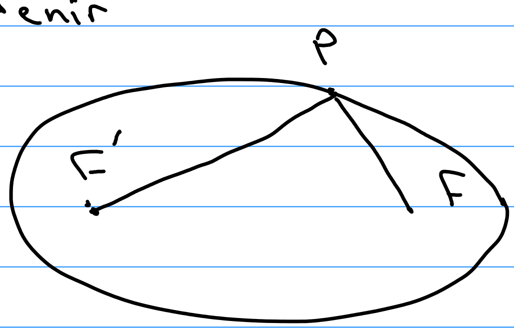
Yörüngenin Elips olduğunun alternatif gösterimi (Feynman)

Bu bölümde kitabın biraz dışına çıkacağız ve Feynman tarafından kalkülüs kullanmadan gezegenlerin yörüngelerinin elips olduğunun nasıl gösterildiğine bakacağız.
Öncelikle elips dediğimiz şeklin nasıl bir şekil olduğuna bakalım. Temel olarak elips, F ve F' ile göstereceğimiz iki noktaya uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların bütünüdür.
Bir elipsi şöyle çizebiliriz: iki F ve F' noktası seçelim. Bir ip alıp, uç noktalarını F ve F' noktalarında sabitleyelim. Bir kalem ile bu ipi gerelim ve ip gergin olacak şekilde bir kağıt üzerine bir eğri çizecek olursak, elde edeceğimiz şekil elipstir. F ve F' noktalarına elipsin odağı denir



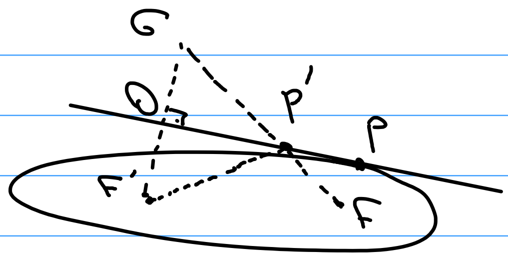
Elipsin üzerindeki bütün P noktaları için $K = |FP| + |F'P|$ toplamı sabittir.

Eğer herhangi bir Q noktası için
$|FQ| + |F'Q| < K$ ise, Q noktası elipsin içindedir,
$|FQ| + |F'Q| > K$ ise, Q noktası elipsin dışındadır.

Elipsin üzerinde bir P noktası alalım. Bu noktadan elipse bir teğet çizelim. Bu teğet elipsi sadece tek bir noktada keser.
Bu teğete F′ noktasından geçen bir dikme çizelim. Bu dikmenin teğeti kestiği noktaya uzaklığı bu noktanın F′′ne uzaklığına eşit olan ama teğetin diğer tarafında olan noktaya G diyelim. Bir başka deyişle G noktası, F′ noktasının teğete göre ayna yansımasıdır

Şimdi şunu ispatlayalım: G noktasını F′ye birleştiren doğru, P noktasından geçer.

İspatı yapabilmek için bunun böyle olmadığını varsayalım. G noktasını F′ye bağlayan doğru, teğeti P dışındaki bir P′ noktasında kessin.



P′ noktası elipsin dışında olduğu için
$|F'P'|+|FP'| > |F'P|+|FP'|$
olmalıdır.

$|F'O|=|OG|$ olduğundan, $F'OP'$ ve GOP' üçgenlerinin iki kenarları ve arasındaki açı eşittir. Bir başka deyişle, bu iki üçgen özdeştir. Dolayısıyla $|F'P'|=|GP'|$'dür. Aslında bu eşitlik teğet üzerindeki her nokta için geçerlidir. P noktası için de $|F'P|=|GP|$ yazılabilir. GFP üçgenini düşünelim. Bu üçgen için üçgen eşitsizliğini yazabiliriz:

$|FG| < |FP| + |PG|$

F, P' ve G noktaları bir doğru üzerinde olduğundan $|GF| = |FP'| + |P'G|$ olacaktır.

