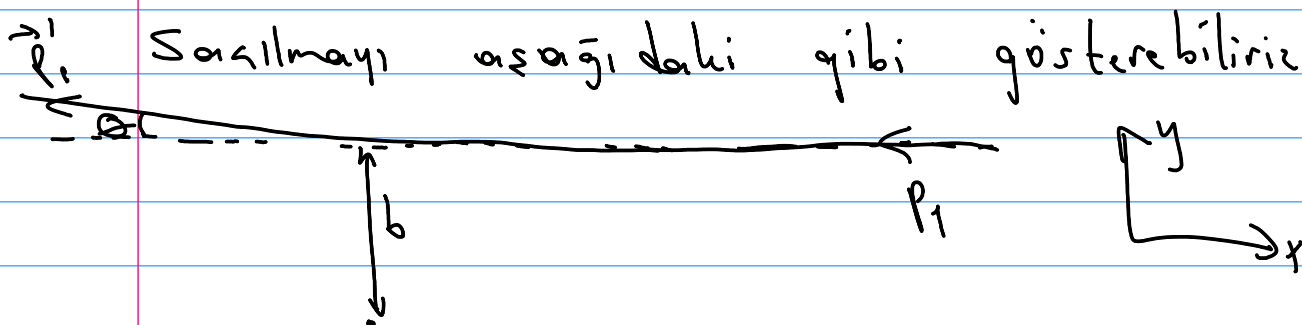
Küçük açı saçılma tesir kesiti

Saçılma tesir kesitini hesaplamak için, çarpışma parametresi b ile saçılma açısı θ arasındaki bağıntıyı bulmak gerekir. Genel olarak bu problem karışık bir problemdir ama küçük saçılma açıları için sadeleştirilebilir.

Eğer parçacık saçılma merkezinden çok uzaktan geçerse (b yeterince büyükse) saçılma açısı küçük olacaktır. Parçacığa etki eden kuvvet küçük olacağından, parçacığın yörüngesi boyunca potansiyelin türevleri de küçük olacaktır.
Bu bölümde, saçılma tesir kesitini potansiyelin türevinin birinci mertebesine kadar açacağız.

Saçılmayı aşağıdaki gibi gösterebiliriz:



$$\tan\theta = \frac{p'_{1y}}{p'_{1x}}$$

$\theta \ll 1$ olduğundan $\tan\theta \simeq \theta$ olacaktır. p'_{1y} parçacığa yörüngesi boyunca y yönünde verilen itkidir:

$$p'_{1y} = \int_{-\infty}^{\infty} F_y \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\partial U}{\partial y}\right) dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} \, dt$$

$$p'_{1y} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{y}{r} \, dt$$

olarak yazılabilir. y'nin b'den farkı, parçacığa etki eden kuvvet tarafından belirleneceğinden,

$$p'_{1y} \cong -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{b}{r} \, dt + O\left(U'^2\right)$$

yazabiliriz

Integrali t üzerinden bir integral yerine, x üzerinden bir integrale değiştirirsek

$$p'_{1y} = -\int_{\infty}^{-\infty} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{b}{r} \frac{dx}{\frac{dx}{dt}} = -\int_{\infty}^{-\infty} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{b}{(-V)r} \, dx$$

$$p'_{1y} \simeq -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{b}{V_0 r} \, dx$$

yine $O(U'^2)$ mertebesindeki terimler ihmal edilmiştir)

Son olarak

$$x = \mp\sqrt{r^2 - b^2}$$

yazarak, integrali x üzerinden bir integralden r üzerinden bir integrale çevirelim. Burada dikkat etmemiz gereken bir nokta,

$-\infty \leq x \leq 0$ aralığındayken $x = -\sqrt{r^2 - b^2}$,
$0 \leq x \leq \infty$ $x = +\sqrt{r^2 - b^2}$
olduğundur. Dolayısıyla öncelikle yukarıdaki integrali ikiye bölmemiz gerekir.

