İki parçacık saçılması

Bir önceki bölümde tek parçacığın bozunmasını inceledik. Fiziksel gözlem/deneylerin büyük çoğunluğu bir parçacığın bir başka parçacık üzerinden saçılmasını içerir. Bu bölümde bu problemi inceleyeceğiz. Öncelikle olayın kinematiğine bakalım. Daha önce, iki parçacığın Lagranj fonksiyonuna bakarken iki parçacığın kinetik enerjisinin

$$T = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + \frac{1}{2} \mu \vec{v}^2$$

olarak yazılabileceğini göstermiştik. Burada

$$M = m_1 + m_2$$

toplam kütle

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

indirgenmiş kütle

$$\vec{V} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

kütle merkezinin hızı ve

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

parçacıkların birbirlerine göre hızlarını göstermektedir.

Çarpışma sırasında enerjinin korunumunu yazacak olursak

$$E_{1i} + E_{2i} + \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + \frac{1}{2} \mu \vec{v}^2 = E'_{1i} + E'_{2i} + \frac{1}{2} M \vec{V}'^2 + \frac{1}{2} \mu \vec{v}'^2$$

Burada üzerinde " ' " işareti olan ifadeler

çarpışma sonrası değerleri, E_{1i} ve E_{2i} ise parçacıkların iç enerjilerini gösterir.
Eğer iki parçacığa etki eden harici bir kuvvet yoksa, veya çarpışma çok kısa bir süre içinde oluyorsa, ve yukarıdaki eşitlikteki nicelikler çarpışmadan hemen öncesi ve sonrası için yazıldıysa doğrusal momentumun korunumundan çarpışma sırasında kütle merkezinin hızı değişmeyecektir:

$$\vec{V} = \vec{V}'$$

Ayrıca çarpışma sırasında çarpışmaya giren ve çıkan parçacıkların da aynı olduğunu varsayarsak

$$\mu = \mu'$$

olacaktır. Dolayısıyla enerjinin korunumu bize

$$E_{1i} + E_{2i} + \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2 = E'_{1i} + E'_{2i} + \frac{1}{2}\mu\vec{v}'^2$$

verecektir. Esnek çarpışmaları inceleyecek olursak, esnek çarpışmalarda çarpışan parçacıkların iç enerjileri değişmez. Buradan da

$$\frac{1}{2}\mu\vec{v}^2 = \frac{1}{2}\mu\vec{v}'^2$$

$$\Rightarrow |\vec{v}| = |\vec{v}'| \equiv v$$

elde ederiz. Bunun bize söylediği esnek çarpışmalarda sadece parçacıkların birbirlerine göre hızlarının büyüklüğünün değişmeyip, yönünün değiştiğidir. Kütle merkezi referans sisteminde bu yönü $\hat{n}_0$ ile gösterelim.
Bu durumda $\vec{v}' = v\hat{n}_0$ olacaktır

$$\vec{v}_1' = \vec{V} + \frac{m_2 \vec{v}'}{m_1+m_2} \quad \text{ve} \quad \vec{v}_2' = \vec{V} - \frac{m_1 \vec{v}'}{m_1+m_2}$$

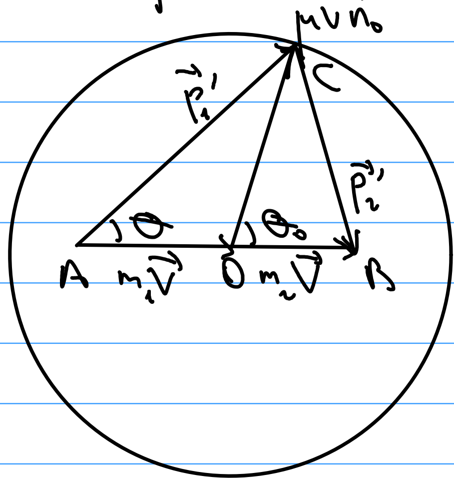
olarak yazılabilir. Hızlar yerine doğrusal momentumlar için benzer bir denklem yazacak olursak

$$\vec{p}_1' = m_1 \vec{V} + \mu v \hat{n}_0 = \frac{m_1}{m_1+m_2}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) + \mu v \hat{n}_0$$

ve

$$\vec{p}_2' = m_2 \vec{V} - \mu v \hat{n}_0 = \frac{m_2}{m_1+m_2}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) + \mu v \hat{n}_0$$

