$$\delta \dot{q}_i = \dot{q}_i - \dot{q}_i^\circ = \frac{d}{dt}(q_i - q_i^\circ) = \frac{d}{dt} \delta q_i$$

olduğunu kullanırsak

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d \delta q_i}{dt} \right] dt = 0$$

elde ederiz. İkinci terimde kısmi integrasyon yaparsak

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Bigg|_{t=t_1}^{t=t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i \, dt = 0$$

Buluruz. yukarıda $q_i(t_1) = q_i^\circ(t_1)$ ve $q_i(t_2) = q_i^\circ(t_2)$ aldığımıza değinmiştik. Dolayısıyla $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ olur:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i \, dt = 0$$

Bu eşitlik (yeterince küçük olmak kaydıyla) her olası δq_i için geçerli olmalıdır.

bunu sağlamanın tek yolu

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

olmasıdır. Bu denkleme Euler-Lagrange denklemi denir. (Bu çıkarımdaki L'in türevleri $q_i = q_i^0$ noktasındadır)

İki tane Lagrange fonksiyonumuz L ve L' olsun. İkisi arasında

$$L' = L + \frac{df}{dt}$$

şeklinde bir ilişki olsun. Burada $f(q, t)$ herhangi bir fonksiyon olabilir.
Bu iki Lagrange fonksiyonunun eylemleri arasındaki ilişkiyi

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L' \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(L + \frac{df}{dt}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt$$

$$= S + f(q(t_2), t_2) - f(q(t_1), t_2)$$

olarak yazabiliriz.
$q(t) = q_0(t) + \delta q(t)$

yazarken, $\delta q(t_2) = \delta q(t_1) = 0$ aldığımız için bir başka deyişle $q(t_1)$ ve $q(t_2)$'yi sabit aldığımız için aradaki fark bir sabittir.

bir sabit kadar farklı iki fonksiyonun ekstremum noktaları aynı olacağı için, L ve L' kullanarak elde edeceğimiz denklemler de aynı olacaktır. Burada yola çıkarak, şu sonuca varabiliriz:

belli bir sistemi tasvir etmek için sonsuz tane Lagrange fonksiyonu vardır. ancak bunlardan herhangi ikisi en fazla bir fonksiyonun zamana göre tam türevi kadar farklı olabilir.

L' ve L'nin aynı denklemleri vereceğini Euler-Lagrange denklemini kullanarak da görebiliriz:

$$\frac{\partial L'}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \left(\frac{\partial}{\partial q}\frac{df}{dt} - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\frac{df}{dt}\right)$$

ikinci satırdaki ifadeye bakalım. Bu ifadede

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}}\ddot{q} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

olarak yazarsak ve $\frac{\partial f}{\partial \dot{q}} = 0$ olduğunu kullanırsak

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\dot{q}\frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial f}{\partial t}\right)-\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\dot{q}\frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

$$=\dot{q}\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial q\partial t}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q}$$

$$=\dot{q}\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial q\partial t}-\left(\dot{q}\frac{\partial}{\partial q}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial f}{\partial q}$$

$$=\dot{q}\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial q\partial t}-\left(\dot{q}\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial q\partial t}\right)$$

$$=0$$

buluruz. Dolayısıyla

$$\frac{\partial L'}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

olur

$\square$

Şimdiye kadar Langranjianı (L'yi) biliyorsak qi'lerin zaman bağımlılığını bize söyleyecek hareket denklemlerini nasıl elde edebileceğimize baktık. Şimdi de L'nin ne olması gerektiğine bakalım.

Doğa yasaları herhangi bir referans sisteminde oldukça karmaşık olabilir, evren çok farklı görünebilir, nesneler kendiliğinden hareket edebilir.

Ancak öyle referans sistemleri vardır ki, doğa yasaları en sade şeklini alır.