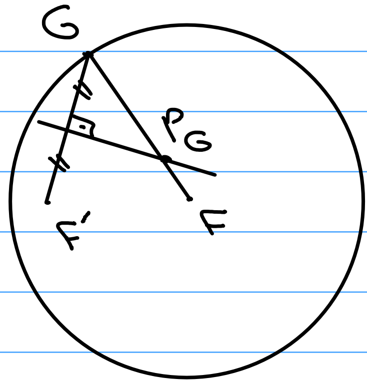
$|PG| = |PF'|$ ve $|P'G| = |P'F'|$ eşitliklerini de kullanırsak yukarıdaki eşitsizlikten

$$|FP'| + |F'P'| < |FP| + |F'P|$$

elde ederiz. Bu ise bize P' noktasının elipsin içinde olması gerektiğini gösterir. Oysa, P' noktası elipsin dışındadır. Böylece baştaki doğru kabul ettiğimiz varsayım (GF doğrusunun teğeti P noktasında kesmediği varsayımı) bizi bir çelişkiye götürmüş oldu. Dolayısıyla bu varsayım doğru olamaz.

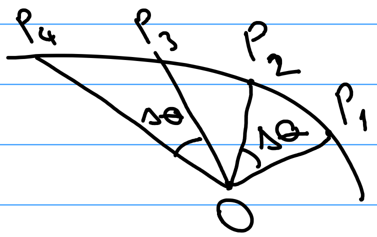
Elips üzerindeki bütün P noktaları için $|FP| + |F'P| = |FP| + |PG| = |FG|$ uzunluğu aynıdır. Dolayısıyla G noktaları bir çember üzerinde yer alır. Böylece bir elips çizmek için bir yöntem daha bulduk:

i) F noktası merkezli bir çember çizin.
ii) çemberin içinde bir F' noktası alın
iii) çemberin üzerindeki her G noktası için $F'G$ doğru parçasın ortasına çizeceğiniz dik doğrunun FG doğrusunu kestiği noktaya P_G diyelim.
iv) P_G noktalarının tamamı, bize bir elips verecektir.

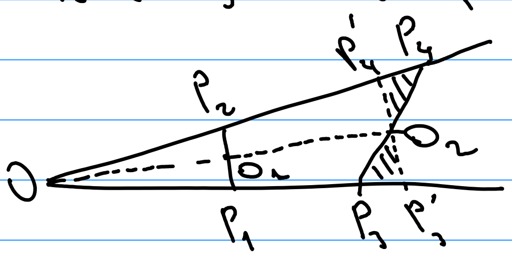


Bu şekilde seçtiğimiz noktaların bize elips vermesinin sebebi $|F'P_G| = |GP_G|$ olması, dolayısıyla $|F'P_G| + |FP_G| = |GP_G| + |FP_G| = |FG|$ uzunluğunun bütün G noktaları için aynı olmasıdır.

Şimdi gezegenlerin yörüngesi problemine dönelim. Gezegenin yörüngesi üzerinde (birbirine çok yakın) P_1, P_2 ve P_3, P_4 noktaları alalım. Öyle ki gezegenin P_1 ve P_2'deki konum vektörlerinin birbirleri ile yaptığı açı ile P_3 ve P_4 noktalarındaki konum vektörlerinin birbirleri ile yaptığı açı aynı olsun.



P_1 ve P_2 noktaları birbirlerine çok yakın olduklarından $\Delta\theta$ açısı çok küçük bir açı olacaktır (şekilde açı çok büyük çizilmiştir). Dolayısıyla P_1P_2 yörünge parçası (P_3P_4 yörünge parçası da) neredeyse düz bir çizgi olacaktır. OP_1P_2 üçgeni ile OP_3P_4 üçgenlerini tepe açıları üst üste gelecek şekilde çizelim.



P_1P_2'ye paralel öyle bir $P_3'P_4'$ çizgisi çizebiliriz ki karalanmış üçgenlerin alanları dolayısıyla da OP_3P_4 üçgeni ve $OP_3'P_4'$ üçgenlerinin alanları eşit olsun.