olacaktır. Bu iki işarette de bulunan $\mu v \hat{n}_0$ vektörü sabit uzunluğa sabit herhangi bir yönde olabilen bir vektördür. Bu vektörün ucu bir μv yarıçaplı bir çember üzerinde gösterilebilir $\vec{V}$ vektörünü yatay olarak gösterecek olursak, şekilsel olarak yukarıdaki denklemleri



olarak gösterebiliriz. Burada θ_0, kütle merkezi referans sistemindeki saçılma açısı, θ ise m_1 parçacığının orijinal referans sistemindeki saçılma açısıdır. Yukarıdaki şekilden θ ve θ_0 arasındaki bağıntı

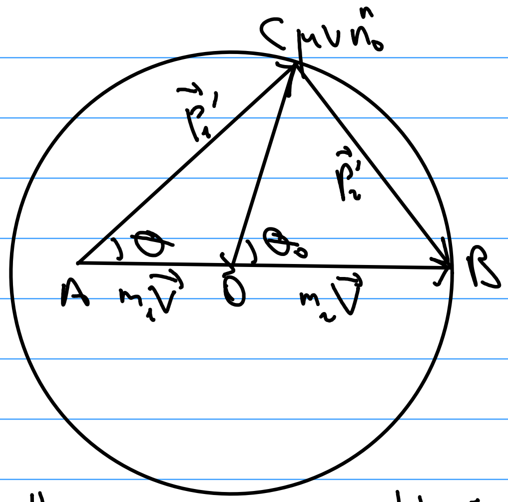
$$\tan\theta = \frac{\mu v \sin\theta_0}{m_1 V + \mu v \cos\theta_0}$$

olarak yazılabilir. Deneylerde genelde parçacıklardan birisi çarpışmadan önce durağandır. ($\vec{v}_2 = 0$).
Bu referans sistemine genelde lab referans sistemi denir. Lab referans sisteminde

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1$$
$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}$$

$$m_2\vec{V} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\vec{v} = \mu\vec{v} \Rightarrow m_2 V = \mu v$$

olacağından B noktası da çemberin içinde olacaktır.



Yukarıdaki şekilde $m_1 < m_2$ olduğu varsayılmıştır. Bu durumda θ her değeri alabilir. $m_1 > m_2$ olduğu durumda A noktası da çemberin dışında olacaktır. Bu durumda θ açısının her değerine iki olası θ_0 değeri karşılık gelecektir. Ayrıca θ'nın alabileceği maximum değer

$$\sin\theta_{max} = \frac{\mu v}{m_1 V} = \frac{m_2}{m_1}$$

olacaktır.

$m_1 = m_2$ olduğu durumda ise A noktası da çemberin üzerinde olacağından $\vec{p}_1'$ ve $\vec{p}_2'$ vektörleri birbirlerine dik olacaktır. Bir başka deyişle, durağan bir kütleye aynı kütleye sahip bir başka kütle çarparsa, saçılan parçacıkların saçılma yönleri her zaman için birbirine dik olacaktır.

Saçılmadan sonraki m_1 kütleli parçacığın momentumunun büyüklüğü

$$p_1'^2 = m_1^2 V^2 + \mu^2 v^2 - 2 m_1 \mu V v \cos\Theta_0$$

m_2 kütleli parçacığın momentumunun büyüklüğü ise

$$p_2' = 2\mu V \sin\frac{\Theta_0}{2}$$

olarak hesaplanabilir.

Kafa kafaya çarpışmalarda, $\Theta_0 = \pi$'dir. Dolayısıyla $\hat{n}_0 = -\frac{\vec{V}}{V}$ olarak yazılabilir.

$$\vec{p}_1' = m_1\vec{V} + \mu v\,\hat{n}_0 = m_1\vec{V} + m_2 V\left(-\frac{\vec{V}}{V}\right)$$

$$\vec{p}_1' = (m_1 - m_2)\vec{V} = \frac{(m_1 - m_2)\, m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1' = \frac{\vec{p}_1'}{m_1} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_1$$

ve

$$\vec{p}_2' = m_2\vec{V} - \mu v\,\hat{n}_0 = 2 m_2 \vec{V} = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_1$$