Evrenin homojen (hem konum, hem zaman olarak) ve izotropik göründüğü referans sistemlerine eylemsiz referans sistemi diyelim.
Tek bir izole parçacığı eylemsiz bir referans sisteminde inceleyelim. Sistemi kartezyen koordinatlar kullanarak tasvir edelim.
Doğa yasaları zamana göre homojen olduğu için, L, zamana açıkça bağlı olamaz. Konuma göre homojenlikten dolayı da parçacığın konumuna, yani $\vec{r}$'ye bağlı olamaz. L sadece parçacığın hızına bağlı olabilir. İzotropiden dolayı da hızının yönüne değil sadece büyüklüğüne bağlı olabilir:

$$L = L(v^2)$$

Şimdiden parçacığın davranışı ile ilgili bilgiler elde edebiliriz:

Euler-Lagranj denkleminde

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{dL}{dv^2}\frac{\partial v^2}{\partial v_i} = 2v_i L'(v^2)$$

ifadelerini yerleştirirsek

$$0 - \frac{d}{dt}\left[2v_i L'(v^2)\right] = 0$$

$\Rightarrow v_i L'(v^2) = \text{sabit}$

olarak buluruz. Soldaki ifade sadece parçacığın hızına bağlı olduğu için

$\vec{v} = \text{sabit}$

olarak bulunur

Yani, eylemsiz bir referans sisteminde izole bir parçacığın hızı sabittir. (Newton'un birinci yasası)

Şimdi $L(v^2)$ fonksiyonunun ne olduğunu inceleyelim.

Birbirlerine göre sabit $\vec{V}$ hızıyla hareket eden iki referans sistemi düşünelim. İzole, noktasal parçacığın birinci referans sistemindeki hızını $\vec{v}_1$, ikinci referans sistemindeki hızını $\vec{v}_2$ ile gösterecek olursak

$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{V}$ olacaktır.

Bu Galileo dönüşümlerinin bir sonucudur. $\vec{v}_1$ hızı sabitse $\vec{v}_2$ hızı da sabit olacaktır. Birinci referans sistemindeki Lagranj $L(\vec{v}_1^{\,2})$ ise ikinci referans sistemindeki de $L(\vec{v}_2^{\,2})$ olacaktır $\vec{v}_1$ ve $\vec{v}_2$ hızlarının ikisi de sabit veya eşit ivmeli olacaktır, bir başka deyişle ikisi de aynı denklemlerle tasvir edilmelidir. İkisi de aynı denklemlerle tasvir ediliyorsa, iki Lagranjın farkı bir $f(\vec{r}, t)$ fonksiyonunun tam türevi olarak yazılabiliyor olmalıdır:

$\exists f$ $\quad \frac{df}{dt} = L(\vec{v}_2^{\,2}) - L(\vec{v}_1^{\,2})$

$$= L((\vec{v}_1 + \vec{V})^2) - L(\vec{v}_1^{\,2})$$

$$= L(\vec{v}_1^{\,2} + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{V} + \vec{V}^2) - L(\vec{v}_1^{\,2})$$

Bu herhangi iki referans sistemi için geçerli olmalıdır. Birbirlerine göre çok yavaş hareket eden iki referans sistemi düşünelim. O zaman $2\vec{v}_1 \cdot \vec{V} + \vec{V}^2 \ll \vec{v}_1^{\,2}$ olacağından

$$L(\vec{v}_1^{\,2} + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{V} + \vec{V}^2) \simeq L(\vec{v}_1^{\,2}) + L'(\vec{v}_1^{\,2})(2\vec{v}_1 \cdot \vec{V} + \vec{V}^2)$$

olacaktır. Dolayısıyla

$$\frac{df}{dt} = L'(\vec{v}_1^{\,2})(2\vec{v}_1 \cdot \vec{V} + \vec{V}^2)$$

olacak şekilde bir $f(\vec{r}, t)$ fonksiyonu olmalıdır. $\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}}{dt}$ olduğunu kullanırsak, yukarıdaki ifadeyi

$$\frac{df}{dt} = L'(\vec{v}_1^{\,2}) \frac{d}{dt}\left(2\vec{r} \cdot \vec{V} + \vec{V}^2 t\right)$$

olarak yazabiliriz. Böyle bir f fonksiyonu sadece $L'(\vec{v}_1^{\,2})$ bir sabit ise bulunabilir. Bu da bize