$|OO_1| = r_1$ ve $|OO_2| = r_2$ olarak tanımlayalım, OP_1P_2 üçgeni ile $OP_3'P_4'$ üçgenleri benzer olduğundan

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{OP_1P_2 \text{ üçgeninin alanı}}{OP_3'P_4' \text{ üçgeninin alanı}} = \frac{OP_1P_2 \text{ üçgeninin alanı}}{OP_3P_4 \text{ üçgeninin alanı}} = \frac{A_1}{A_2}$$

olacaktır. P_1P_2 yörünge parçası, çok kısa olduğundan, gezegenin güneşten uzaklığındaki değişim ihmal edilebilir, ve bu sırada güneşten uzaklığı hep r_1 olarak alınabilir. Benzer şekilde P_3P_4 yörünge parçası üzerindeyken de gezegenin güneşten uzaklığı r_2 olarak alınabilir.

Gezegenin hissettiği kuvvet güneşinden uzaklığının karesi ile ters orantılıdır:

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{F_2}{F_1}$$

burada F_1 (F_2) gezegen P_1P_2 (P_3P_4) yolunu kat ederken hissettiği kuvvetin büyüklüğüdür. Yönü ise güneşe doğrudur. Gezegenin ivmesi hissettiği kuvvetle orantılı olduğundan

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{A_1}{A_2}$$

elde ederiz. Gezegenin konum vektörü eşit zamanlarda eşit alanlar taradığından, P_1'den P_2'ye kadar giderken geçen süre (Δt_1) ile P_3'den P_4'e giderken geçen süre (Δt_2)

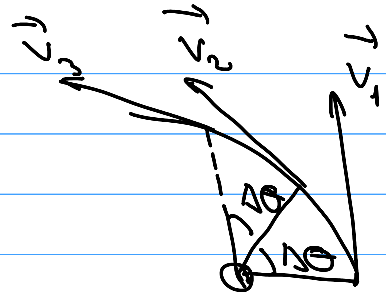
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}$$
eşitliğini sağlar. Yukarıdaki denklemle birleştirirsek
$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \Rightarrow a_2 \Delta t_2 = a_1 \Delta t_1$$
elde ederiz. $a_1 \Delta t_1$, gezegen P_1'den P_2'ye giderken hızındaki değişimin $(\Delta \vec{V}_1)$ büyüklüğüdür. Aynı şekilde $a_2 \Delta t_2$ de gezegen P_3'den P_4'e giderken hızındaki değişimin $(\Delta \vec{V}_2)$ büyüklüğüdür.

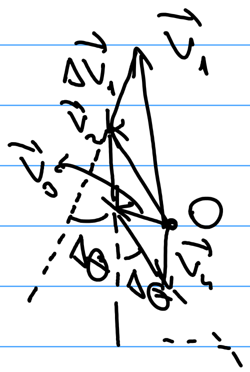
$$|\Delta \vec{V}_1| = |\Delta \vec{V}_2| \equiv \Delta V$$
Hızlardaki değişim her zaman güneşe doğrudur.

Gezegenin güneşin etrafında bir tam dönüşünü N eşit açı gören parçaya bölelim:

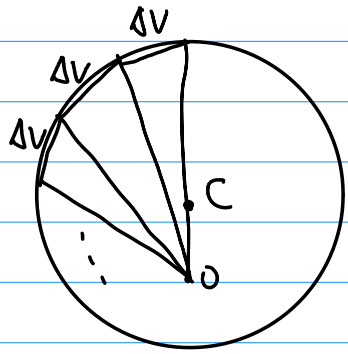
$$\Delta \Theta = \frac{2\pi}{N}$$

her parçadaki hız değişiminin büyüklüğü aynı olacaktır. hız değişimleri her zaman için güneşe doğru olduğundan, arka arkaya gelen iki $\Delta\Theta$'lık dönmelerdeki hız değişim vektörleri arasındaki açı da $\Delta\Theta$ olacaktır. Şimdi her $\Delta\Theta$'lık dönme sonucundaki gezegenin hız vektörlerini çizelim. Çizmeye gezegenin güneşe en yakın olduğu andan başlayalım. Bu andaki hızını yukarı doğru gösterelim