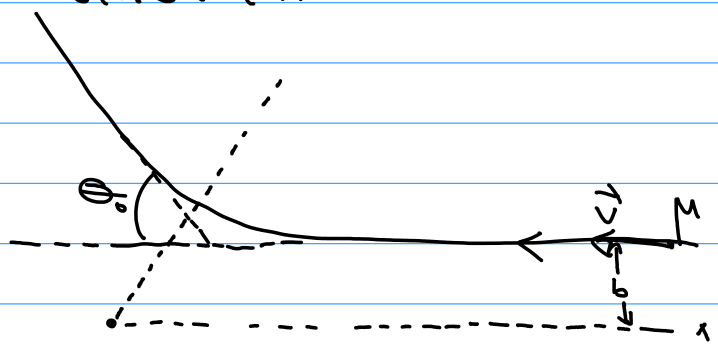
$$\vec{v}_2{}' = \frac{\vec{p}_2{}'}{m_2} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_1$$

olarak bulunur.

Saçılma Tesir Kesiti

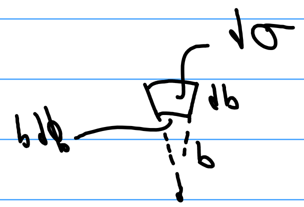
Bir önceki bölümdeki sonuçlar kinematik olarak bir saçılmayı tasvir eder. hangi koşullar altında $\hat{n}_0$ vektörünün hangi yönde olacağını saçılmanın dinamiği belirleyecektir.

Örnek olarak iki parçacık arasında itici bir kuvvet olsun. Daha önce bu problemi özdeş tek parçacık problemine denk olduğunu göstermiştik. Bu tek parçacığın saçılması şekilde gösterildiği gibi olacaktır.



Burada θ_0 saçılma açısı, b ise çarpışma parametresidir. Eğer b parametresi $b+db$ olarak değiştirilirse, θ_0 açısı da $\theta_0+d\theta_0$ olarak değişecektir. Eğer x ekseni etrafında $d\phi_0$ kadar dönerse, saçılma doğrultusu da $d\phi_0$ kadar dönecektir.

Bakış açımızı değiştirerek x ekseni boyunca, μ kütleli parçacığın arkasından bakalım.



parçacık şekilde gösterilen alana doğru gönderilirse $d\Omega_0 = \sin\theta_0\, d\theta_0\, d\phi_0$ katı açısıyla belirlenen doğrultuda saçılacaktır.

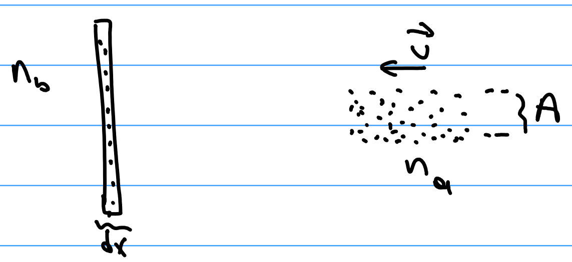
$$d\sigma = (b\, d\phi_0)\, db$$

$d\Omega_0$ yönüne saçılması için diferansiyel tesir kesiti olarak adlandırılır.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_0} = \frac{b\, db\, \cancel{d\phi_0}}{\sin\theta_0\, d\theta_0\, \cancel{d\phi_0}} = \frac{b}{\sin\theta_0}\left|\frac{db}{d\theta_0}\right|$$

olarak da yazılabilir. Genel olarak büyüklüklerle ilgilendiğimizden, son eşitlikte mutlak değer olarak yazdık.

Genel olarak deneylerde tek bir parçacığı belli bir çok küçük alana odaklayarak hesap yapmayız. Belli bir v hızında pek çok parçacığı hedef olarak kullandığımız pek çok parçacığa yollarız



Parçacık yoğunluğu n_a, hızı $\vec{v}$, kesit alanı A olan bir hüzme düşünelim. dx kalınlığında yoğunluğu n_b olan hedefe yönlenmiş olsun. Birim zamanda saçılan parçacıkların, $d\Omega_0$ yönüne saçılanların oranı dn olsun. Bu $d\Omega_0$ yönüne konan bir ölçüm aletinin ölçtüğü bir değerdir.
Hüzmedeki parçacıklar, hedefteki her parçacığın civarındaki $d\sigma$ kadar bir alana isabet ederse $d\Omega_0$ yönüne saçılacaktır. Hedefte $(n_b\, dx\, A)$ kadar parçacık olduğu düşünülürse $(n_b\, dx A)\, d\sigma$'lık alana çarpan bütün parçacıklar istenen yöne saçılacaktır. Dolayısıyla