$$p'_{1y} \simeq -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{b}{V_0 r} dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{b}{V_0 r} dx - \int_{0}^{\infty} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{b}{V_0 r} dr$$

$$= +\int_{\infty}^{b} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{b}{V_0 r} \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - b^2}} - \int_{b}^{\infty} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{b}{V_0 r} \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - b^2}}$$

$$= -\frac{2b}{V_0} \int_{b}^{\infty} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}}$$

olarak buluruz.
açı ifademize yerleştirecek olursak

$$\theta \simeq \frac{-2b}{p'_{1x} V_0} \int_{b}^{\infty} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}}$$

olarak elde ederiz. Yine $O(U'^2)$ mertebesindeki terimleri ihmal edersek, yukarıda

$$p'_{1x} \simeq p_1 = mV_0$$

yazabiliriz

$$\Theta = \frac{-2b}{mv_0^2}\int_b^\infty \frac{\partial U}{\partial r}\frac{dr}{\sqrt{r^2-b^2}} = -\frac{b}{E_0}\int_b^\infty \frac{\partial U}{\partial r}\frac{dr}{\sqrt{r^2-b^2}}$$

olarak hesaplanır. Buradan Θ ile b arasındaki bağıntı bulunarak,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\Theta}\left|\frac{db}{d\Theta}\right|$$

ifadesinden tesir kesiti elde edilebilinir.

<u>Örnek</u> U, n. dereceden homojen bir fonksiyonsa küçük açı saçılma tesir kesiti nedir?

<u>Çözüm</u> yukarıda

$$\Theta = -\frac{b}{E_0}\int_b^\infty \frac{\partial U}{\partial r}\frac{dr}{\sqrt{r^2-b^2}}$$

elde edilmişti.

U, n. dereceden bir homojen fonksiyonsa $U(r) = Ar^n$ olmalıdır. Yukarıdaki ifadede yerine yerleştirilirse

$$\Theta = -\frac{bAn}{E_0}\int_b^\infty \frac{r^{n-1}\,dr}{\sqrt{r^2-b^2}}$$

olur. $r = bu$ olacak şekilde yeni bir integrasyon değişkeni tanımlanırsa

$$\Theta = \frac{-bAn}{E_0}\, b^{n-1}\int_1^\infty \frac{u^{n-1}\,du}{\sqrt{u^2-1}}$$

olarak yazılabilir. Yukarıdaki integral gamma fonksiyonları cinsinden yazılabilir. Integralin sonucuna $f(n)$

dersek

$$\Theta = -\frac{b^n A n}{E_0} f(n)$$

halini alacaktır. Buradan, b'yi çözersek

$$b = \left(\frac{-E_0 \Theta}{A n f(n)}\right)^{1/n} = \left(\frac{-E_0}{A n f(n)}\right)^{1/n} \Theta^{1/n}$$

olarak elde edilir. Tesir kesiti ifadesinde yerleştirirsek

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\Theta}\left|\frac{db}{d\Theta}\right| \simeq \left(\frac{-E_0}{A n f(n)}\right)^{2/n} \frac{\Theta^{2/n - 2}}{n}$$

olarak bulunur. Buradan da göründüğü üzere,
$\frac{d\sigma}{d\Omega}$'nın Θ'ya göre nasıl değiştiğine bakarak
n sayısı belirlenebilir

$$\frac{\Theta}{\frac{d\sigma}{d\Omega}} \frac{d}{d\Theta}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{2}{n} - 2$$

n belirlendikten sonra da $\frac{d\sigma}{d\Omega}$'nın büyüklüğünden
A belirlenebilir.

Küçük Salınımlar - tek serbestlik dereceli sistemler

Daha önce tek serbestlik derecesine sahip sistemlerin Lagranj fonksiyonunun

$$L = \frac{1}{2} a(q)\dot{q}^2 - U(q)$$

olarak yazılabileceğini görmüştük. Eğer q kartezyen koordinatı ise ve $q = x$ olarak yazarsak

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - U(x)$$

olarak yazılabilir. Sonlu bir bölgede hareket eden sistemlerde $U(x)$ alttan sınırlıdır, bir başka deyişle, (en azından bir tane) minimumu vardır. (bu minimum yerel veya genel olabilir) $x = x_0$ bu minimum(lardan biri) olsun. Koordinat eksenimizin merkezini bu nokta seçerek $x_0 = 0$ olmasını sağlayabiliriz. Potansiyelimize sistemin hiç bir özelliğini değiştirmeden bir sabit ekleyebileceğimizden $U(x_0) = 0$ olacak şekilde potansiyelimizi değiştirebiliriz. Ayrıca Minimum olma koşulundan

$$\left.\frac{dU(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = 0 \quad \text{ve} \quad \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_0} \geq 0$$

olacaktır.

