cinsinden Lagranj fonksiyonumuz $L(q,\dot{q},t)$ olsun. Bu koordinatların sağladığı $f_i(q,\dot{q})=0$ koşulları olsun. Her koşul için μ_i Lagranj çarpanları cinsinden yeni bir Lagranj fonksiyonunu

$$L'(q,\dot{q},\mu) = L + \sum_i \mu_i f_i$$

olarak tanımlayalım. Hareket denklemlerini ve bilinmeyen μ_i Lagranj çarpanlarını, L''den q'lar için elde edeceğimiz Euler-Lagranj denklemlerinden ve $f_i=0$ koşullarından bulabiliriz

Korunum Yasaları

Bu bölümde Lagranj fonksiyonunun genel özelliklerini ve simetrilerini kullanarak korunan nicelikleri inceleyeceğiz. Daha önceki bölümlerde de evrenin homojen ve izotropik olmasından yola çıkarak doğa yasaları ile ilgili genel sonuçlar elde etmiştik.

s serbestlik derecesine sahip bir sistemde, q_i $(i=1,\ldots,s)$ koordinatları için hareket denklemleri ikinci derece denklemlerdir. Bu denklemlerin çözümleri $2s$ integrasyon sabiti içerir. Bu integrasyon sabitlerinden bir tanesi başlangıç zamanıdır. Dolayısıyla

$$q_i = q_i(t-t_0, C_1, C_2, .., C_{2s-1})$$
$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(t-t_0, C_1, C_2, .., C_{2s-1})$$

olarak yazabiliriz. Bu denklemleri C_j'leri q_i ve $\dot{q}_i$ cinsinden ifade etmek için kullanabiliriz. C_i'ler sabit olduklarından, her ne kadar zamana bağlı koordinat ve hızlar cinsinden ifade edilmiş olsalar da, zamanla değişmezler. Böylece sistemin korunan 2s-1 niceliğini belirlemiş oluruz.

Her ne kadar sistemin 2s-1 korunan niceliği olduğunu göstermiş olsak da bunların hepsi "ilginç" değildir. Bu bölümde, sistemin toplanan korunan niceliklerini inceleyeceğiz. Bu nicelikler sistemin her parçası için tanımlanabilen ve topları sistemin tamamının korunan özelliğini veren niceliklerdir.

Enerjinin Korunumu

Doğa yasaları zamandan bağımsızdır: bugünkü doğa yasaları neyse, başka zamanda da aynı olacaktır. Dolayısıyla Lagranj fonksiyonunun zamana açık bağlılığı olamaz. O yüzden Lagranj fonksiyonunun zamana göre türevini

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\dot{q}_i$$

olarak yazabiliriz. Lagranj fonksiyonunun zaman bağlılığı olmadığı için $\frac{\partial L}{\partial t}$ terimi yukarıda yoktur. Euler-Lagranj denklemlerini kullanırsak, yukarıdaki ifadede

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

eşitliğini kullanabiliriz:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\dot{q}_i$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)$$

İki terimi de aynı tarafa toplarsak

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = 0$$

elde ederiz. Parantez içerisindeki ifade sistemin enerjisi olarak tanımlanır:

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$$

Her ne kadar enerji zamana bağlı olan konum ve hızların bir fonksiyonu olsa da

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

olduğundan enerji zamanla değişmez.

Eğer sistemimiz etkileşmeyen iki parçadan oluşuyorsa, sistemin Lagranj fonksiyonunun parçaların Lagranj fonksiyonlarının toplamıdır.

$$L = L_A + L_B$$

Enerji ifadesi Lagranj fonksiyonuna doğrusal olarak bağlı olduğu için, sistemin enerjisi de

$$E = E_A + E_B$$

olacaktır.

Lagranj fonksiyonununun

$$L = \sum \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - U$$

olduğunu kullanırsak

$$E = \sum \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + U$$

olduğu görülebilir. Bu da U fonksiyonuna başından beri potansiyel enerji dememizin sebebidir.

Doğrusal Momentumun Korunumu

Doğa yasaları ötelemelerden de bağımsız olmalıdır. Bir başka deyişle, bütün parçacıkların konumlarında

$$\vec{r}_i \longrightarrow \vec{r}_i + \vec{\varepsilon}$$

yazdığımızda, doğa yasaları değişmemelidir. Dolayısıyla Lagranj fonksiyonu da değişmemelidir:

$$0 = \delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \delta \vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \delta \vec{v}_i$$

Buradaki vektöre göre türevi

$$\frac{\partial}{\partial \vec{v}} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial v_x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial v_y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial v_z}$$

olarak anlamalıyız.