$$\frac{(n_b\, dx\, \cancel{A})\, d\sigma}{\cancel{A}} = \frac{dn}{(n_a v A)}$$

olacaktır. Dolayısıyla

$$d\sigma = \frac{dn}{n_a n_b v\, dx\, A}$$

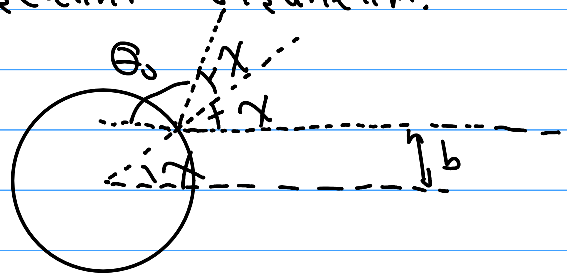
eşitliğini kullanarak deneysel olarak ölçülebilir. Yukarıdaki eşitlikte paydadaki ifadeler, deney hazırlanırken belirlenen ifadelerdir. dn ise deneyde detektöre gelen birim zamandaki parçacık sayısıdır.

<u>Örnek</u> Katı küreden saçılma. R yarıçaplı sert bir küre olsun, Bu küre için $\dfrac{d\sigma}{d\Omega_0}$ nedir?

Yukarıda

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_0} = \frac{b}{\sin\theta_0}\left|\frac{db}{d\theta_0}\right| = b\left|\frac{db}{d\cos\theta_0}\right|$$

olduğu gösterilmişti. Bunu hesaplayabilmek için b ile θ_0 arasında bir bağıntı bulmamız gerekir. Saçılma şeklini düşünelim:



Yukarıdaki şekilden

$$\theta_0 = \pi - 2\chi$$

ve

$$\sin\chi = b/R$$

olduğu görülebilir. Dolayısıyla

$$b = R\sin\chi = R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right) = R\cos\frac{\theta_0}{2}$$

$$\left|\frac{db}{d\theta_0}\right| = \frac{R}{2}\sin\frac{\theta_0}{2}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_0} = \frac{b}{\sin\theta_0}\left|\frac{db}{d\theta_0}\right| = \frac{R\cos\frac{\theta_0}{2}}{\sin\theta_0}\frac{R\sin}{2}\frac{\theta_0}{2} = \frac{R^2}{4}$$

olarak bulunur. Toplam tesir kesitine bakacak olursak

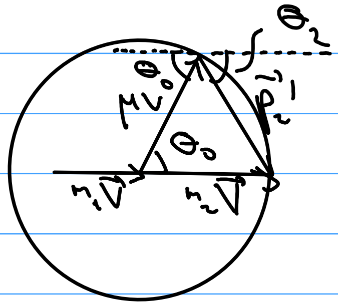
$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega_0}\,d\Omega_0 = \int \frac{R^2}{4}\,d\Omega_0 = \frac{R^2}{4}4\pi = \pi R^2$$

olarak elde edilir. Bu ise kürenin kesit alanına eşittir.

Örn Bir önceki örnek, aralarındaki potansiyel

$$U(r) = \begin{cases} \infty & \text{eğer } r<R \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } r>0 \text{ ise} \end{cases}$$

olan iki parçacığın birbirinden saçılması olarak da düşünülebilir. m_2 kütleli parçacık çarpışmadan önce duruyor olsun. Bu durumda θ_0 ile m_2 kütleli parçacığın saçılma doğrultusu arasındaki bağıntı



$$\theta_2 = \pi - \theta_0 - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} \Rightarrow \theta_0 = \pi - 2\theta_2$$

olacaktır. Dolayısı ile

$$\begin{aligned} d\Omega_0 &= \sin\theta_0 \, d\theta_0 \, d\phi_0 \\ &= \sin 2\theta_2 \, 2 d\theta_2 \, d\phi_2 \\ &= 4\cos\theta_2 \, d\Omega_2 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_2} = \frac{d\sigma \quad 4\cos\theta_2}{d\Omega_0} = R^2 \cos\theta_2$$

olacaktır. Toplam tesir kesitini hesaplarsak

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega_2} d\Omega_2 = \int_0^{\pi/2} d\theta_2 \int_0^{2\pi} d\phi_2 R^2 \cos\theta_2 \sin\theta_2$$

$$= R^2 (2\pi) \left(-\frac{\cos^2\theta_2}{2}\right)\Bigg|_{\theta_2=0}^{\frac{\pi}{2}} = \pi R^2$$

olarak bulunur. Yukarıda θ_2 integralinin 0'dan

$\frac{\pi}{2}$'ye kadar olduğuna dikkat edin.

