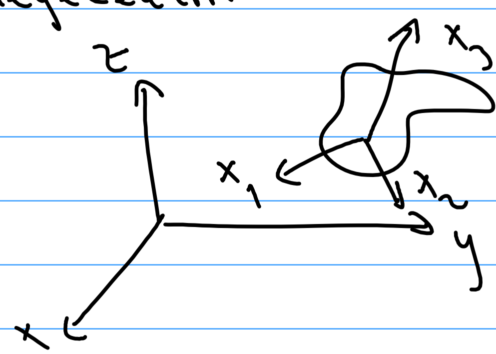
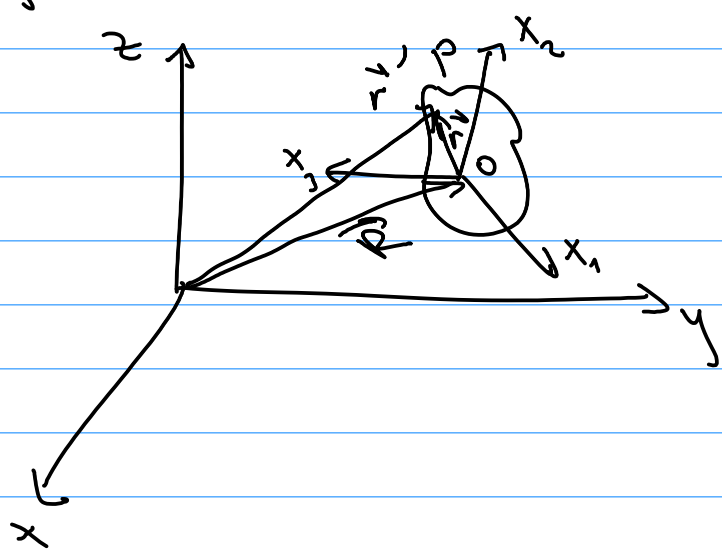
Katı Cisimlerin Hareketi

Bu bölümde şekli değişmeyen büyük nesnelerin hareketini inceleyeceğiz. Gerçek hayatta, her nesnenin şekli değişir. Ancak katı cisimler birbirlerini etkiledikleri zaman, şekillerindeki değişim ihmal edilebilecek kadar azdır. Bu sebeble bu bölümde geliştireceğimiz yöntemler katı cisimlerin hareketine uygulanabilir.

Katı bir cismin durumunu belirlemek için hem konumunu hem de yönünü belirlememiz gerekir. Bunun için iki tane koordinat ekseni sistemi kullanırız. Bu koordinat eksenlerinden biri (xyz koordinat sistemi diye isimlendirelim) eylemsiz bir referans sistemi belirler. Diğer koordinat sistemi ise katı cismimizin üzerine sabitlenmiştir. (Bu koordinat sistemine de $x_1x_2x_3$ koordinat sistemi diye isimlendirelim). Bu koordinat sistemi katı cismimizle beraber hareket eder ve döner. $x_1x_2x_3$ koordinat eksenimizin merkezine O diyelim. O noktasının xyz koordinat eksenine göre konumunu ve x_1, x_2, x_3 eksenlerinin yönlerini belirlemek katı nesnemizin konum ve yönünü belirleyecektir:



Katı cismimizin üzerinde herhangi bir P noktası alalım. Katı cismimiz hem öteleme hareketi, hem de O noktasından geçen bir eksen etrafında dönme hareketi yapıyor olsun. P noktasının O noktasına göre konumunu $\vec{r}$ vektörü ile, xyz koordinat ekseninin merkezine göre konumunu $\vec{r}'$ vektörü ile, O noktasının xyz eksenine göre konumunu da $\vec{R}$ vektörü ile gösterelim.