$$L(\vec{v}^{\,2}) \propto \vec{v}^{\,2}$$

olduğunu söyler. Orantı sabitini $\frac{1}{2}m$ olarak seçecek olursak

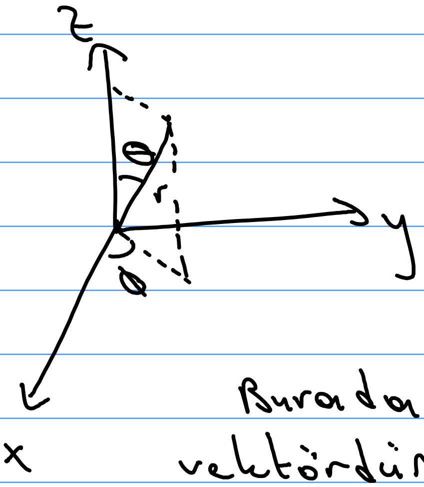
$$L(\vec{v}^{\,2}) = \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2}$$

elde ederiz. (L'ye bir sabit de ekleyebiliriz. Bir sabiti her zaman için bir tam türev şeklinde yazabileceğimizden, bu sabitin önemi yoktur)

Buradaki $m > 0$ olmalıdır. Aksi taktirde, parçacığımız çok büyük hızlarda hareket ederek eylemin değerini azaltabilir. Dolayısıyla S eyleminin bir minimum değeri olamaz.

Örnekler:

Örnek 1 Küresel koordinatlarda serbest parçacık



genelleştirilmiş koordinatlarımızı küresel koordinatlar olarak seçersek, parçacığımızın konumunu

$\vec{r} = r\hat{r}$ olarak yazabiliriz.

Burada $\hat{r}$, $\vec{r}$ doğrultusundaki birim vektördür. Hız vektörünü ise

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt}$$

$$= \dot{r}\hat{r} + \dot{r}\left(\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi}\dot{\phi}\right)$$

$$= \dot{r}\hat{r} + \dot{r}\left(\hat{\theta}\dot{\theta} + \sin\theta\,\hat{\phi}\dot{\phi}\right)$$

olarak buluruz. Burada

$$\hat{\theta} = \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} \quad \text{ve} \quad \hat{\phi} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi}$$

birim vektörleridir. Buradan da serbest parçacığımızın Lagranj fonksiyonunu

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 + r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \, \dot{\phi}^2 \right) \right]$$

olarak elde ederiz. Şimdi koordinatlarımız için hareket denklemlerini elde edelim:

<u>r koordinatı için:</u>

$$0 = \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = mr \left[\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \, \dot{\phi}^2 \right] - \frac{d}{dr} (m\dot{r})$$

$$\Rightarrow m\ddot{r} - mr\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \, \dot{\phi}^2 \right) = 0$$

<u>θ koordinatı için:</u>

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \sin\theta \cos\theta \, \dot{\phi}^2 - \frac{d}{dt}\left(mr^2 \dot{\theta} \right)$$

$$\Rightarrow m \frac{d}{dt} \left(r^2 \dot{\theta} \right) - mr^2 \sin\theta \cos\theta \, \dot{\phi}^2 = 0$$

<u>ϕ koordinatı için:</u>

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0 - \frac{d}{dt} \left(mr^2 \sin^2\theta \, \dot{\phi} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(mr^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}\right) = 0$$

Bu örnekte görülen birkaç noktaya dikkat edelim:

1) x, y, z koordinatlarını kullansaydık elde edeceğimiz

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \qquad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = 0$$

denklemlerine kıyasla, r, θ ve φ için ayrı ayrı denklemler karşımıza çıktı. Genel olarak elde edeceğimiz denklemler seçtiğimiz koordinatlara bağlı çıkacaktır

