Denklemlerin çözümleri

Bu bölümde bazı basit sistemlerde çözümlerin nasıl elde edilebileceğine bakacağız. Öncelikle tek serbestlik derecesi olan bir sistem düşünelim.

Böyle bir sistemin en genel Lagranj fonksiyonu

$$L = \frac{1}{2} a(q)\dot{q}^2 - U(q)$$

şeklinde yazılabilir. Eğer q kartezyen bir koordinatsa (x diyelim)

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x)$$

halini alır. $x(t)$'in zaman bağımlılığını bulabilmek için hareket denklemi yerine korunum yasalarını da kullanabiliriz. Enerji ifadesini kullanırsak

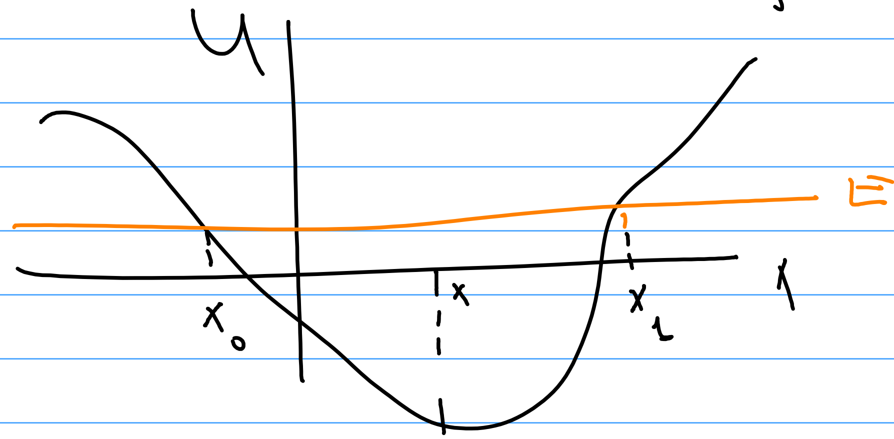
$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \mp \sqrt{\frac{2}{m}} (E - U)^{1/2}$$

olacaktır. Bu denklemi

$$\mp \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{(E-U)^{1/2}} = dt$$

olarak da yazabiliriz. Buradaki i belirsizliğini şöyle anlayabiliriz:



Sistemin potansiyel enerjisi ve toplam enerjisi şekilde gösterildiği gibi olsun. Bu durumda sistem x_0 ve x_1 arasında periyodik bir hareket yapacaktır. Sistem x_0 noktasından, x_1 notasına giderken x noktasından geçerken hızı $v>0$ olacaktır. Oysa x_1 noktasından x_0'a giderken x'i geçerken hızı $v<0$ olacaktır. Bunun bize söylediği parçacığın konumunu biliyorsak hızının büyüklüğünü enerji ve potansiyel enerjiyi kullanarak belirleyebiliyor olsak da hızının yönünü belirlememiz yeterli değildir. Ama, hareket denklemlerini çözebilmek için başlangıç koşullarının biliniyor olması gerekir. Başlangıç koşullarından başlayarak hareketi takip ederek parçacık belli bir zamanda belli bir konuma geldiğindeki hızının yönünü belirleyebiliriz.

Yukarıdaki gibi periyodik hareketlerin önemli bir parametresi, hareketin periyodudur.

Hareketin periyodu, parçacığın mesela x_0'dan çıkıp, x_1'e kadar gidip, sonra tekrar x_0'a dönmesi için geçen süredir.
x_0'dan x_1'e gidene kadar geçen süre ile x_1'den x_0'a gidene kadar geçen süre aynı ve periyodun yarısına eşittir.

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E-U}}$$

ifadesinin iki tarafını da integralini alırsak

$$\int_0^{T/2} dt = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E-U}}$$

elde ederiz. Burada $t=0$ anını, parçacığın x_0'da olduğu an olarak tanımladık. T ise hareketin periyodudur. Sol taraftaki integrali alırsak, periyot için

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{E-U}}$$

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{E-U}}$$

elde ederiz.

Buradaki x_0 ve x_1 dönme noktaları

$$E = U(x_0) = U(x_1)$$

denklemlerini sağlar. Yukarıdaki periyot ifadesinde $\mp$ belirsizliği yoktur. Bunun sebebi, parçacık x_0'dan x_1 noktasına ilerlerken hızı her zaman için $v>0$'dır.