Ötelemeler, hızları değiştirmeyeceğinden $\delta \vec{v} = 0$ olacaktır. Öteleme altında konumların değişimi ise

$$\delta \vec{r}_i = \vec{\varepsilon}$$

olur. Dolayısıyla öteleme altında Lagranj fonksiyonunun değişimini

$$0 = \delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \vec{\varepsilon}$$

olarak yazabiliriz. Euler-Lagranj denklemlerini kullanırsak bu ifadeyi

$$0 = \delta L = \sum_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\cdot\vec{\varepsilon}$$

$$= \vec{\varepsilon}\cdot\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right)$$

olarak yazabiliriz. Her olası $\vec{\varepsilon}$ için sağ taraf sıfır olması gerektiğinden,

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right) = 0$$

buluruz. Bu ise

$$\vec{P} \equiv \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}$$

olarak tanımladığımız sistemin doğrusal momentumunun korunduğu anlamına gelir.

Tek bir parçacığın momentumunu

$$\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}$$

olarak tanımlarsak

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$$

olur. Buradan da görüneceği gibi, sistemin doğrusal momentumu, bileşenlerinin doğrusal momentumlarının toplamıdır. Enerjiden farklı olarak, bu toplam parçacıklar etkileşiyorsalar bile geçerlidir.

Lagranj fonksiyonunun genel olarak

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2} - U(\vec{r}_i)$$

olarak yazıldığını kullanırsak, tek bir parçacığın doğrusal momentumunu

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$$

olarak buluruz.

Yukarıdaki çıkarımda

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

bulmuştuk.

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \equiv \vec{F}_i$$

olduğunu kullanırsak, kapalı bir sistemde

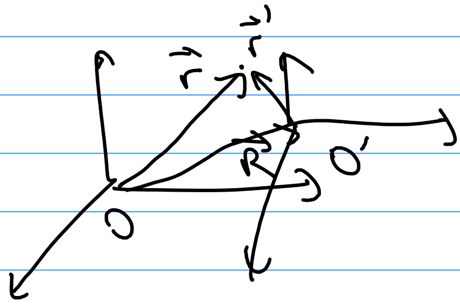
$$\sum \vec{F}_i = 0$$

elde ederiz. Sadece iki parçacıktan oluşan bir sistem için bu

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

olarak da yazılabilir. Sistem kapalı olduğundan, birinci parçacığa etki eden kuvvet ikinci parçacıktan dolayı, ikinci parçacığa etki eden kuvvet de birinci parçacıktan dolayıdır. Dolayısıyla yukarıdaki ifade Newton'un etki-tepki yasasından başka birşey değildir.

Son olarak, doğrusal momentumun farklı bir referans sistemine dönüşüm özelliklerine bakalım. İki tane referans sistemi düşünelim:



Burada $\vec{r}$ parçacığımızın O referans sistemine göre konumunu, $\vec{r}'$ O' referans sistemine göre konumunu ve $\vec{R}$ ise O' referans sisteminin orijininin O referans sistemine göre konumunu temsil etmektedir.

Yukarıdaki şekilden de göründüğü üzere

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$$

yazabiliriz.

İki tarafın da zamana göre türevi

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$$

verir. Burada $\vec{v}$ ($\vec{v}'$) parçacığımızın O (O') referans sistemine göre hızı, $\vec{V}$ ise O' referans sisteminin O referans sistemine göre hızıdır. Bu hızdaki dönüşümü momentum ifadesine yerleştirirsek

$$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i$$

$$= \sum m_i (\vec{v}_i' + \vec{V})$$

$$= \sum m_i \vec{v}_i' + \sum m_i \vec{V}$$

$$\vec{P} = \vec{P}' + M\vec{V}$$

olarak buluruz. Burada $\vec{P}'$ sistemin O' referans sistemindeki momentumudur, $M = \sum m_i$ ise sistemin toplam kütlesidir.

Özel bir referans sistemi

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{M}$$

olan referans sistemidir. Bu referans sisteminde, sistemimizin doğrusal momentumu sıfırdır. Bu sebeple bu referans sistemine sistemimizin durağan olduğu referans sistemi denir.

$$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

ifadesini $\vec{V}$ ifadesinde yerleştirirsek

$$\vec{V} = \frac{1}{M}\frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{d}{dt}\vec{R}$$

elde ederiz. Son eşitlikte

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$$

olarak tanımladık $\vec{R}$ noktası sistemin kütle merkezi olarak adlandırılır. Sistemin toplam doğrusal momentumu sanki sistemin kütle merkezinde M kütleli tek birparçacık içinmiş gibi de düşünülebilir.