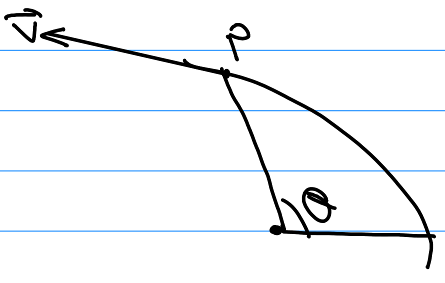


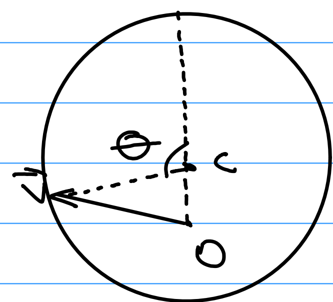


$\Delta\vec{V}$ vektörleri dış açıları $\Delta\theta$ olan düzgün bir N-gen oluşturacaktır. Düzgün bir N-gen'i her zaman için köşeleri bir çember üzerine gelecek şekilde çizebiliriz. Hız vektörlerinin başlangıç noktası O bu çemberin merkezinde değildir



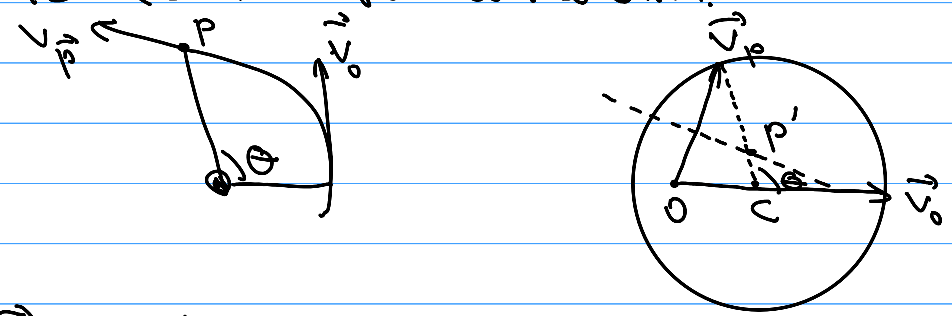
$N \to \infty$ limitini aldığımızda bu N-gen bir çembere dönüşür.





Böylece gezegen herhangi bir P noktasındayken sahip olduğu hız vektörlerini bulabiliriz.
Hız vektörü her zaman için yörüngeye teğettir.
Böylece yörüngenin şeklini bulma problemini

şu probleme çevirebiliriz: herhangi bir θ doğrultusundaki teğeti bildiğimiz hız vektörüne paralel olan eğri nedir? Bu eğriyi hız şeklinin içinde oluşturmayı deneyelim. Öncelikle hız şeklini 90° dönderelim.



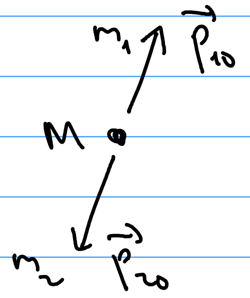
$\vec{V}_p$ vektörünü tam ortasından bir dikme çizdik. Bu dikme $C - V_p$ doğrusunu P' noktasında kessin. Bu dikme P noktasındaki gezegenin hız vektörüne paraleldir. Bu şekilde bütün θ'lar için karşılık gelen P' noktalarının hepsini alalım. Bu şekil bir elipstir. ve bu elipsin herhangi bir noktasındaki teğeti o noktadaki hız vektörüne de teğettir. Bu ise bizim istediğimiz eğridir. Dolayısıyla gezegenin yörüngesi elipstir

Parçalanma ve saçılma

Doğayı anlamak için yaptığımız bütün deneyle ya saçılmalara bakar, ya da parçalanma sonucu ortaya çıkan parçacıkları inceler. Bu bölümde bu süreçlerin kinematiğini inceleyeceğiz.