Böylece herhangi bir potansiyel için hem parçacığın konumunun zamanla nasıl değiştiğini hem de periyodik hareketler için periyodunu nasıl hesaplayabileceğimizi gördük.

İki parçacıktan oluşan sistemler

Şimdi iki parçacıktan oluşan kapalı bir sistem düşünelim. Böyle bir sistemin Lagranj fonksiyonu

$$L = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^{\,2} - U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Doğa yasalarının öteleme simetrisi olduğundan dolayı, potansiyel sadece $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$'ye bağlı olabilir. $\vec{r}_1$ ve $\vec{r}_2$ koordinatları yerine iki yeni koordinat tanımlayalım:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{ve} \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Burada, $\vec{R}$ kütle merkezinin konumu, $\vec{r}$ ise parçacıkların birbirlerine göre konumudur.

Bu denklemleri $\vec{r}_1$ ve $\vec{r}_2$ için çözersek

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \qquad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$$

olacaktır. $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$ ve $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ olarak tanımlarsak

$$\vec{v}_1 = \vec{V} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{V} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}$$

elde ederiz. Bu ifadeleri Lagranj fonksiyonumuzda yerine yerleştirirsek

$$L = \frac{1}{2}m_1\left(\vec{V} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\vec{V} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}\right)^2 - U(\vec{r})$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\vec{v}^2 - U(\vec{r})$$

$$\equiv \frac{1}{2}M\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2 - U(\vec{r})$$

elde ederiz. Burada $M = m_1+m_2$ sistemin toplam kütlesi, $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ ise

sistemin indirgenmiş kütlesidir.
Yukarıdaki Lagranj fonksiyonu

Yukarıdaki Lagranj fonksiyonu, kütlesi M olan ve serbest hareket eden bir parçacıkla, kütlesi μ olan ve harici $U(\vec{r})$ potansiyeli etkisi altında hareket eden birbirinden bağımsız iki parçacıktan oluşan sistemin Lagranj fonksiyonu ile özdeştir.
$\vec{R}$ için olan hareket denkleminin çözümü

$$\vec{R}(t) = \vec{V}(t-t_0) + \vec{R}(t_0)$$

olarak yazılabilir. $\vec{r}(t)$ de

$$L' = \frac{1}{2}\mu \vec{v}^2 - U(\vec{r})$$

Lagranj fonksiyonu kullanılarak çözülürse, $\vec{r}_1$ ve $\vec{r}_2$ fonksiyonlarını $\vec{r}$ ve $\vec{R}$ için olan çözümler cinsinden elde edebiliriz.

Böylece bir bakıma, iki parçacıktan oluşan sistemi, serbest hareket eden kütle merkezinin hareketi ve harici $U(\vec{r})$ potansiyelindeki μ kütleli parçacık gibi davranan bağıl konumun($\vec{r}$) hareketine bölmüş olduk. Bu tek parçacığın hareketini çözersek, iki parçacıklı sistemi çözmüş oluruz.

Merkezi Potansiyel Altında Hareket

Doğa yasaları dönmeler altında simetrik olduğundan dolayı, pek çok durumda potansiyel sadece $\vec{r}$'nin büyüklüğüne $r = |\vec{r}|$ bağlıdır. Bu durumda

$$L = \frac{1}{2}\mu \vec{v}^2 - U(r)$$

olacaktır. (Bundan böyle L' yerine L'yi kullanacağız)
Sistemin dönme simetrisinden dolayı, açısal momentum

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$$

korunacaktır. $\vec{r}$ vektörü $\vec{M}$'ye her zaman dik olacağından hareket M'ye dik olan düzlemle sınırlıdır, bir başka deyişle iki boyutludur. z eksenini $\vec{M}$'nin yönünde alırsak

$$\vec{M} = M\hat{z} \quad (M: \text{açısal momentumun büyüklüğü})$$

küresel koordinatlarda kinetik enerjiyi

$$T = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right)$$

olarak yazabiliriz. Bu durumda Lagranj fonksiyonu da

$$L = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - U(r)$$

olacaktır. ϕ'ye karşılık gelen genelleştirilmiş momentum

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2 \dot{\phi} = M$$

açısal momentuma eşittir. Tek serbestlik derecesi içeren sistemde olduğu gibi sistemin enerjisini inceleyelim.