Sistemimiz hareketi boyunca, $x = x_0 (=0)$ noktasından çok az sapıyor olsun. Bu durumda potansiyelimize gelen x'e bağlı ilk katkıyı alıp diğerlerini ihmal edebiliriz:

$$U = U(x_0) + \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{d^2U}{dx^2} \frac{(x-x_0)^2}{2} + \ldots$$

$$U(x) \simeq \frac{1}{2} k x^2$$

burada $k = \dfrac{\partial^2 U}{dx^2} > 0$ olarak tanımladık.

Kinetik enerji ifadesine bakalım.

$$T = \frac{1}{2} a \dot{x}^2$$

her ne kadar kartezyen x koordinatı için $a = m$, x'ten bağımsız olsa da, başka bir koordinat için o koordinata bağlı olabilir. Gene Taylor açılımını yaparsak

$$a(x) = a(0) + a'(0)\,x + \dots$$

olarak yazabiliriz. Küçük salınımlara baktığımızdan, hızlar da küçük olacaktır. Dolayısıyla, küçük niceliklerde ilk katkı veren ifade

$$T = \frac{1}{2} a(0)\,\dot{x}^2 + \dots$$
$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

olacaktır. Sonuç olarak küçük salınımlar için Lagrange fonksiyonumuz

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

halini alacaktır. Bu Lagrange fonksiyonuna karşılık gelen enerji ifadesi ise

$$E = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

olarak bulunur. Bu sistemin hareket denklemine bakacak olursak

$$\ddot{x} + w^2 x = 0 \quad , \quad w = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

buluruz. Bu denklemin genel çözümünü

$$x(t) = A\cos wt + B\sin wt$$

veya

$$x(t) = a\cos(wt + \delta)$$

olarak yazabiliriz. Bu iki ifadedeki sabitler arasındaki bağıntıyı

$$a\cos\delta = A \qquad\qquad a^2 = A^2 + B^2$$

$$-a\sin\delta = B \qquad\qquad \tan\delta = -B/A$$

olarak yazabiliriz. Bu parametreler sistemin başlangıç koşulları tarafından belirlenecektir.

$$x(0) = x_0$$

$$v(0) = v_0$$

olarak yazarsak

$$A = x_0$$

$$B = \frac{v_0}{w}$$

olarak belirleriz. Buradan da

$$x(t) = x_0 \cos wt + \frac{v_0}{w}\sin wt$$

olarak yazabiliriz.

Bu denklemlerdeki w açısal hız olarak adlandırılır

Çözümü göstermek için kullanılan bir başka yöntem de karmaşık sayılar kullanmaktır.

$$x(t) = Re\, Ce^{iwt} = Re\, z \quad ; \quad z = Ce^{iwt}$$

olarak yazılabilir. Burada $C = ae^{i\delta}$ olarak tanımlanmıştır. Doğrusal ifadeler kullanıldığı sürece, bütün işlemleri $z(t)$ ile yapıp işlemlerin sonunda reel kısım alınabilir.

$$\dot{x}(t) = -a\omega \sin(\omega t + \delta) \quad \text{ve} \quad k = m\omega^2$$

ifadelerini kullanarak enerji ifadesi

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

$$= \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2} m \omega^2 \left(a^2 \cos^2(\omega t + \delta)\right)$$

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2$$

olarak elde edilir. Göründüğü üzere, enerji parçacığın salınım genliğine bağlıdır. $z(t)$ kullanarak, enerji ifadesini

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 z^* z = \frac{1}{2} m |\dot{z}|^2$$

olarak da yazabiliriz.