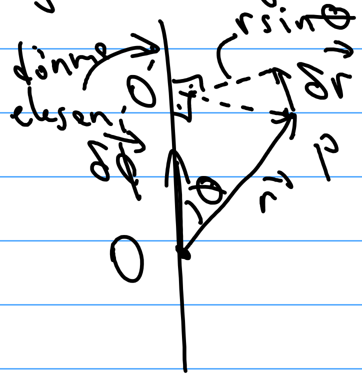


$$\vec{r}' = \vec{R} + \vec{r}$$

P noktasının δt süresi içinde konumundaki değişim hem O noktasının ötelenmesinden hem de O noktasından geçen eksen etrafındaki dönmeden kaynaklanacaktır.

$$\delta\vec{r}' = \delta\vec{R} + \delta\vec{r}$$

δt süreci içinde katı cismimiz $\delta\phi$ kadar dönmüş olsun. $\delta\vec{\phi}$ vektörün, dönme ekseni doğrultusunda ve büyüklüğü $|\delta\vec{\phi}| = \delta\phi$ olacak şekilde tanımlayalım. Dönme ekseni iki farklı yön belirleyecektir. $\delta\vec{\phi}$'nin yönünü kesin olarak belirleyebilmek için sağ el kuralını kullanırız: sağ elinizle dönme eksenini, dört parmağınız katı cismin üzerindeki noktaların hareket doğrultusunda olacak şekilde, kavrayın; baş parmağınız $\delta\vec{\phi}$ vektörünün yönünü gösterir.



Dönme sırasında P noktası O' noktası etrafında $r\sin\theta$ yarıçaplı bir çember üzerinde hareket edecektir. $\delta\phi$ çok küçük ise

$$|\delta\vec{r}| = (r\sin\theta)\,\delta\phi$$

olacaktır.

θ açısı, $\delta\vec{\phi}$ vektörü ile $\vec{r}$ vektörü arasındaki açıdır. Dolayısıyla

$$|\delta\vec{\phi}\times\vec{r}| = |\vec{r}||\delta\vec{\phi}|\sin\theta$$
$$= r\,\delta\phi\,\sin\theta$$
$$= |\delta\vec{r}|$$

olacaktır. $\delta\vec{\phi}\times\vec{r}$ vektörünün yönü de sağ el kuralı ile hesaplanacak olursa bu yönün $\delta\vec{r}$ vektörünün yönü ile aynı olacağı da görünür. $\delta\vec{r}$ ve $\delta\vec{\phi}\times\vec{r}$ vektörleri aynı yönde ve aynı boyda vektörler olduğundan bu iki vektör aynıdır:

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{\phi}\times\vec{r}$$

Dolayısıyla

$$\delta\vec{r}\,' = \delta\vec{R} + \delta\vec{\phi}\times\vec{r}$$

olarak elde edilir. Bu eşitlik δt ye bölünürse

$$\frac{\delta \vec{r}\,'}{\delta t} = \frac{\delta \vec{R}}{\delta t} + \frac{\delta \vec{\phi}}{\delta t} \times \vec{r}$$

$$\vec{v}\,' = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{v}\,' \equiv \frac{\delta \vec{r}\,'}{\delta t}, \quad \vec{V} \equiv \frac{\delta \vec{R}}{\delta t}, \quad \vec{\Omega} \equiv \frac{\delta \vec{\phi}}{\delta t}$$

olarak elde edilir. $\vec{\Omega}$ açısal hız vektörü olarak adlandırılır. Yukarıdaki ifadeyi elde ederken $x_1 x_2 x_3$ koordinat eksenlerinin merkezini herhangi bir O noktası olarak seçmiştik. İstersek başka bir O_1 noktasını da seçebilirdik. O_1 noktasının O'ya göre konumunu $\vec{a}$ vektörü ile gösterelim. R_1, O_1 noktasının xyz koordinat eksenine göre konumu olsun. Herhangi bir P noktası olalım. P noktasının O_1'e göre konumunu da $\vec{r}_1$ ile gösterelim. Dolayısıyla

$$\vec{v}\,' = \vec{V}_1 + \vec{\Omega}_1 \times \vec{r}_1 \qquad (*)$$

olacaktır. Burada $\vec{V}_1$, O_1 noktasının xyz koordinat eksenine göre hızı, $\vec{\Omega}_1$ katı cismin O_1'den geçen bir eksen etrafındaki dönmesinin açısal hız vektörüdür.