$$E = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U(r)$$

açısal momentumun ifadesini kullanırsak

$$\dot{\phi} = \frac{M}{\mu r^2}$$

yazabiliriz. Böylece enerji ifadesi

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\left(\frac{M}{\mu r^2}\right)^2 + U(r)$$

$$= \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{etk}(r)$$

$$U_{etk}(r) = \frac{M^2}{2\mu r^2} + U(r)$$ olmak üzere

halini alır. Etkin potansiyeldeki $\frac{M^2}{2\mu r^2}$'ye merkezkaç bariyeri denir. Eğer $U(r)$, r sıfıra yaklaşırken yeterince hızlı $-\infty$'a gitmiyorsa, merkezkaç bariyeri parçacığın $r=0$ noktasına erişmesine engel olacaktır

$$0 \leq \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 = E - U_{etk}$$

olduğundan, her r için

$$r^2\left(E-\frac{M^2}{2\mu r^2}-U(r)\right)\geq 0$$

olmalıdır. $r\to 0$ limitini alırsak, parçacığın $r=0$ noktasına ulaşabilmesi için

$$0\leq \lim_{r\to 0} r^2\left(E-\frac{M^2}{2\mu r^2}-U(r)\right)$$

$$=-\frac{M^2}{2\mu}-\lim_{r\to 0} r^2 U(r)$$

olmalıdır. Veya

$$\lim_{r\to 0} r^2 U(r)\leq -\frac{M^2}{2\mu}$$

olmalıdır.

$$E=\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+U_{etk}$$

ifadesini $\dot{r}$ için çözersek

$$\frac{dr}{dt}=\dot{r}=\mp\sqrt{\frac{2}{\mu}}\left(E-U_{etk}\right)^{1/2}$$

elde ederiz. Bu denklemi

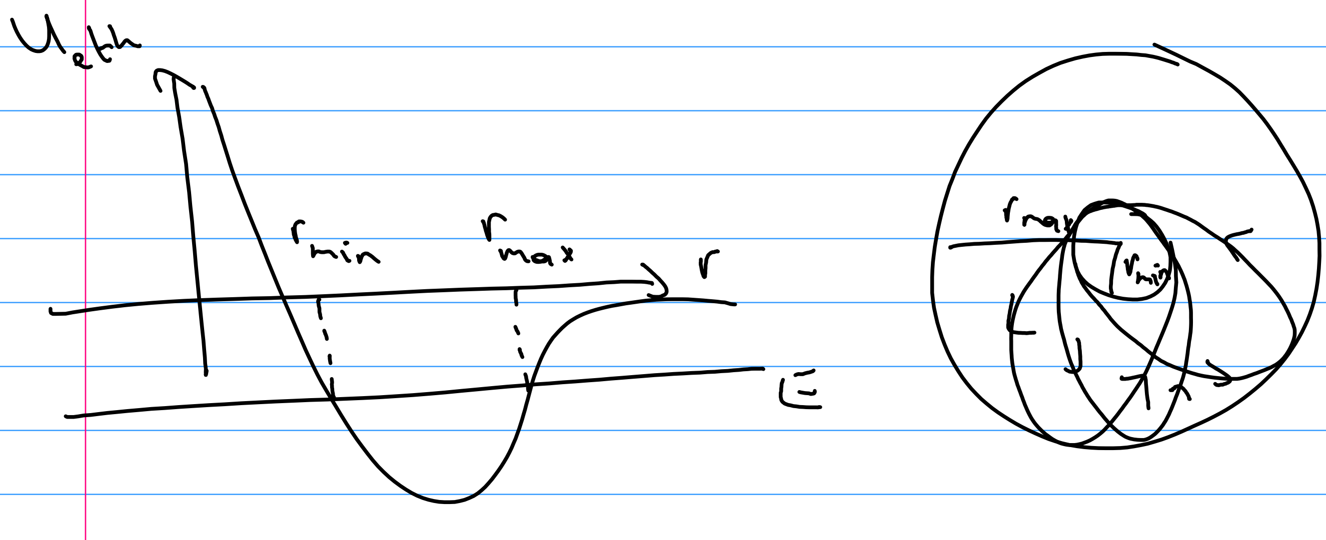
$$= \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{dr}{(E - U_{etk})^{1/2}} = dt$$

olarak da yazabiliriz.