Yörüngesel Momentum

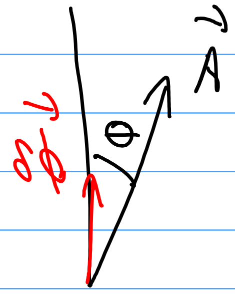
Doğa yasaları ötelemeler dışında dönmeler altında da değişmez kalmalıdır. Dolayısıyla dönmeler altında da

$$0 = \delta L = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\delta\vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\delta\dot{\vec{r}}_i$$

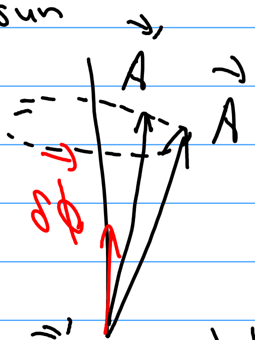
olmalıdır. Bu ifadeyi hesaplayabilmek için $\vec{r}_i$ ve $\vec{v}_i$ vektörlerinin dönmeler altında nasıl değiştiğini incelemeliyiz.

Sistemin bir $\hat{n}$ ekseni etrafında $\delta\phi$

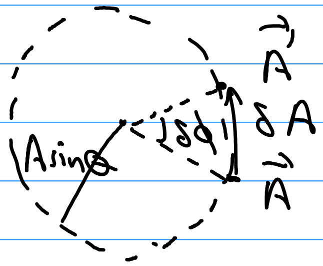
kadar döndürüldüğünü düşünelim.
($\hat{n}$ yönü, sağ el kuralıyla belirlenir)
$\delta\vec{\phi} = \delta\phi\,\hat{n}$
vektörünü de tanımlayalım. Herhangi bir $\vec{A}$ vektörünü düşünelim. Dönme ekseni ve $\vec{A}$ vektörü aşağıdaki gibi gösterilmiş olsun.



Dönmeden sonra $\vec{A}$ vektörü $\vec{A}'$ vektörüne dönüşsün



$\vec{A}$ ve $\vec{A}'$ vektörlerinin uçları yarıçapı $A\sin\theta$ olan bir çember üzerindedir



Dolayısıyla $\delta\vec{A}$ vektörünün büyüklüğü

$$A \sin\theta \, \delta\phi = |\delta\vec{\phi} \times \vec{A}|$$

kadardır Yukarıdaki çizimler incelenirse $\delta\vec{A}$ vektörü ile $\delta\vec{\phi} \times \vec{A}$ vektörünün aynı yönde olduğu da görülebilir. $\delta\vec{A}$ ve $\delta\vec{\phi} \times \vec{A}$ vektörleri aynı yönde aynı büyüklükte vektörler olduğu için aynı vektörlerdir:

$$\delta\vec{A} = \delta\vec{\phi} \times \vec{A}$$

Bu eşitlik her $\vec{A}$ vektörü için geçerlidir:

$$\delta\vec{r}_i = \delta\vec{\phi} \times \vec{r}_i$$

$$\delta\vec{V}_i = \delta\vec{\phi} \times \vec{V}_i$$

Yukarıdaki δL ifadesine yerleştirirsek

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot (\delta\vec{\phi} \times \vec{r}_i) + \frac{\partial L}{\partial \vec{V}_i} \cdot \left(\delta\vec{\phi} \times \frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)$$

elde ederiz Euler-Lagrange denklemlerini de kullanırsak bu eşitliği

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{V}_i}\right) \cdot (\delta\vec{\phi} \times \vec{r}_i) + \frac{\partial L}{\partial \vec{V}_i} \cdot \frac{d}{dt}(\delta\vec{\phi} \times \vec{r}_i)$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \cdot (\delta\vec{\phi} \times \vec{r}_i)\right]$$

olarak yazabiliriz.

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$$

özelliğini de kullanırsak

$\delta\vec{\phi} \cdot \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i \times \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right) = 0$ elde ederiz Bu eşitliğin her $\delta\vec{\phi}$ için geçerli olabilmesi için

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i \times \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right) = 0$$

olmalıdır Buradan da

$$\vec{M} \equiv \sum_i \vec{r}_i \times \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}$$

olarak tanımlanan açısal momentumun korunduğunu görürüz.

$$\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = m\vec{v}_i$$

tanımını da kullanırsak, açısal momentun

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

halini alır. Açık bir şekilde sistemin açısal momentumu parçalarının açısal momentumlarının toplamına eşittir.