2) x, y, z koordinatlarını kullansaydık, Lagranj fonksiyonumuz hızlarda ikinci mertebe bir ifade olacak, ve katsayıları da koordinat ve hızlardan bağımsız olacaktır.
Oysa r, θ, φ koordinatlarını kullandığımızda, Lagranj fonksiyonumuz gene hızlarda ikinci mertebe, oysa katsayıları seçtiğimiz koordinatlara bağımlı. Bunun genel bir durum olduğunu şöyle de görebiliriz:
Herhangi bir genelleşmiş koordinat seçtiğinizde, parçacığın konumunu bunların bir fonksiyonu olarak yazarız:

$$\vec{r} = \vec{r}(q)$$

Dolayısıyla parçacığın hızı da

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

olacaktır. Lagranj fonksiyonu da

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \sum_{i,j} \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)$$

$$\equiv \sum \frac{1}{2} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

halini alacaktır. Bu örnekte

$$a_{ij}(q) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}$$

olmak üzere

Buraya kadar tek bir parçacıkla ilgilendik. Birden fazla parçacık içeren sistemlerde Lagranjiyanı elde etmek için, şu şekilde mantık yürütebiliriz: kolaylık olması için sistemimizin iki parçacıktan oluştuğunu düşünelim. Bu parçacıkların Lagranjiyanı L_A ve L_B olsun. Bu iki parçacık birbirinden çok uzaktalarsa, hareket denklemleri de birbirinden bağımsız olacaktır. Bunun için toplam sistemin Lagranjiyanı, bu limitte

$$\lim L = L_A + L_B$$

olmalıdır. Aynı argümanı sistem iki parçacıktan değil de, iki ayrı kısımdan oluştuysa da yapabiliriz.

Sonsuz uzaktaki parçacıklar gibi birbirini etkilemeyen parçacıklardan oluşan bir sistemin Lagranjiyanı

$$L = \sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2}$$

olarak yazılabilir. Daha önce tek bir parçacık için

$$L \propto \vec{v}^{\,2}$$

olduğunu gösterip, orantı sabitini $\frac{1}{2}m$ olarak göstermiştik. L'den elde edilen hareket denklemleri ile αL'den (α herhangi bir sabit olmak üzere) elde edilen hareket denklemleri aynıdır. Dolayısıyla buradaki m'nin bir önemi yoktur

Birden fazla parçacık içeren sistemlerde ise durum biraz değişir. Her ne kadar, L'yi bir sabitle çarpıp m_i değerlerini değiştirebilsek de, L'yi bir sabitle çarptığımızda m_i değerlerinin birbirleri ile oranını değiştiremeyiz. Bu aslında kütle birimini seçmekteki serbestimize denk gelir. Farklı bir kütle birimi seçtiğimizde m_i'ler sayısal olarak değişse de kütlelerin oranları değişmez

Birbirlerini etkilemeyen parçacıklardan oluşan sistemin Lagrange fonksiyonunu

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2}$$

olarak yazmıştık.

Eğer paracıklar birbirleri ile etkileşiyorsa, bunu da bir $U(q)$ fonksiyonu ile Lagranjiyana

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2} - U(q)$$

olarak ekleyebiliriz. Burada ilk terim sistemin kinetik enerjisi, ikinci terim de potansiyel enerjisidir.

Sistemi, A ve B sistemleri olarak iki parça olarak düşünelim Her bir alt sistemin genelleştirilmiş koordinatlarına da sırasıyla q_A ve q_B ile gösterelim. Bu durumda bütün sistemin Lagranj fonksiyonunu

$$L = L_A + L_B - U(q_A, q_B)$$

olarak yazabiliriz. Burada $L_A(q_A, \dot{q}_A, t)$ ve $L_B(q_B, \dot{q}_B, t)$, sırasıyla A ve B sistemlerinin izole oldukları durumdaki Lagranj fonksiyonları ve $U(q_A, q_B)$ ise bu iki sistemin birbirlerine etkilerini gösteren potansiyel enerjidir. Eğer bir şekilde B sisteminin zamanla gelişimi belirlendiyse, $q_B(t)$, o zaman A sistemnin gelişimini belirleyecek Lagranjiyanı