$$E = U_{etk}(r)$$

eşitliğini sağlayan r değerlerinde $\dot{r} = 0$ olacaktır. Her ne kadar dr/dt denklemi tek serbestlik derecesine sahip olan sistemdeki denkleme benzese de, bu problemde iki serbestlik derecesi olduğu unutulmamalıdır: r ve ϕ. $\dot{r} = 0$ olsa da $\dot{\phi} = M/2\mu r^2 \neq 0$ olacağından parçacığın hızı sıfır olmayacaktır. $\dot{r} = 0$ olduğunda parçacık $r = 0$ noktasına en yakın veya en uzak olduğu konumdadır.

Eğer $U_{etk}(r) = E$ denkleminin iki çözümü varsa, sistem bu yarıçaplara sahip iki çemberin arasında hareket edecektir.



Yörüngenin denklerini bulmak için r ile ϕ arasında bir ilişki bulmalıyız

$$\dot{\phi} = \frac{M}{\mu r^2} \Rightarrow d\phi = \frac{M}{\mu r^2} dt$$

Yukarıdaki dt ile dr arasındaki ilişkiyi veren denklemi kullanırsak

$$d\phi = \mp \frac{M}{\mu r^2} \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{dr}{(E - U_{etk})^{1/2}}$$

$$d\phi = \mp \frac{M}{\sqrt{2\mu}} \frac{dr/r^2}{(E - U_{etk})^{1/2}}$$

olarak buluruz. Bu ifadenin iki tarafının integralini almak bize yörünge denklemini verir.

Önemli problemlerden birisi de yörüngenin kendisini tekrarlayıp tekrarlamadığıdır. Bunun için parçacık r_{min}'den r_{max}'a gidene kadar r = 0 merkezi etrafında ne kadar döndüğüne bakalım. Bu açıya $\Delta\phi$ dersek, yukarıdaki ifadeden

$$\Delta\phi = \int d\phi = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{M}{\sqrt{2\mu}} \frac{dr/r^2}{(E - U_{etk})^{1/2}}$$

elde ederiz. Parçacık tekrar r_{min} mesafesine geldiğinde $2\Delta\phi$ kadar dönecektir. Yörüngenin kapalı olması için parçacık $r_{min} \to r_{max} \to r_{min}$ dönüşünü n kere yaptığında merkez etrafında 2π'nin tam katı kadar dönmüş olmalıdır bu tam sayıya m dersek

$$(2\Delta\phi)n = (2\pi)m$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\phi}{\pi} = \frac{m}{n}$$

Bir başka deyişle eğer $\Delta\phi/\pi$ bir rasyonel sayı ise, parçacığın yörüngesi kapalıdır.

Kepler Problemi

Bir önceki bölümde incelediğimiz yöntemi gezegenlerin hareketine uygulayalım. Bir gezegenin hissettiği potansiyeli

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

olarak yazabiliriz. çekici bir kuvvet için $\alpha > 0$, itici bir kuvvet için $\alpha < 0$ olacaktır

$$U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

ifadesini kullanarak $U_{eff}(r) = E$

denklemini çözelim:

$$\frac{M^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r} - E = 0$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 + 4E\, M^2/2\mu}}{M^2/\mu}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu\alpha}{M^2} \mp \frac{\mu}{M^2}\sqrt{\alpha^2 + \frac{2EM^2}{\mu}}$$

$$= \frac{\mu\alpha}{M^2}\left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{\mu\alpha^2}}\right)$$

olarak bulunur $E>0$ için, yukarıdaki çözümlerden biri negatiftir. $r>0$ olacağından bu gerçek bir çözüm değildir, dolayısıyla

$$U_{etk}(r) = E > 0$$

denkleminin tek bir çözümü vardır. Parçacığın yörüngesi sonsuzdan gelir belli bir mesafeye ($U_{etk} = E$ denkleminin çözümü) kadar yaklaşıp, sonra tekrar sonsuza gidecektir.

$E<0$ için $U_{etk} = E$ denkleminin sıfırdan büyük iki çözümü olacaktır. Gezegen bu iki mesafe arasında hareket edecektir.