Sürülen Salınıcı

Sistemimize etki eden harici bir alan olsun. Bunu zaman bağımlı bir potansiyel ile tasvir edebiliriz. Daha önce yaptığımız gibi potansiyeli $x=0$ etrafında seri açarsak

$$U(x,t) = U(0,t) + \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} x + \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=0} \frac{x^2}{2} + \dots$$

olarak yazabiliriz. Birinci terim sadece zamana bağlıdır ve hareket denklemlerini etkilemez.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -F(t)$$

sisteme etki eden zaman bağımlı harici kuvvettir. Yine $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=0} = k$ olarak tanımlarsak, Lagranj fonksiyonumuz

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + F(t)\,x$$

halini alır. Bu Lagranj fonksiyonuna karşılık gelen hareket denklemi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + kx - F(t) = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + kx = F(t)$$

olarak elde edilir.

Özel bir durum olarak

$$F(t) = A\cos(\alpha t)$$

olduğu duruma bakalım. Karmaşık gösterimi kullanırsak bu kuvveti $F(t) = F_0 e^{i\alpha t}$ olarak da yazabiliriz.

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t)$$

olarak yazabiliriz. Burada

$$m\ddot{x}_0 + k\,x_0 = 0$$

denklemini, $x_1(t)$ ise

$$m\ddot{x}_1 + k\,x_1 = F(t)$$

denklemini sağlar. x_0 için çözümleri daha önce incelemiştik.

$$x_1(t) = \tilde{x} e^{i\alpha t}$$

olacak bir çözüm arayalım. Bu çözümü yukarıdaki denkleme yerleştirecek olursak

$$m(-\alpha^2 + w^2)\tilde{x} e^{i\alpha t} = F_0 e^{i\alpha t}$$

$$\Rightarrow \tilde{x} = \frac{F_0}{m(w^2-\alpha^2)}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla çözümümüz

$$x_1(t) = \frac{F_0}{m(w^2-\alpha^2)} e^{i\alpha t}$$

veya reel kısmını alırsak

$$x_1(t) = \frac{F_0 \cos \alpha t}{m(w^2-\alpha^2)}$$

olarak buluruz. Bu çözüm sadece $\alpha \neq w$ için geçerlidir. $\alpha = w$ durumundaki çözümü bir limit olarak şöyle elde edebiliriz:

$$x_1(t) = F_0 \frac{\cos \alpha t - \cos w t}{m(w^2-\alpha^2)}$$

olarak yazabiliriz. Bu fonksiyon da

$$m\ddot{x}_1 + k x_1 = F(t)$$

denklemini sağlar. Bu çözümün $\alpha \to w$ limiti sonludur:

$$\lim_{\alpha \to \omega} x_1(t) = \frac{F_0}{m} \lim_{\alpha \to \omega} \frac{\cos\alpha t - \cos\omega t}{\omega^2 - \alpha^2}$$

$$= \frac{F_0}{m} \lim_{\alpha \to \omega} \frac{-t\sin\alpha t}{-2\alpha}$$

$$= \frac{F_0}{2m\omega} t \sin\omega t$$

Dolayısıyla bu durumdaki en genel çözümümüz

$$x(t) = a\cos(\omega t + \delta) + \frac{F_0 t}{2m\omega} \sin\omega t$$

$$= \mathrm{Re}\left(A e^{i\omega t} - i\frac{F_0 t}{2m\omega} e^{i\omega t} \right) \quad ; \quad A = a e^{i\delta}$$

$$= \mathrm{Re}\left[\left(A - \frac{iF_0}{2m\omega} t \right) e^{i\omega t} \right]$$

olarak yazılabilir. Görüldüğü üzere, parçacık genliği zamanla sürekli artan bir salınım yapacaktır. Bu olaya rezonans denir.