$$\Theta_2 = \frac{\pi - \Theta_0}{2}$$

olduğundan $0 \leq \Theta_0 < \pi$ aralığında değerler alırken $0 \leq \Theta_2 < \frac{\pi}{2}$ aralığında değerler alır. $\Theta_2 > \frac{\pi}{2}$ olamaz.

m_1 kütleli parçacık için bir tesir kesiti yazmak biraz daha uzun sürecektir. Öncelikle Θ_1 ve Θ_0 açıları arasında bir ilişki elde etmemiz gerekir. Daha önce bu bağıntıyı

$$\tan\Theta_1 = \frac{\mu v \sin\Theta_0}{m_1 V + \mu v \cos\Theta_0}$$

olarak yazmıştık. İki tarafın da diferansiyelini yazarsak

$$\frac{d\Theta_1}{\cos^2\Theta_1} = d\Theta_1\left[\frac{\mu v \cos\Theta_0}{m_1 V + \mu v \cos\Theta_0} - \frac{\mu v \sin\Theta_0}{(m_1 V + \mu v \cos\Theta_0)}\left(-\mu v \sin\Theta_0\right)\right]$$

$$\frac{d\Theta_1}{\cos^2\Theta_1} = d\Theta_1 \frac{(\mu v \cos\Theta_0)(m_1 V + \mu v \cos\Theta_0) + (\mu v \sin\Theta_0)^2}{(m_1 V + \mu v \cos\Theta_0)^2}$$

$$\frac{d\Theta_1}{\cos^2\Theta_1} = d\Theta_0 \frac{m_1 \mu v V \cos\Theta_0 + (\mu v)^2}{(m_1 V + \mu v \cos\Theta_0)^2}$$

$$\frac{d\Theta_1}{\cos^2\Theta_1} = d\Theta_0 \frac{\mu v\,(m_1 V \cos\Theta_0 + \mu v)}{(m_1 V + \mu v \cos\Theta_0)^2}$$

$$\frac{d\Theta_1}{\cos^2\Theta_1} = d\Theta_0 \, \mu v \, (m_1 V \cos\Theta_0 + \mu v) \frac{\tan^2\Theta_1}{(\mu v)^2 \sin^2\Theta_0}$$

$$\frac{d\Theta_1}{\sin^2\Theta_1} = \frac{d\Theta_0}{\sin^2\Theta_0} \, \frac{m_1 V \cos\Theta_0 + \mu v}{\mu v}$$

her ne kadar biraz sadeleştirmiş olsak da, Θ_0'ı Θ_1 cinsinden hala çözmemiş gerekiyor.

$$\tan\Theta_1 = \frac{\mu v \sin\Theta_0}{\mu v \cos\Theta_0 + m_1 V}$$

iki tarafın da karesini alalım:

$$\tan^2\Theta_1 = \frac{(\mu v)^2 (1 - \cos^2\Theta_0)}{(\mu v \cos\Theta_0 + m_1 V)^2}$$

$$\tan^2\Theta_1 \left((\mu v)^2 \cos^2\Theta_0 + m_1^2 V^2 + 2 m_1 \mu v V \cos\Theta_0 \right)$$
$$= (\mu v)^2 - (\mu v)^2 \cos^2\Theta_0$$

$$\Rightarrow (\mu v)^2 \cos^2\Theta_0 (1 + \tan^2\Theta_1) + 2 \mu v m_1 V \tan^2\Theta_1 \cos\Theta_0$$
$$+ \tan^2\Theta \, m_1^2 V^2 - (\mu v)^2 = 0$$

$$\cos\Theta_0 = \frac{\left[-\cancel{2}\cancel{\mu v} m_1 V \tan^2\Theta_1 \mp \left\{ (\cancel{4}\cancel{\mu v} m_1 V \tan^2\Theta_1)^2 - \cancel{4}\cancel{(\mu v)^2} (1 + \tan^2\Theta_1)(\tan^2\Theta_1 m_1^2 V^2 - \mu^2 v^2) \right\}^{1/2} \right]}{\mu v \, \cancel{2}\cancel{(\mu v)^2} (1 + \tan^2\Theta_1)}$$