$t=0$ anını parçacığın $r=r_{min}$ olduğu an olarak alalım. x eksenini de bu noktadan geçen eksen olarak alalım: $\phi(t=0)=0$. Parçacık belli bir süre sonra ϕ açısına ve r mesafesine gelecektir:

$$\int_0^{\phi} d\phi = \int_{r_{min}}^{r} \frac{M}{\sqrt{2\mu}} \frac{dr/r^2}{\left[E-\left(-\frac{\alpha}{r}+\frac{M^2}{2\mu r^2}\right)\right]^{1/2}}$$

Paydayı sadeleştirelim:

$$E+\frac{\alpha}{r}-\frac{M^2}{2\mu r^2} = E-\frac{M^2}{2\mu}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{2\mu\alpha}{M^2}\frac{1}{r}\right)$$

$$= E-\frac{M^2}{2\mu}\left[\left(\frac{1}{r}-\frac{\mu\alpha}{M^2}\right)^2-\left(\frac{\mu\alpha}{M^2}\right)^2\right]$$

$$= E+\frac{\mu\alpha^2}{2M^2}-\frac{M^2}{2\mu}\left(\frac{1}{r}-\frac{\mu\alpha}{M^2}\right)^2$$

Bu ifadeden yola çıkarak yukarıdaki integralde değişken değiştirelim:

$$\frac{1}{r}-\frac{\mu\alpha}{M^2} = \sqrt{\frac{2\mu}{M^2}}\left(E+\frac{\mu\alpha^2}{2M^2}\right)^{1/2}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{r^2} = \sqrt{\frac{2\mu}{M^2}}\left(E+\frac{\mu\alpha^2}{2M^2}\right)^{1/2}\sin\theta\, d\theta$$

integralde yerine yerleştirirsek

$$\phi = \int \frac{\cancel{\frac{M}{\sqrt{2\mu}}}\cancel{\sqrt{\frac{2\mu}{M^2}}}\cancel{\left(E+\frac{\mu\alpha^2}{2M^2}\right)^{1/2}}\cancel{\sin}\Theta\, d\Theta}{\cancel{\left(E+\frac{\mu\alpha^2}{2M^2}\right)^{1/2}}\left(\cancel{1-\cos^2\Theta}\right)}$$

$$\phi = \Theta = \cos^{-1}\left[\frac{\frac{M}{\sqrt{2\mu}}\left(\frac{1}{r}-\frac{\mu\alpha}{M^2}\right)}{\left(E+\frac{\mu\alpha^2}{2M^2}\right)^{1/2}}\right]\Bigg|_{r=r_{min}}^{r}$$

$$\phi = \cos^{-1}\left[\frac{\frac{M}{\sqrt{2\mu}}\left(\frac{1}{r}-\frac{\mu\alpha}{M^2}\right)}{\left(E+\frac{\mu\alpha^2}{2M^2}\right)^{1/2}}\right]$$

$$- \cos^{-1}\left[\frac{\frac{M}{\sqrt{2\mu}}\left(\frac{1}{r_{min}}-\frac{\mu\alpha}{M^2}\right)}{\left(E+\frac{\mu\alpha^2}{2M^2}\right)^{1/2}}\right]$$

Daha önceki r_{min} çözümünü kullanırsak

$$\frac{M}{\sqrt{2\mu}}\left(\frac{1}{r_{min}}-\frac{\mu\alpha}{M^2}\right) = \sqrt{E+\frac{\mu\alpha^2}{2M^2}}$$

olduğunu görürüz. Dolayısıyla ϕ ifadesindeki

ikinci terim $\cos^{-1}(1) = 0$ olur.
Kalan ifadeden

$$\cos\phi = \frac{\frac{M}{\sqrt{2\mu}}\left(\frac{1}{r} - \frac{\mu\alpha}{M^2}\right)}{\left(E + \frac{\mu\alpha^2}{2M^2}\right)^{1/2}}$$

$$\cos\phi = \frac{\cancel{\sqrt{\frac{\mu}{2}}\frac{\alpha}{M}}\left(\frac{M^2}{\mu\alpha}\frac{1}{r} - 1\right)}{\cancel{\sqrt{\frac{\mu}{2}}\frac{\alpha}{M}}\left(1 + \frac{2M^2E}{\mu\alpha^2}\right)^{1/2}}$$