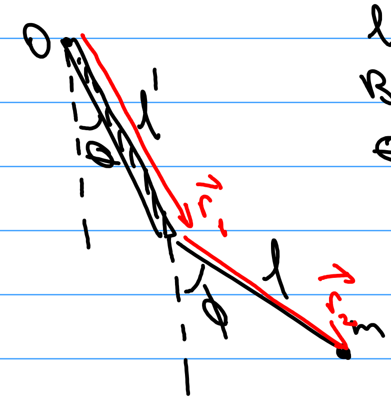
$$L = L_A(q_A, \dot{q}_A, t) + U_A(q_A, q_B(t), t) + L_B(q_B(t), \dot{q}_B(t))$$

olarak elde edilir. Son terim sadece zamana bağlıdır. Dolayısıyla integralinin zamana göre tam türevi olarak yazılabilir. Zamana göre tam türevler hareket denklemlerini etkilemeyeceğinden, A sistemini incelemek için

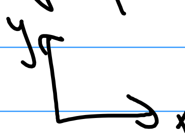
$$L' = L_A(q_A, \dot{q}_A, t) + U(q_A, q_B(t))$$

Lagranj fonksiyonu kullanılarak incelenebilir. Burada $q_B(t)$'yi harici bir alan olarak düşünebiliriz. A sistemi B sisteminin yarattığı harici bir alanda gelişmektedir.

Örnek



l' uzunluğunda sert bir çubuk düşünelim. Bu çubuğun dikeyle yaptığı açı θ olsun. θ açısının zamanla nasıl değiştiği biliniyor olsun ($\theta = \theta(t)$ biliniyor). Bu çubuğun ucuna da l uzunluğunda kütlesiz ve esnek olmayan bir iple m kütlesi bağlanmış olsun. m kütlesinin hareketini verecek olan Lagranj fonksiyonunu bulalım.

Koordinat eksenlerini 

olarak seçelim. Eksenlerin merkezini O noktası olarak alalım. m kütlesinin konumunu, şekilde gösterilen $\vec{r}_1$ ve $\vec{r}_2$ vektörleri cinsinden

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$$

olarak yazabiliriz. $\vec{r}_1$ ve $\vec{r}_2$ vektörlerini ise

$$\vec{r}_1 = l' (-\cos\theta\, \hat{y} + \sin\theta\, \hat{x})$$

$$\vec{r}_2 = l (-\cos\phi\, \hat{y} + \sin\phi\, \hat{x})$$

olarak yazabiliriz. $\vec{r}$'nin zaman göre türevini alarak hız vektörünü

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{d\vec{r}_2}{dt}$$

$$= l' (\sin\theta\, \hat{y} + \cos\theta\, \hat{x})\, \dot{\theta}$$

$$+ l (\sin\phi\, \hat{y} + \cos\phi\, \hat{x})\, \dot{\phi}$$

olarak elde ederiz. Buradan sistemin kinetik enerjisi

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left[l'^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \dot{\phi}^2 + 2 l l' \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\phi - \theta) \right]$$

olarak bulunur.

Sistemin potansiyel enerjisinin

$$U = mgy = mg(-l'\cos\theta - l\cos\phi)$$

olduğunu kullanırsak, m kütlesinin Lagrange fonksiyonu

$$L = \frac{1}{2} m \left[l'^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \dot{\phi}^2 + 2 l l' \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\phi - \theta) \right]$$

$$+ mg (l'\cos\theta + l\cos\phi)]$$

olarak elde edilir. Burada ϕ sistemin genelleştirilmiş koordinatıdır. θ ise ne olduğu problemde verilen zamanın fonksiyonudur.

Şimdi de ϕ'nin zamanla nasıl değiştiğini söyleyecek hareket denklemini bulalım.

$$L = \frac{1}{2}m\left[l'^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 2ll'\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\phi-\theta)\right]$$
$$+ mg\,(l'\cos\theta + l\cos\phi)]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -mll'\dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\phi-\theta) - mgl\sin\phi$$

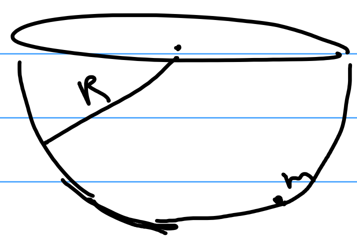
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{d}{dt}m\left[l^2\dot{\phi} + ll'\dot{\theta}\cos(\phi-\theta)\right]$$

$$\Rightarrow l^2\ddot{\phi} + \frac{d}{dt}\left[ll'\dot{\theta}\cos(\phi-\theta)\right] + ll'\dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\phi-\theta) + mgl\sin\phi = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{l^2\ddot{\phi} + ll'\ddot{\theta}\cos(\phi-\theta) + mgl\sin\phi = 0}$$

Örnek

R yarıçaplı bir yarıkürenin iç yüzeyinde serbestçe kayabilen (sürtünmesiz) noktasal m-kütlesinin hareketini inceleyelim.