Şimdi de α, ω'dan çok az farklı ise nasıl davranacağına bakalım. $\alpha = \omega + \varepsilon$ yazalım.

$$x(t) = \mathrm{Re}\left(A e^{i\omega t} + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \alpha^2)} e^{i(\omega+\varepsilon)t} \right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(A - \frac{F_0}{(2m\omega\varepsilon)} e^{i\varepsilon t} \right) e^{i\omega t}$$

$$= \mathrm{Re}\left(A + B e^{i\varepsilon t}\right) e^{i\omega t} = \mathrm{Re}\, C(t) e^{i\omega t}$$

olarak yazılabilir. Buradan

$C(t) = A + B e^{i\varepsilon t}$ olarak

tanımladığımız sistemi zamana bağlı genliğidir.

Salınımın genliği

$$\big||A| - |B|\big| \leq |C(t)| \leq |A| + |B|$$

değerleri arasında değişecektir. Bu olaya tınlama denir.

Şimdi de sürülen salınıcının genel çözümüne bakalım.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

denklemini

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\omega x) - i\omega(\dot{x} + i\omega x) = \frac{F(t)}{m}$$

olarak da yazabiliriz. $z(t) = \dot{x}(t) + i\omega x(t)$ olarak tanımlarsak, $z(t)$ birinci dereceden

$$\frac{d}{dt} z(t) - i\omega z(t) = \frac{F(t)}{m}$$

denklemini sağlar. $z(t)$ fonksiyonunu bulursak,

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \mathrm{Im}\, z(t)$$

olarak elde edilebilinir.

$z(t) = e^{i\omega t} f(t)$ olacak şekilde bir çözüm arayalım. $z(t)$ için olan denkleme yerleştirirsek

$$\cancel{i\omega e^{i\omega t} f(t)} + e^{i\omega t}\frac{df}{dt} \cancel{- i\omega e^{i\omega t} f(t)} = \frac{F(t)}{m}$$

$$\frac{df}{dt} = e^{-i\omega t}\frac{F(t)}{m}$$

olarak buluruz. Buradan da

$$f(t) = f_0 + \int_0^t e^{-i\omega t'}\frac{F(t')}{m}\,dt'$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla

$$z(t) = e^{i\omega t} f_0 + \int_0^t e^{i\omega(t-t')}\frac{F(t')}{m}\,dt'$$

$$x(t) = \frac{|f_0|}{\omega}\sin(\omega t+\delta) + \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(t-t')\frac{F(t')}{m}\,dt'$$

olarak bulunur. Burada $f_0 = |f_0| e^{i\delta}$ olarak yazdık.

$z(t) = \dot{x} + i\omega x$
olarak tanımladığımızdan, sistemin enerjisini de

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{1}{2}m|\dot{x} + i\omega x|^2 = \frac{1}{2}m|z|^2$$

$$E = \frac{1}{2}m|f(t)|^2$$

olarak yazabiliriz. İlginç problemlerden biri, ilk başta duran bir sisteme, kısa bir süre etki eden bir kuvvetin ne kadar enerji aktardığıdır.
Bu durumda

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-i\omega t'} \frac{F(t')}{m} dt'$$

olarak yazabiliriz. Sisteme aktarılan toplam enerjiyi istiyorsak $t \to \infty$ limitine bakabiliriz.

$$f(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t'} \frac{F(t')}{m} dt'$$

ve sisteme aktarılan toplam enerji

$$E = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t'} F(t') dt' \right|^2$$

olarak elde edilebilir. Özel bir durum olarak, eğer $F(t')$ sadece $t'=0$ civarında çok kısa bir süre uygulanıyorsa, $e^{-i\omega t'} \simeq 1$ yazılabilir ve sisteme aktarılan enerji yaklaşık olarak

$$E = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t') dt' \right|^2$$

halini alır.