$$p = \frac{M^2}{\mu\alpha} \quad \text{ve} \quad \varepsilon = \left(1 + \frac{2M^2E}{\mu\alpha^2}\right)^{1/2}$$

olarak tanımlarsak, yukarıdaki denklemi

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon\cos\phi$$

olarak da tanımlayabiliriz, eğer $\varepsilon < 1$ (bir başka deyişle $E < 0$) ise

$$|\varepsilon\cos\phi| < |\cos\phi| < 1$$

ve $1 + \varepsilon\cos\phi > 0 \Rightarrow r < A$

olacaktır.

Dolayısıyla parçacığın yörüngesi sonlu olacaktır.

$\varepsilon > 1$ (yada $E > 0$) olduğu durumda da $\cos\phi_0 = -1/\varepsilon$ doğrultusunda parçacığımız sonsuza gidecektir.

$\varepsilon < 1$ durumunda r_{min}

$$\frac{p}{r_{min}} = 1+\varepsilon \Rightarrow r_{min} = \frac{p}{1+\varepsilon}$$

r_{max} ise

$$\frac{p}{r_{max}} = 1-\varepsilon \Rightarrow r_{max} = \frac{p}{1-\varepsilon}$$

olacaktır. Yörüngenin şeklini bir de kartezyen koordinatlarda çıkaralım. herhangi bir (r,ϕ) noktasındayken parçacığımızın kartezyen koordinatları (x,y)'yi

$$x = r\cos\phi = \frac{p\cos\phi}{1+\varepsilon\cos\phi} = \frac{p}{\varepsilon} - \frac{p/\varepsilon}{1+\varepsilon\cos\phi}$$

$$y = r\sin\phi = \frac{p\sin\phi}{1+\varepsilon\cos\phi}$$

olarak yazabiliriz. x denkleminden

$$\frac{1}{1+\varepsilon\cos\phi} = \frac{\varepsilon}{p}\left(\frac{p}{\varepsilon} - x\right) = \left(1 - \frac{\varepsilon x}{p}\right)$$

$$\cos\phi = \frac{x/p}{1-\frac{\varepsilon x}{p}}$$

elde ederiz. y denkleminden de

$$\sin\phi = \frac{y/p}{1-\frac{\varepsilon x}{p}}$$

elde ederiz. Bu ifadeleri

$$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$$

eşitliğinde yerleştirirsek kartezyan koordinatlar için

$$\frac{(x/p)^2}{\left(1-\frac{\varepsilon x}{p}\right)^2} + \frac{(y/p)^2}{\left(1-\frac{\varepsilon x}{p}\right)^2} = 1$$

denklemini buluruz. Bu denklemi biraz sadeleştirelim

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{p^2} = \left(1-\frac{\varepsilon x}{p}\right)^2 = 1 - \frac{2\varepsilon x}{p} + \frac{\varepsilon^2 x^2}{p^2}$$

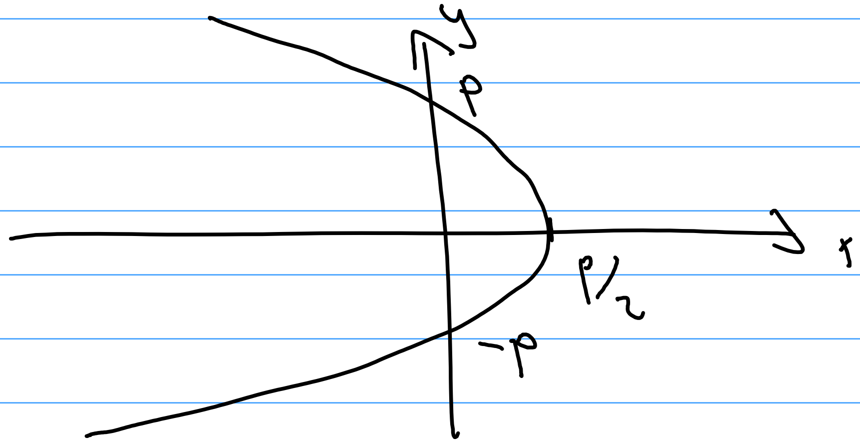
$$\frac{x^2}{p^2}(1-\varepsilon^2) + \frac{2\varepsilon x}{p} + \frac{y^2}{p^2} = 1$$