Parçalanma:

M kütleli bir parçacık, m_1 ve m_2 kütleli iki parçacığa bölünsün. Bu problemi öncelikle M kütleli parçacığın durağan olduğu referans sisteminde bakalım. Sistemin toplam doğrusal momentumu sıfırdır. Dolayısıyla $\vec{p}_{10}$ ve $\vec{p}_{20}$ momentumları $\vec{p}_{10} = -\vec{p}_{20} \equiv \vec{p}_0$ olmalıdır



("0" alt imi kütle merkezi referans sistemindeki nicelikleri belirtir)

enerjinin korunumunu yazarsak

$$E_i = E_{1i} + \frac{p_0^2}{2m_1} + E_{2i} + \frac{p_0^2}{2m_2} = E_{1i} + E_{2i} + \frac{p_0^2}{2\mu}$$

elde ederiz. Burada E_i, E_{1i} ve E_{2i} karşılık geldikleri kütlelerin iç enerjileridir, μ iki parçacığın indirgenmiş kütlesidir.

Bozunma enerjisi ε'u

$$\varepsilon = E_i - E_{1i} - E_{2i}$$

olarak tanımlarsak

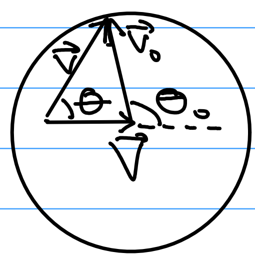
$$p_0 = \sqrt{2\mu\varepsilon}$$

olarak buluruz. Bir başka deyişle parçalanma enerjisi parçaların momentumunun büyüklüğünü belirler. Yönü ise herhangi bir yön olabilir.

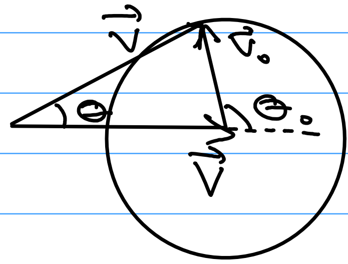
M kütlesinin $\vec{V}$ hızı ile hareket ettiği referans sistemine bakalım. Bu referans sisteminde m_1 kütlesinin olası hız vektörlerini inceleyelim (m_2'nin hız vektörleri için de benzer bir analiz yapılabilir)

$$\vec{v}_1 = \vec{V} + \frac{\vec{p}_0}{m_1} = \vec{V} + \vec{v}_0$$

olacaktır. Buradan $\vec{v}_0$ hızının büyüklüğü ε tarafından belirlenmiştir ancak yönü herhangi bir yön olabilir. $\vec{v}_0$ vektörünün büyüklüğü sabit olduğundan bütün olası $\vec{v}_0$ vektörleri bir çember üzerinde yer alır.



$|\vec{V}| < |\vec{v}_0|$



$|\vec{V}| > |\vec{v}_0|$

Yukarıdaki şekillerde θ_0, kütle merkezi sisteminde m_1'in hızını $\vec{V}$ ile yaptığı açı, θ ise M'nin $\vec{V}$ hızı ile gittiği labaratuvar referans sisteminde m_1'in $\vec{V}$ ile yaptığı açıdır.

Yukarıdaki şekillerden θ ile θ_0 arasındaki bağıntı

$$\tan\theta = \frac{v_0 \sin\theta_0}{V + v_0 \cos\theta_0}$$

olarak yazılabilir. Şayet $|\vec{V}| < |\vec{v}_0|$ ise θ ile θ_0 arasındaki bağıntı birebirdir ve θ her değeri alabilir $|\vec{V}| > |\vec{v}_0|$ ise her θ açısına karşılık gelen iki θ_0 değeri vardır ve θ'ın alabileceği maximum değer

$$\sin\Theta_{max} = \frac{v_0}{V}$$

ile belirlenir.