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}$$

eşitliğini, daha önce elde ettiğimiz

$$\vec{v}\,' = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

denklemine yerleştirirsek

$$\vec{v}\,' = \vec{V} + \vec{\Omega}\times\vec{a} + \vec{\Omega}\times\vec{r}_1 \qquad (**)$$

elde ederiz. (*) ve (**) eşitlikleri her $\vec{r}_1$ için sağlanmalıdır. Dolayısıyla

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_1$$

$$\vec{V}_1 = \vec{V} + \vec{\Omega}\times\vec{a}$$

olmalıdır. Buradaki ikinci eşitlik (*)'dan da elde edilebilir, birinci eşitlik ise bize önemli bir bilgi verir: dönme hız vektörü, katı cismimizin üzerinde sabitlediğimiz $x_1 x_2 x_3$ eksenlerinin merkezini neresi seçtiğimizden bağımsızdır. Açısal hız vektörü, katı cismimizin bir özelliğidir.

Yukarıdaki ikinci eşitlikten

$$\vec{\Omega}\cdot\vec{V}_1 = \vec{\Omega}\cdot\vec{V}$$

elde ederiz. Bir başka deyişle, seçilen herhangi bir O merkezi için $\vec{\Omega}$ ve $\vec{V}$ vektörleri birbirine dikse, başka bir merkez seçsek bile, $\vec{\Omega}$ ve $\vec{V}_1$ vektörleri dik olacaktır. Ayrıca bu durumda $\vec{a}$ vektörünü öyle seçebiliriz ki

$$\vec{V}_1 = 0 \Rightarrow \vec{V} = -\vec{\Omega}\times\vec{a}$$

olsun. $\vec{a}$ noktasını belirlediği noktadan geçen dönme ekseni anlık olarak durağan olan bir dönme eksenidir.

Lagranj fonksiyonunu elde edebilmek için, öncelikle katı cismimizin kinetik enerjisini elde etmemiz gerekir. Katı cismimiz üzerindeki herhangi bir noktanın, eylemsiz referans sistemine göre hızını

$$\vec{v}' = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

olarak yazabileceğimizi görmüştük. Katı cismimizin noktasal parçacıklardan olduğunu düşünürsek, kinetik enerjiyi

$$T = \sum \frac{1}{2} m \vec{v}'^2$$

olarak yazabiliriz. Burada m, hızı $\vec{v}'$ olan noktasal parçacığın kütlesidir. (nesnemizi noktasal parçacıkların toplamı yerine, sürekli olarak düşünürsek yukarıdaki toplamı integrale çevirmemiz gerekir.

$$\sum m \longrightarrow \int dV \rho \,)$$

$$\vec{v}' = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

ifadesini yerleştirirsek

$$T = \sum \frac{1}{2} m \vec{v}'^2 = \sum \frac{1}{2} m \left(\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}\right)^2$$

$$= \sum \frac{1}{2} m \left[\vec{V}^2 + (\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 + 2\vec{V} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum m\right)\vec{V}^2 + \sum \frac{1}{2} m (\vec{\Omega} \times \vec{r})^2$$

$$+ \vec{V} \cdot \left[\vec{\Omega} \times \left(\sum m \vec{r}\right)\right]$$

elde ederiz. İki özel durum için son terim katkı vermez:

i) $\vec{V}=0$ ise, yanı dönme ekseni durağansa

ii) O noktası kütle merkezi ise: $\sum m\vec{r}=0$

Bu iki durumda da kinetik enerjiyi

$$T=\frac{1}{2}\left(\sum m\right)\vec{V}^2+\sum \frac{1}{2}m\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)^2$$

olarak yazabiliriz.

$$(\vec{A}\times\vec{B})^2=A^2B^2-\vec{A}\cdot\vec{B}$$

vektör özdeşliğini kullanırsak, kinetik enerji

$$T=\frac{1}{2}\mu\vec{V}^2+\frac{1}{2}\sum m\left(\Omega^2r^2-(\vec{\Omega}\cdot\vec{r})^2\right)$$

halini alır. Burada $\mu=\sum m$ katı cismimizin toplam kütlesidir.