Buluruz. $\varepsilon = 1$ $(E=0)$ durumunda, bu denkler

$$\frac{2x}{p} + \frac{y^2}{p^2} = 1 \Rightarrow x = \frac{p}{2} - \frac{y^2}{2p}$$

halini alır. Bu bir parabol denklemidir.

parçacığın yörüngesi



şeklindedir. $\varepsilon \neq 1$ için,

$$\frac{x^2}{p^2}\left(1-\varepsilon^2\right) + \frac{2\varepsilon x}{p} + \frac{y^2}{p^2} = 1$$

denklemini

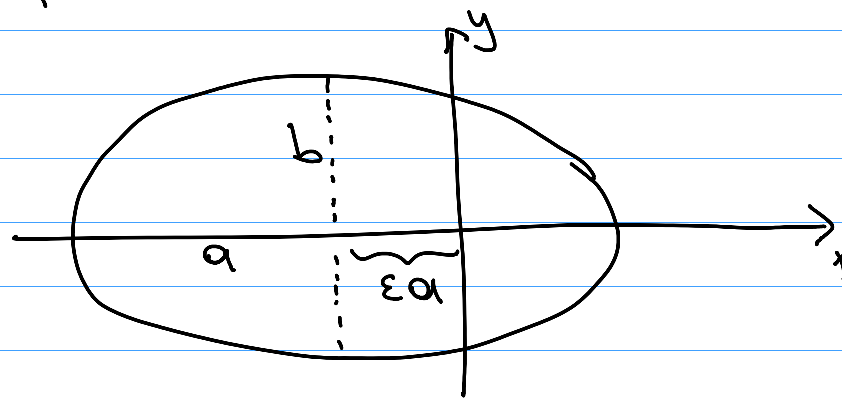
$$\frac{1-\varepsilon^2}{p^2}\left[x^2 + \frac{2\varepsilon p}{1-\varepsilon^2}x\right] + \frac{y^2}{p^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1-\varepsilon^2}{p^2}\left(x + \frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2}\right)^2 - \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} + \frac{y^2}{p^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1-\varepsilon^2}{p^2}\left(x + \frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2}\right)^2 + \frac{y^2}{p^2} = \frac{1}{1-\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(x + \frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2}\right)^2}{\left(\frac{p}{1-\varepsilon^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{p^2}{1-\varepsilon^2}\right)} = 1$$

$\varepsilon < 1$ için sol taraftaki iki terim de pozitiftir. Bu ifade bir parabolün ifadesidir.



$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

ε ve p'nin

$$p = \frac{M^2}{\mu\alpha} \quad \text{ve} \quad \varepsilon = \left(1 + \frac{2M^2 E}{\mu\alpha^2}\right)^{1/2}$$

tanımlarını kullanırsak

$$a = \frac{\cancel{M^2}}{\cancel{\mu\alpha}} \frac{1}{\frac{-2\cancel{M^2} E}{\cancel{\mu}\alpha^2}} = -\frac{\alpha}{2E} \Rightarrow \boxed{E = -\frac{\alpha}{2a}}$$

$$b = \frac{M^2}{\mu\alpha} \frac{1}{\sqrt{-\frac{2\cancel{M^2} E}{\mu\cancel{\alpha^2}}}} = \frac{M}{\mu\sqrt{-2E}}$$

Yukarıdan da görüneceği üzere, parçacığın enerjisi yörüngenin yarıbüyük (a) eksenini belirler. Açısal momentumu ise yarı küçük eksenini (b) belirler.