Bir başka önemli özellik oluşan parçacıkların açı, enerji, v.s. dağılımlarıdır.

dn ile istenen özelliklere sahip m_1 parçacıklarının oranını gösterelim. Kütle merkezinde M kütleli parçacığın tercih ettiği bir yön yoksa (belli bir yönde spin gibi) oluşan m_1 kütleli parçacıklar her yöne eşit oranda gidebilirler. Belli bir $d\Omega_0$ katı açısına giden parçacıkların oranı $d\Omega_0$ ile orantılı olacaktır. Toplam katı açı 4π olduğundan

$$dn = \frac{d\Omega_0}{4\pi}$$

olacaktır.

$$d\Omega_0 = \sin\Theta_0 \, d\Theta_0 \, d\Phi_0$$

olarak yazıp Φ_0 üzerinden integral alırsak oluşan parçacıkların Θ_0 dağılımı

$$\frac{dn}{\sin\Theta_0 \, d\Theta_0} = \frac{1}{2}$$

olarak bulunur. Bu ifadeyi lab referans sistemine çevirmek için Θ_0'ı Θ cinsinden ifade edip, yukarıya yerleştirmek yeterlidir.

Şimdi de lab sisteminde oluşan parçacıkların kinetik enerji dağılımına bakalım.

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}_0$$

$$\Rightarrow v^2 = V^2 + v_0^2 + 2Vv_0 \cos\theta_0$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 (V^2 + v_0^2) + m_1 V v_0 \cos\theta_0$$

V ve v_0 sabit değerlerdir. θ_0 açısı, $d\theta_0$ aralığında değerler alırsa, kinetik enerji de

$$dT = m_1 v_0 V \sin\theta_0 \, d\theta_0 \Rightarrow \sin\theta_0 \, d\theta_0 = \frac{dT}{m_1 v_0 V}$$

aralığında değerler alır ($d(\cos\theta_0) = -\sin\theta_0 \, d\theta_0$'dır. ama aralıklardan bahsettiğimiz için "-" işaretinin önemi yoktur)

Yukarıdaki ifadeye yerleştirirsek

$$\frac{1}{2} = \frac{dn}{\sin\theta_0 \, d\theta_0} = m_1 v_0 V \frac{dn}{dT}$$

$$\Rightarrow \frac{dn}{dT} = \frac{1}{2 m_1 v_0 V}$$

olarak bulunur. Bir başka deyişle dT aralığındaki parçacıkların oranı $\frac{dT}{2 m_1 v_0 V}$ 'dir.

$$T = \frac{1}{2} m_1 \left(V^2 + v_0^2 + 2 v_0 V \cos\Theta_0 \right)$$

ifadesinden kinetik enerjinin alabileceği maximum değer

$$T_{max} = \frac{1}{2} m_1 (V + v_0)^2$$

ve minimum değer

$$T_{min} = \frac{1}{2} m_1 (V - v_0)^2$$

olarak bulunur. Oluşan parçacıkların kinetik enerjileri bu iki değer arasında homojen dağılmışlardır.

Şu integrale bakalım:

$$\int_{T_{min}}^{T_{max}} \frac{dn}{dT} dT = \int_{T_{min}}^{T_{max}} \frac{1}{2 m_1 v_0 V} dT = \frac{T_{max} - T_{min}}{2 m_1 v_0 V} = 1$$

olarak bulunur. Bu ise beklenen sonuçtur, çünkü $\int_{T_{min}}^{T_{max}} \frac{dn}{dT} dT$ integrali enerjileri T_{min} ile T_{max} arasında olan parçacıkların oranını verir. Bütün parçacıkların kinetik enerjisi bu aralıkta olduğundan bu oranın 1 olması gerekir.

— o —