Sönümlü Salınıcı

Çoğu sistemde bir sürtünme kuvveti de olacaktır. Eğer parçacığımız bir sıvı veya gaz içinde hareket ediyorsa, sürtünme kuvveti hıza bağlı olacaktır. ve eğer cisim hareket etmiyorsa, kuvvet de sıfır olacaktır. Düşük hızlarda

$$f_s = -\gamma v$$

olarak yazabiliriz. Dolayısıyla hareket denklemimiz

$$m\ddot{x} + kx = -\gamma\dot{x}$$

halini alacaktır. Bu etkiyi, Euler-Lagranj denklemlerini

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$$

şeklinde değiştirerek de gösterebiliriz. Buradaki

$$F = \frac{1}{2}\gamma\dot{x}^2$$

olarak tanımlanmıştır. Sistemin enerjisinin zamanla nasıl değiştiğine bakarsak

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L\right)$$

$$= \cancel{\frac{d\dot{x}}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}} + \dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x}\dot{x} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{d\dot{x}}{dt}}$$

$$= \dot{x}\left[\cancel{\frac{\partial L}{\partial x}} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right] - \cancel{\dot{x}\frac{\partial L}{\partial x}}$$

$$= -\dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = -2F$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = -2F$$

olarak buluruz. Dolayısıyla F kayıp fonksiyonu

(dissipation function)
sistemin enerjisini kaybetme hızını belirler.

Hareket denklemimizin çözümüne dönecek olursak.

$$m\ddot{x} + \gamma \dot{x} + kx = 0$$

denkleminin $x = Ae^{i\omega t}$ şeklinde bir çözümünü arayalım. Yukarıdaki denkleme yerleştirirsek

$$(-m\omega^2 + i\omega\gamma + k) Ae^{i\omega t} = 0$$

elde ederiz. Bu denklemi ω için çözersek iki sonuç elde ederiz

$$\omega_{\mp} = \frac{-i\gamma \pm \sqrt{-\gamma^2 + 4km}}{-2m}$$

$$= \frac{+i\gamma}{2m} \mp \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ olarak tanımlarsak

$$\omega_{\mp} = \frac{i\gamma}{2m} \mp \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4m^2}}$$

buluruz. $\omega_0 > \frac{\gamma}{2m}$, $\omega_0 < \frac{\gamma}{2m}$ ve $\omega_0 = \frac{\gamma}{2m}$

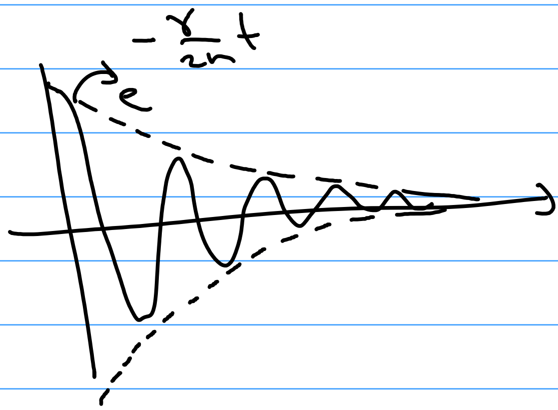
durumlarını ayrı ayrı inceleyelim.

$\omega_0 > \frac{\gamma}{2m}$ ise, $\omega = \sqrt{\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4m^2}}$

olarak tanımlayalım. Bu durumda genel çözümümüz

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \, \mathrm{Re}\left(A e^{i\omega t}\right)$$

olarak yazılabilir. Bu ise genliği zamanla azalan bir salınıcıdır:



Salınıcının frekansı, beklendiği üzere, sürtünme olmayan durumdaki frekanstan küçüktür.

$\omega_0 < \frac{\gamma}{2m}$ ise ω_+ ve ω_- çözümlerinin reel kısımları yoktur. Genel çözüm

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\left\{a \exp\left[-\sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2}-\omega_0^2}\,t\right] + b\exp\left[\sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2}-\omega_0^2}\,t\right]\right\}$$

olarak yazılabilir ve sistem salınım yapmadan sönümlenir. $\omega_0 = \frac{\gamma}{2m}$ olduğu durumu yine bir limit olarak tanımlayabiliriz:

$\omega_0 \to \frac{\gamma}{2m}$ limitini $\omega_0 < \frac{\gamma}{2m}$ bölgesinde alalım.

$\alpha = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \omega_0^2}$ olarak tanımlayalım.

Bu durumda genel çözümü

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\left[a' e^{-\alpha t} + b' \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{\alpha}\right]$$

olarak yazabiliriz. Şimdi $\alpha \to 0$ limitini alırsak

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\left[a' + 2b't\right]$$

olarak $w_0 = \frac{\gamma}{2m}$ durumundaki çözümü elde ederiz.