$$\cos\theta_0 = \frac{\left[-m_1 \cancel{(}\tan^2\theta_1 \mp \left\{ m_1^2 \cancel{(}\tan^4\theta_1 - (1+\tan^2\theta_1)(\tan^2\theta_1 m_1^2 \cancel{)} - m_2^2 \cancel{)}\right)\right\}^{1/2}\right]}{m_2 \cancel{(}(1+\tan^2\theta_1)}$$

$$= \left[-\frac{m_1}{m_2}\sin^2\theta_1 \mp \left\{\frac{m_1^2}{m_2^2}\sin^4\theta_1 - \left(\sin^2\theta_1 \frac{m_1^2}{m_2^2} - \cos^2\theta_1\right)\right\}^{1/2}\right]$$

$$\cos\theta_0 = -\frac{m_1}{m_2}\sin^2\theta_1 \mp \left\{\cos^2\theta_1 - \sin^2\theta_1 \frac{m_1^2}{m_2^2}\cos^2\theta_1\right\}^{1/2}$$

$$\cos\theta_0 = -\frac{m_1}{m_2}\sin^2\theta_1 \mp \cos\theta_1 \left\{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2}\sin^2\theta_1\right\}^{1/2}$$

$$\cos\theta_0 = -\frac{m_1}{m_2}\left(1-\cos^2\theta_1\right) \mp \cos\theta_1 \left\{\left(1-\frac{m_1^2}{m_2^2}\right) + \frac{m_1^2}{m_2^2}\cos^2\theta_1\right\}^{1/2}$$

$\theta_0 \to 0$'a giderken $\theta_0 \to \theta_1$ olan çözümü seçersek

$$\cos\theta_0 = -\frac{m_1}{m_2}\left(1-\cos^2\theta_1\right) + \cos\theta_1 \left\{\left(1-\frac{m_1^2}{m_2^2}\right) + \frac{m_1^2}{m_2^2}\cos^2\theta_1\right\}^{1/2}$$

buluruz

$1 - \frac{m_1^2}{m_2^2}\sin^2\theta_1$ ifadesi karekök içinde

olduğundan çözümün reel olması için

$$\sin^2\theta_1 \leq \frac{m_2^2}{m_1^2}$$

olmalıdır. Bu da, daha önce de gördüğümüz gibi, $m_1 > m_2$ ise, θ_1'in alabileceği bir maximum değer olduğu anlamına gelir.

$\cos\Theta_0$ ifadesinde iki tarafın da diferansiyelini alırsak

$$\sin\Theta_0\, d\Theta_0 = \left[\frac{2m_1}{m_2}\cos\Theta_1 + \left\{1-\frac{m_1^2}{m_2^2}\sin^2\Theta_1\right\}^{1/2} + \frac{\cos^2\Theta_1 \; m_1^2/m_2^2}{\left\{1-\frac{m_1^2}{m_2^2}\sin^2\Theta_1\right\}^{1/2}}\right]\sin\Theta_1\, d\Theta_1$$

katı açı ifadesinde yerleştirecek olursak

$$d\Omega_0 = \left[2\frac{m_1}{m_2}\cos\Theta_1 + \frac{1-\frac{m_1^2}{m_2^2}}{\left\{1-\frac{m_1^2}{m_2^2}\sin^2\Theta_1\right\}^{1/2}}\right] d\Omega_1$$

olarak buluruz. Buradan da

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1} = \frac{R^2}{4}\left[2\frac{m_1}{m_2}\cos\Theta_1 + \frac{1-m_1^2/m_2^2}{\left\{1-m_1^2/m_2^2\sin^2\Theta_1\right\}^{1/2}}\right]^{-1}$$

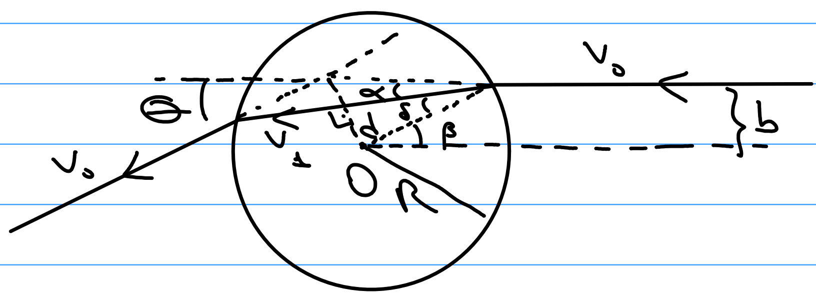
elde ederiz.