Daha önce küresel koordinatlarda bir parçacığın kinetik enerji ifadesini

$$T = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)\right]$$

olarak elde etmiştik. Bu problemde $r = R$ sabit olacağından, $\dot{r} = 0$ olacaktır. Dolayısıyla sistemin kinetik enerjisi θ ve ϕ genelleştirilmiş koordinatları cinsinden

$$T = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta)$$

olarak yazılabilir. Sistemin potansiyel enerjisini de

$$U = mg(-R\cos\theta)$$ olarak yazarsak,

Lagrange fonksiyonunu

$$L = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) + mgR\cos\theta$$

olarak buluruz. Şimdi de hareket denklemlerini elde edelim:

<u>ϕ için</u>

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= mR^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi} \end{aligned}\right\} \quad \frac{d}{dt}\left(mR^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\sin^2\theta\, \dot{\phi} = \text{sabit}}$$

<u>θ için</u>

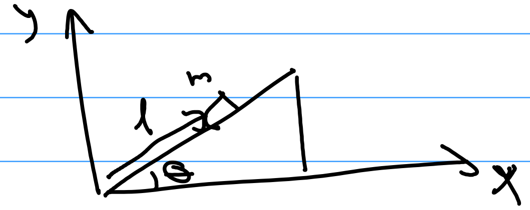
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mR^2 \sin\theta \cos\theta\, \dot{\phi}^2 - mgR\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{mR^2 \ddot{\theta} - mR^2 \sin\theta \cos\theta\, \dot{\phi}^2 + mgR\sin\theta = 0}$$

Son bir örnek olarak da eğik düzlemdeki parçacığın hareketini inceleyelim

Örnek



Eğer l genelleştirilmiş koordinatını kullanacak olursak, bu oldukça basit bir problemdir:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \dot{l}^2 \\ U &= mgl\sin\theta \end{aligned}\right\} L = \frac{1}{2} m \dot{l}^2 - mgl\sin\theta$$

olacağından, hareket denklemi

$$-mg\cos\theta - \frac{d}{dt}\left(m\dot{l}\right) = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{l} = -mg\cos\theta$$

olarak bulunur.

Bu problemi bir de parçacığın x ve y koordinatlarını kullanarak çözelim.

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ U &= mgy \end{aligned}\right\} L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

olacaktır.

Ancak bu Lagranj fonksiyonundan Euler-Lagrange denklemlerini kullanarak doğrudan hareket denklemlerini elde etmeye çalışırsak doğru sonucu bulamayız. Bunun sebebi x ve y koordinatlarının sağladığı bir koşul olması ve bu koşulun henüz yukarıdaki Lagranj fonksiyonunda göz önüne alınmamasıdır.

Bu koşulu nasıl göz önüne alabileceğimizi görmek için, S eyleminin minimumunu nasıl bulduğumuza geri dönelim. Minimumdan çok küçük bir sapma için eylemdeki değişimi (bu problem için)

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] \delta x + \left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right] \delta y \right\}$$

olarak yazabiliriz. Eğer x ve y'yi bağımsız olarak değiştirebilseydik, δx ve δy'nin katsayılarını birbirinden bağımsız olarak sıfıra eşitleyebilirdik. Oysa bu problemde x ve y birbirine

$$\frac{y}{x} = \tan\theta$$

olacak şekilde bağlı olduğundan x'teki her değişim için y'yi belirli bir şekilde değiştirmemiz gerekir. Dolayısıyla δx ve δy'de birbirlerinden bağımsız değillerdir.