Sürülen Sönümlü Salınıcı

Sönümlü salınıcıya etki eden
$F(t) = f\cos(\alpha t)$
şeklinde bir harici kuvvet olsun. Bu durumda hareket denklemimizi

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = fe^{i\alpha t}$$

olarak yazabiliriz.
$x(t) = x_0(t) + x_1(t)$
olarak yazalım. Burada $x_0(t)$,

$$m\ddot{x}_0 + \gamma\dot{x}_0 + kx_0 = 0$$

denklemini sağlar. Daha önce gördüğümüz gibi x_0, zamanla sönümlenir ve geriye sadece $x_1(t)$ kalır.

$x_1(t)$ için $\tilde{x}e^{i\alpha t}$ şeklinde bir çözüm arayalım. Yukarıdaki denkleme yerleştirirsek

$$(-m\alpha^2 + i\gamma\alpha + k)\tilde{x}e^{i\alpha t} = fe^{i\alpha t}$$

elde ederiz. Buradan da

$$\tilde{x} = \frac{f}{-m\alpha^2 + i\gamma\alpha + k} = \frac{f\left(-m\alpha^2 - i\gamma\alpha + k\right)}{\left(-m\alpha^2 + k\right)^2 + \gamma^2\alpha^2}$$

olarak bulunur. $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ olarak tanımlarsak

$$\tilde{x} = \frac{f\left[m(\omega_0^2 - \alpha^2) - i\gamma\alpha\right]}{m^2(\omega_0^2 - \alpha^2)^2 + \gamma^2\alpha^2}$$

olarak yazabiliriz.

$\tilde{x} = a e^{-i\delta}$ olarak yazarsak

$$a = \frac{f}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \alpha^2)^2 + \gamma^2\alpha^2}}$$

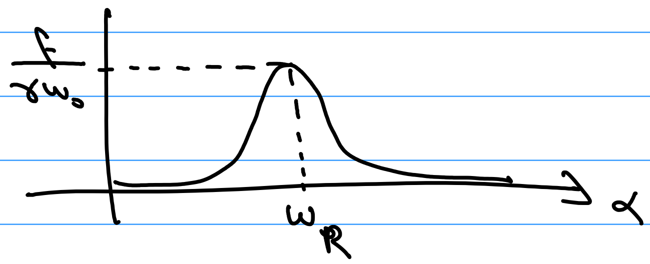
$$\tan\delta = \frac{\gamma\alpha}{m(\omega_0^2 - \alpha^2)}$$

olarak buluruz. Burada a salınımın genliği ve δ'da kuvvet ile salınıcımızın konumu arasındaki faz farkıdır. Yeterince bekledikten sonraki çözümümüz

$$x(t) = x_1(t) = a\cos(\alpha t - \delta)$$

halini alır.

Genliğin α'ya bağlılığını çizersek aşağıdakine benzer bir şekil elde ederiz.



$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2m^2}}$$

$\alpha = \omega_0$ rezonans değerinde genliğimiz en büyük değerini alacaktır.

Faz farkının α'ya göre rezonans bölgesinde nasıl değiştiğine bakalım. Tam rezonansta

$$\tan\delta_R = \frac{\gamma\omega_R}{m\,\frac{\gamma^2}{2m^2}} = \frac{2m}{\gamma}\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2m^2}}$$

Düşük sürtünme varsa $\delta_R \simeq \frac{\pi}{2}$ olacaktır.
$\omega_R \simeq \omega_0^-$ olduğunu da kullanırsak

$\alpha \to \omega_0^-$ için, $\tan\delta \to +\infty = \frac{\pi}{2}$

$\alpha \to \omega_0^+$ için $\tan\delta \to -\infty = -\frac{\pi}{2}$

olacaktır. Bir başka deyişle rezonans bölgesinde δ hızlı bir şekilde $\frac{\pi}{2}$'den $-\frac{\pi}{2}$'ye azalacaktır.

—— o ——