Örnek $U(r) = \begin{cases} -U_0 & r<R \\ 0 & r>R \end{cases}$

potansiyelinden saçılma tesir kesitini hesaplayın:

Çözüm

Parçacığın yörüngesi şekilde görüldüğü gibi olacaktır:



Sistemin O etrafında dönme simetrisi olduğundan, O'ya göre açısal momentum korunur:

$$m v_0 b = m v_1 d$$

enerjinin korunumundan

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 - U_0$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + \frac{2U_0}{m}}$$

$$\Rightarrow d = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2U_0}{m}}} b = \boxed{\left(1 + \frac{2U_0}{m v_0^2}\right)^{-1/2} b = d}$$

Tesir kesitini hesaplamak için, b ile θ arasındaki ilişkiyi bulmamız lazım.

$$b = R \sin\beta = R \sin\left(\frac{\theta}{2} + \delta\right)$$

$$b = R \sin\frac{\theta}{2} \cos\delta + R \cos\frac{\theta}{2} \sin\delta$$

$$= \sqrt{R^2 - d^2} \sin\frac{\theta}{2} + d \cos\frac{\theta}{2}$$

$$b = \sqrt{R^2 - \frac{b^2}{1 + \frac{2U_0}{m v^2}}} \sin\frac{\theta}{2} + \frac{b}{\sqrt{1 + \frac{2U_0}{m v^2}}} \cos\frac{\theta}{2}$$

$$1 = \sqrt{\frac{R^2}{b^2} - \frac{1}{1 + \frac{2U_0}{m v^2}}} \sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2U_0}{m v^2}}} \cos\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{R^2}{b^2} - \frac{1}{1 + \frac{2U_0}{m v^2}}} = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2U_0}{m v^2}}} \cos\frac{\theta}{2}\right] \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2U_0}{mv^2}}}$$

olarak tanımlayalım.

$$\frac{R^2}{b^2} - n^2 = \frac{\left(1 - n\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow b^2 = R^2\left[n^2 + \frac{\left(1 - n\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right]^{-1}$$

$$b^2 = R^2\left[\frac{1 - 2n\cos\frac{\theta}{2} + n^2}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right]^{-1}$$

$$b^2 = \frac{R^2\sin^2\frac{\theta}{2}}{1 - 2n\cos\frac{\theta}{2} + n^2}$$

$$\Rightarrow 2b\,db = \left[\frac{R^2}{2}\frac{\sin\theta}{\left(1 - 2n\cos\frac{\theta}{2} + n^2\right)} - \frac{R^2\sin^3\frac{\theta}{2}\,n}{\left(1 - 2n\cos\frac{\theta}{2} + n^2\right)^2}\right]d\theta$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b\,db}{\sin\theta\,d\theta} = \frac{R^2}{4\left(1 - 2n\cos\frac{\theta}{2} + n^2\right)^2}\left[1 - 2n\cos\frac{\theta}{2} + n^2 - \frac{2n\sin^3\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}\right]$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4\left(1 - 2n\cos\frac{\theta}{2} + n^2\right)^2}\left[1 + n^2 - 2n\cos\frac{\theta}{2} - \frac{n\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right]$$

<u>Örnek</u> $U = -\frac{\alpha}{r}$ için saçılma tesir kesitini hesaplayın.

Daha önce bu potansiyelde parçacığın hareketini incelemiştik. parçacığın yörüngesinin

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos\theta$$

olarak yazılabileceğini görmüştük.
Parçacığımızı hedefe $r \to \infty$'dan yolladığımız için, $\varepsilon > 1$ olmalıdır. Parçacığımızı yolladığımız doğrultu

$$\cos\theta_\infty = -\frac{1}{\varepsilon}$$

olarak yazılabilir.

$\cos\theta_\infty = \cos(-\theta_\infty)$ olduğundan, parçacık $-\theta_\infty$'dan gelip $+\theta_\infty$'ye yönelmiştir. Saçılma açısı da $2\theta_\infty$'dir.