ε un reel sayı olması için

$$1 + \frac{2M^2 E}{\mu\alpha^2} \geq 0$$

olmalıdır $E<0$ olmasını da kullanırsak

$$M^2 \leq \frac{\mu\alpha^2}{2|E|}$$

buluruz. $M^2 = \frac{\mu\alpha^2}{2|E|}$ değeri için

$$\frac{p}{r} = 1 \Rightarrow r = p$$

olacağında yörünge bir dairedir. Dairesel yörüngeler, belli bir enerjideki yörüngeler arasında en büyük açısal momentuma sahip yörüngelerdir.

son olarak da

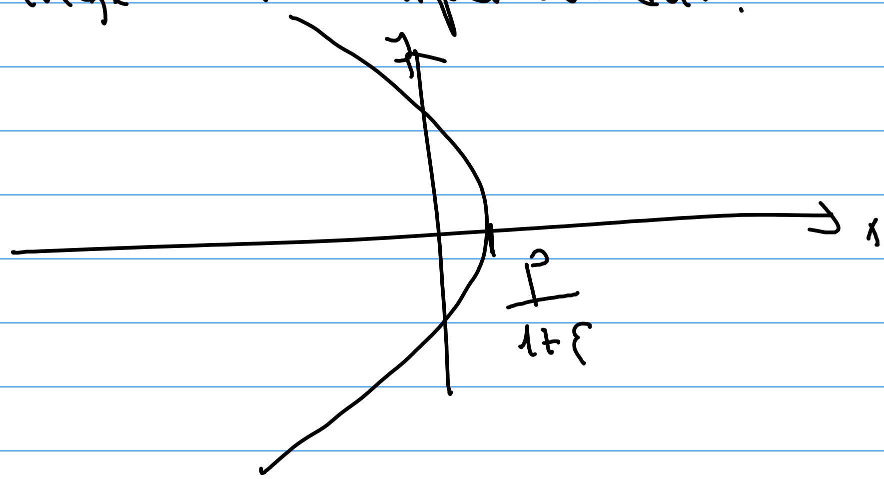
$$\frac{\left(x + \frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2}\right)^2}{\left(\frac{p}{1-\varepsilon^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{p^2}{1-\varepsilon^2}\right)} = 1$$

denkleminin $\varepsilon > 0$ $(E > 0)$ için olan şekline bakalım Bu durumda yukarıdaki denklemi

$$\frac{\left(x+\frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2}\right)^2}{\left(\frac{p}{1-\varepsilon^2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{p^2}{\varepsilon^2-1}\right)}=1$$

$$\Rightarrow \frac{\left(x-\frac{\varepsilon p}{\varepsilon^2-1}\right)^2}{\left(\frac{p}{1-\varepsilon^2}\right)^2}=1+\frac{y^2}{\left(\frac{p^2}{\varepsilon^2-1}\right)}$$

olarak da yazabiliriz. Bu durumda da yörünge bir hiperboldür.



Son olarak da sadece $U=-\frac{\alpha}{r}$ potansiyeli için korunan bir nicelikten bahsedelim:

$$\vec{v}\times\vec{M}-\alpha\hat{r}$$

ifadesinin korunduğunu görelim. Bu ifadenin zamana göre türevini alırsak

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\times\vec{M}-\alpha\frac{\vec{r}}{r}\right)=\dot{\vec{v}}\times\vec{M}-\alpha\frac{\dot{\vec{r}}}{r}+\alpha\vec{r}\,\frac{\dot{r}}{r^2}$$

Bu ifadede

$$\dot{\vec{v}}=\frac{1}{m}\dot{\vec{p}}=-\frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}=-\frac{1}{m}\,\alpha\frac{\vec{r}}{r^3}$$

ve

$$\dot{r}=\dot{\vec{r}}\cdot\hat{r}=\dot{\vec{r}}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

eşitliklerini kullanırsak

$$=-\frac{\alpha}{m}\frac{\vec{r}}{r^3}\times(\vec{r}\times\vec{p})-\alpha\frac{\vec{v}}{r}+\alpha\vec{r}\,\frac{(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r})}{r^3}$$

$$=\frac{\alpha}{r^3}\left[-\vec{r}\times(\vec{r}\times\vec{v})-\vec{v}\,r^2+\vec{r}\,(\vec{v}\cdot\vec{r})\right]$$

$$=\frac{\alpha}{r^3}\left\{-\left[\vec{r}\,\cancel{(\vec{r}\cdot\vec{v})}-\cancel{\vec{v}\,r^2}\right]-\cancel{\vec{v}\,r^2}+\vec{r}\,\cancel{(\vec{v}\cdot\vec{r})}\right\}$$

$$=0$$

olduğunu görürüz. Bu korunum yasasını daha önceden olduğu gibi simetrileri kullanarak elde etmedik. Bu korunum yasasının çıkarımını daha sonra göreceğiz.