Şimdi de açısal momentumun bir referans sisteminden diğer referans sistemine geçerken nasıl değiştiğine bakalım. O ve O' referans sistemlerindeki konum ve hız vektörleri arasındaki bağıntıyı,

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i{}' + \vec{R}$$
$$\vec{v}_i = \vec{v}_i{}' + \vec{V}$$

olarak yazalım. Bu durumda açısal momentum

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$= \sum_i (\vec{r}_i{}' + \vec{R}) \times m_i (\vec{v}_i{}' + \vec{V})$$

$$= \sum_i \vec{r}_i{}' \times m_i \vec{v}_i{}' + \left(\sum_i m_i \vec{r}_i{}'\right) \times \vec{V}$$
$$+ \vec{R} \times \left(\sum_i m_i \vec{v}_i{}'\right) + \left(\sum m_i\right) \vec{R} \times \vec{V}$$

$$\vec{M} = \vec{M}' + \vec{R} \times \vec{P}'$$
$$+ \left(\sum_i m_i \vec{r}_i{}'\right) \times \vec{V} + \vec{R} \times \vec{P}$$

olacaktır. İki özel O' referans sistemine ayrıca bakalım.

i) $\vec{V}=0$ olan, ama merkezi $\vec{R}$ noktasında (sabit) olan referans sistemi

Bu durumda $\vec{M} = \vec{M}' + \vec{R}\times\vec{P}$ ($\vec{P}'=\vec{P}$ olduğundan) olacaktır. Bir başka deyişle, eğer sistemin durağan olduğu referans sisteminde değilsen, sistemin açısal momentumu, seçilen orijine göre değişir. Bu bağımlılık açısal momentumun korunuyor olduğu gerçeğini değiştirmez.

ii) O' referans sistemi, sistemimizin durağan olduğu referans sistemi ise

$$\vec{P}'=0 \quad \text{ve} \quad \sum m_i \vec{r}_i' = 0$$

olacaktır. İkinci eşitlik referans sistemimizin orijinini kütle merkezi aldığımız için geçerlidir. Bu durumda

$$\vec{M} = \vec{M}' + \vec{R}\times\vec{P}$$

Bu denklemin bize söylediği, herhangi bir sistemin açısal momentumunu, kütle merkezine göre açısal momentum (bir nevi iç açısal momentum) ve kütle merkezini M kütleli ve $\vec{P}$ doğrusal momentumlu noktasal bir parçacık olarak düşünürsek bu parçacığın açısal momentumu olarak ikiye ayırabileceğimizdir.

Mekanik Benzerlik

Bu bölümde, bir sistemin ölçekleme altındaki davranışından sistemle ilgili genel sonuçlar elde etmeye çalışacağız.

Öncelikle kinetik enerjiye bir bakalım.

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2}$$

Eğer $\vec{r}_i \Rightarrow \alpha \vec{r}_i$ ve $t \Rightarrow \beta t$ dönüşümlerini yaparsak, hızlar

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\alpha}{\beta} \vec{v}_i$$

şeklinde dönüşeceğinden

$$T \rightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 T$$

olarak dönüşecektir.

Potansiyel enerjinin de k. mertebeden bir homojen fonksiyon olduğunu bir başka deyişle

$$U(\alpha \vec{r}_i) = \alpha^k U(\vec{r}_i)$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda bu dönüşüm altında

$$L = T - U \longrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 T - \alpha^k U$$

olarak dönüşecektir. Eğer β'yı

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \alpha^k \Rightarrow \beta = \alpha^{1-k/2}$$

olarak seçersek,

$$L \rightarrow \alpha^k L$$

olarak dönüşür. Ölçeklenmiş konum vektörlerini ve zamanı $\vec{r}_i' = \alpha \vec{r}_i$ ve $t' = \beta t$ olarak tanımlayıp, yeni Lagranjiyanımıza da L' dersek, bu durumda

$$L'(\vec{r}\,', \vec{v}\,', t) = \alpha^k L(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

olacaktır. İki Lagranj fonksiyonu sadece bir sabit çarpanla birbirinden farklılaştığı için, aynı hareket denklemlerini verecektir. Eğer $\vec{A}_i(t)$, orijinal sistemimizin bir çözümü ise

$$\vec{r}_i = \vec{A}_i(t)$$

ölçeklenmiş sistemimizin bir çözümü de

$$\vec{r}_i' = \vec{A}_i(t')$$

olacaktır. Bir başka deyişle

$$\alpha \vec{r}_i = \vec{A}_i(\beta t)$$

$$\vec{r}_i = \frac{1}{\alpha} \vec{A}_i(\beta t)$$

olacaktır. Dolayısıyla sistemimizin bir çözümünü biliyorsak, başka çözümlerini de $\beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}}$

olarak seçerek

$$\vec{r}_i = \frac{1}{\alpha} \vec{A}_i(\beta t)$$

olarak elde edebiliriz. Bunun olası sonuçlarından biri şudur:

$\vec{A}_i(t)$, l boyutunda periyodu T olan bir çözüm olsun. O zaman

$$l' = \frac{l}{\alpha} \quad \text{ve} \quad T' = \frac{T}{\beta} \quad \text{olan}$$

başka periyodik çözümler de vardır. β ve α arasındaki ilişkiyi kullanırsak bu iki çözümün periyot ve boyutları arasında

$$\frac{T}{T'} = \left(\frac{l}{l'}\right)^{1-k/2}$$

bağıntısı olması gerekir. İki özel örnekte bu bağıntıyı inceleyelim:

i) Sistemin potansiyeli harmonik salınıcı potansiyeli olsun. Bu durumda $k=2$'dir ve $\frac{T}{T'}=1$ elde edilir

Bunun bize söylediği, sistemin periyodunun, hareketin boyundan bağımsız olduğudur.

ii) Coulomb tipi potansiyel.

Bu durumda $k=-1$ dir Dolayısıyla

$$\frac{T}{T'}=\left(\frac{l}{l'}\right)^{3/2} \Rightarrow \frac{T^2}{l^3}=\text{sabit}$$

olacaktır. Gezegenlerin hareketinde bunu düşündüğümüzde bu Kepler'in üçüncü yasasıdır.

Virial Theorem

Bu bölümde kinetik ve potansiyel enerjinin homojen fonksiyonlar olmasının bir başka sonucunu inceleyeceğiz. Öncelikle homojen fonksiyonların bir özelliğini ispatlayalım.

$$f(\lambda x_i) = \lambda^k f(x_i)$$

olsun. iki tarafın da λ'ya göre türevini alıp $\lambda = 1$ yapalım:

$$\frac{d f(\lambda x_i)}{d\lambda} = k\lambda^{k-1} f(x_i)$$

$$\frac{\partial f(\lambda x_i)}{\partial(\lambda x_i)} x_i = k\lambda^{k-1} f(x_i)$$

$\lambda = 1$ alırsak

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} x_i = k f(x_i)$$

Bunu kinetik enerji için kullanacak olursak

$$\sum \frac{\partial T}{\partial \vec{v}_i} \cdot \vec{v}_i = \sum \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \cdot \vec{v}_i$$

$$2T = \sum \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$2T = \sum \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \cdot \vec{r}_i\right) - \sum \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right) \cdot \vec{r}_i$$

$$2T = \sum \frac{d}{dt}(\vec{p}_i \cdot \vec{r}_i) - \sum \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \vec{r}_i$$

$$2T = \sum \frac{d}{dt}(\vec{p}_i \cdot \vec{r}_i) + \sum \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \cdot \vec{r}_i$$

$$2T = \sum \frac{d}{dt}(\vec{p}_i \cdot \vec{r}_i) + kU$$

elde ederiz. Zamana bağlı herhangi bir fonksiyonun ortalamasını

$$\bar{f} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t)\, dt$$

olarak tanımlayalım. Yukarıdaki eşitliğin iki tarafının ortalamasını alırsak

$$2\overline{T} = k\overline{U} + \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{d}{dt}(\vec{p}_i \cdot \vec{r}_i)\, dt$$

elde ederiz. Sonlu bir hacimde hareket eden bir sistem düşünürsek, yukarıdaki ifadedeki integral sonlu bir sayı olacaktır. Dolayısıyla τ'ya bölüp $\tau \to \infty$ limitini alırsak sıfır verecektir. Buradan ~~da~~ böyle bir sistemin

$2\overline{T} = k\overline{U}$ eşitliğini sağlaması gerektiği görülür.

Enerjinin korunduğu bir sistemde

$$E = \overline{E} = \overline{T} + \overline{U} = \left(1 + \frac{k}{2}\right)\overline{U} = \left(1 + \frac{2}{k}\right)\overline{T}$$

olduğu kullanılırsa

$$\bar{U} = \frac{2}{2+k} E$$

ve

$$\bar{T} = \frac{k}{2+k} E$$

elde edilir. Harmonik salınıcı için $(k=2)$

$$\bar{U} = \bar{T} = \frac{E}{2}$$

elde edilir. Coulomb problemi için $(k=-\frac{1}{2})$ ise

$$\bar{T} = -\frac{E}{3} \qquad \bar{U} = \frac{4}{3} E$$

bulunur $T > 0$ olduğundan, Coulomb probleminde sonlu hacimde hareket eden sistemler sadece enerjisi negatif olan sistemlerdir.