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{2M^2E}{\mu\alpha^2}\right)^{1/2}$$

olduğunu da kullanırsak

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \left(1 + \frac{2M^2E}{\mu\alpha^2}\right)^{-1}$$

olacaktır. Burada $\theta = 2\theta_\infty$ olarak tanımladık.

$M = \mu v_\infty b \quad E = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2$

olarak yazarsak

$$1 + \frac{\cancel{2}\mu^2 v_\infty^2 b^2 \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{\mu} v_\infty^2}{\cancel{\mu}\alpha^2} = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\mu^2 v_\infty^4 b^2 = \alpha^2 \left(\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} - 1 \right)$$

$$b^2 = \frac{\alpha^2}{\mu^2 v_\infty^4} \left(\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} \right)$$

olarak bulunur. iki tarafın da θ'ya göre türevini alırsak

$$2b\frac{db}{d\theta} = \frac{\alpha^2}{\mu^2 v_\infty^4} \left[\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} + \frac{\sin^3\frac{\theta}{2}}{\cos^3\frac{\theta}{2}} \right]$$

$$= \frac{\alpha^2}{\mu^2 v_\infty^4} \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} \left[1 + \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} \right]$$

$$\boxed{2b\frac{db}{d\theta} = \frac{\alpha^2}{\mu^2 v_\infty^4} \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos^3\frac{\theta}{2}}}$$

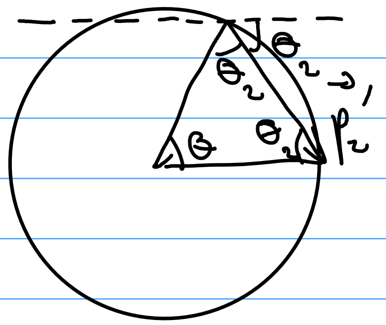
bulunur. Tesir kesiti ifadesinde yerleştirirsek

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right| = \frac{1}{2\sin\theta} \frac{\alpha^2}{\mu^2 v_\infty^4} \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos^3\frac{\theta}{2}}$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4\mu^2 v_\infty^4} \frac{1}{\cos^4\frac{\theta}{2}}}$$

olarak elde ederiz.

Lab referans sisteminde, hedef parçacık için tesir kesitini elde etmek istersek



$$\Theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2} \Rightarrow \Theta = \pi - 2\Theta_2$$

olacaktır.

Dolayısıyla

$$|\sin\Theta \, d\Theta| = \sin(\pi - 2\Theta_2) \, 2 \, d\Theta_2$$
$$= 4 \sin\Theta_2 \cos\Theta_2 \, d\Theta_2$$
$$= 4\cos\Theta_2 \sin\Theta_2 \, d\Theta_2$$

olacaktır. Buradan da

$d\Omega = 4\cos\Theta_2 \, d\Omega_2$ buluruz. $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ifadesinde yerleştirecek olursak

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_2} = \frac{\alpha^2}{4\mu^2 v_\infty^4} \frac{1}{\cos^4\left(\frac{\pi}{2} - \Theta_2\right)} 4\cos\Theta_2$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega_2} = \frac{\alpha^2}{\mu^2 v_\infty^4} \frac{\cos\Theta_2}{\sin^{\cancel{4}}\Theta_2}}$$

Yollanan parçacık için tesir kesitini $m_1 = m_2 = m$ durumunda elde edelim. Bu durumda

$$\Theta_1 = \frac{\Theta}{2} \text{ olacaktır.}$$

$$\sin\Theta \, d\Theta = 2\sin(2\Theta_1) \, d\Theta_1 = 4\cos\Theta_1 \, d\Theta_1$$

olacağından

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1} = \frac{\alpha^2}{4\mu^2 v_\infty^4} \frac{1}{\cos^4 \theta_1} 4 \cos\theta_1$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega_1} = \frac{\alpha^2}{\mu^2 v_\infty^4} \frac{1}{\cos^3 \theta_1}}$$

olarak buluruz. Hedef alınan ve yollanan parçacıklar özdeş parçacıklarsa, detektörler kendilerine gelen parçacıkların hangisi olduğunu ayırt edemeyeceklerdir. Bu durumda tesir kesiti ikisinin toplamı olacaktır.

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{\mu^2 v_\infty^4} \left(\frac{1}{\cos^4 \theta} + \frac{1}{\sin^4 \theta} \right) \cos\theta}$$