Bu problemi çözebilmek için

$$L' = L + \mu\left(\frac{y}{x} - \tan\theta\right)$$

olarak yeni bir L' tanımlayalım. Burada μ Lagrang sabiti dediğimiz bir sabittir. μ'nün katsayısı, x ve y koyduğumuz koşulu sağladığında, sıfırdır ve L' Lagranj fonksiyonu ile L Lagranj fonksiyonu aynıdır.

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L' \, dt$$

eyleminin değişimini

$$\delta S' = \int dt \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \mu \frac{y}{x^2} \right] \delta x + \left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \frac{\mu}{x} \right] \delta y \right\}$$

olarak yazabiliriz. Minimum olma koşulu $\delta S' = 0$'ın bize ne gibi denklemler verdiğine bakalım. Öncelikle, δx ve δy'nin birbirine bağımlı olması durumu burada da devam etmektedir. Ancak μ tamamen bizim belirleyebileceğimiz bir sabittir. μ sabitini öyle belirleyebiliriz ki δx veya δy'nin katsayısını sıfır yapabiliriz. Birisinin katsayısını sıfır yaptıktan sonra diğerini istediğimiz gibi seçebileceğimizden, her koşulda

$$\delta S' = 0$$

denkleminin de sağlanabilmesi için, diğerinin de katsayısı sıfır olmalıdır.

Dolayısıyla x, y ve μ bilinmeyenleri için elimizde 3 denklemimiz vardır:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \mu \frac{y}{x^2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \frac{\mu}{x} = 0$$

$$\frac{y}{x} - \tan\theta = 0$$

Yukarıdaki L Lagranj fonksiyonunu da kullanırsak, bu denklemleri

$$-m\ddot{x} - \mu \frac{y}{x^2} = 0$$

$$-mg - m\ddot{y} + \frac{\mu}{x} = 0$$

$$y = x\tan\theta$$

olarak yazabiliriz. 3. denklemi 1. ve 2. denklemlerde yerleştirirsek

$$m\ddot{x} + \frac{\mu}{x}\tan\theta = 0$$

$$m\ddot{x}\tan\theta + mg - \frac{\mu}{x} = 0$$

elde ederiz. Birinci denklemi $-\tan\theta$ ile çarpıp, ikinci denkleme eklersek

$$-\frac{\mu}{x}\tan^2\theta - \frac{\mu}{x} + mg = 0$$

$$\Rightarrow mg = \frac{\mu}{x}(1+\tan^2\theta) = \frac{\mu}{x\cos^2\theta}$$

$$\boxed{\mu = mgx\cos^2\theta}$$ olarak buluruz.

x denkleminde yerleştirirsek

$$0 = m\ddot{x} + \frac{\mu}{x}\tan\theta = m\ddot{x} + mg\cos\theta\sin\theta$$

$$m\ddot{x} = -mg\cos\theta\sin\theta$$

olarak buluruz. Bu ise eğik düzlemde kayan parçacığın konumunun x bileşeninin sağladığı denklemdir, μ ifadesine dönecek olursak

$$\mu = (mg\cos\theta)(x\cos\theta)$$

$mg\cos\theta$ yüzeyin kütlemize uyguladığı normal kuvvettir. Lagranj çarpanları her zaman, normal kuvvetle orantılı olacaktır. Bu kuvvetler koşulların sürekli sağlanması için ortaya çıkacak kuvvetlerdir. μ'lere genel olarak koşul kuvvetleri denir.

Yukarıda gördüğümüz yöntemi şu şekilde genelleştirebiliriz: q ve $\dot{q}$'lar genelleştirilmiş koordinat ve hızlarımız olsun. Bu koordinatlar cinsinden Lagranj fonksiyonumuz $L(q, \dot{q}, t)$ olsun. Bu koordinatların sağladığı $f_i(q,\dot{q}) = 0$ koşulları olsun. Her koşul için μ_i Lagranj çarpanları cinsinden yeni bir Lagranj fonksiyonunu

$$L'(q, \dot{q}, \mu) = L + \sum_i \mu_i f_i$$

olarak tanımlayalım. Hareket denklemlerini ve bilinmeyen μ_i Lagranj çarpanlarını, L''den q'lar için elde edeceğimiz Euler-Lagranj denklemlerinden ve $f_i = 0$ koşullarından bulabiliriz