$$\vec{\Omega}\cdot\vec{r}=\sum_{k=1}^{3}\Omega_k x_k$$

ve

$$\Omega^2=\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}=\sum_{k=1}^{3}\Omega_k^2=\sum_{k,l=1}^{3}\Omega_k\Omega_l\delta_{kl}$$

eşitliklerini kullanırsak

$$\left(\delta_{kl}=\begin{cases}1 & \text{eğer } k=l \text{ ise}\\ 0 & \text{eğer } k\neq l \text{ ise}\end{cases}\right)$$

$$T=\frac{1}{2}\mu\vec{V}^2+\frac{1}{2}\sum_{kl}\left[\sum m\left(r^2\delta_{kl}-x_kx_l\right)\right]\Omega_k\Omega_l$$

halini alır.

Eylemsizlik momenti tensörünü

$$I_{kl} = \sum m(r^2\delta_{kl} - x_k x_l)$$

olarak tanımlarsak, kinetik enerji ifademiz

$$T = \frac{1}{2}\mu\vec{V}^2 + \sum_{kl}\frac{1}{2}I_{kl}\Omega_k\Omega_l$$

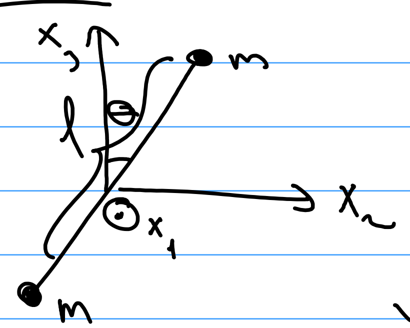
halini alır. Yukarıdaki k ve l toplamları tensör bileşenleri üzerinden bir toplamdır. Genelde yazılmazlar ve kinetik enerji ifadesi

$$T = \frac{1}{2}\mu\vec{V}^2 + \frac{1}{2}I_{kl}\Omega_k\Omega_l$$

olarak yazılır. Herhangi bir çarpımda bileşenleri gösteren indeks iki kere tekrarlanıyorsa, o indeks üzerinden bir toplam anlaşılmalıdır:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_k B_k$$
$$\vec{A}^2 = A_k^2$$

Örnek



Noktasal iki m kütlesi, kütlesiz uzunluğu l olan bir katı çubuk ile tutturulmuş olsun. $x_1 x_2 x_3$ eksenleri ise şekilde verildiği gibi olsun. Eylemsizlik momentini hesaplayalım.

Bileşenleri cinsinden açıkça yazarsak, eylemsizlik momentini

$$I = \sum m \begin{pmatrix} x_2^2 + x_3^2 & -x_1 x_2 & -x_1 x_3 \\ -x_1 x_2 & x_1^2 + x_3^2 & -x_2 x_3 \\ -x_1 x_3 & -x_2 x_3 & x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

olarak yazabiliriz. x_1, x_2, x_3 kütlelerinin konumlarının x_1, x_2, x_3 bileşenleri cinsinden ifadesi

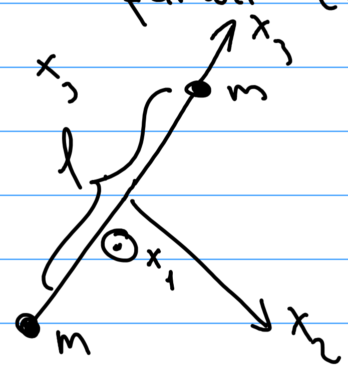
$$\vec{r}_1 = \frac{l}{2}\left(\sin\theta\, \hat{x}_2 + \cos\theta\, \hat{x}_3\right)$$

$$\vec{r}_2 = -\frac{l}{2}\left(\sin\theta\, \hat{x}_2 + \cos\theta\, \hat{x}_3\right)$$

olarak yazılabilir. I'nın tanımında yerleştirirsek

$$I = \frac{ml^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ 0 & -\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

<u>Örnek</u> Yukarıdaki problemde, $x_1 x_2 x_3$ eksenlerini farklı tanımlayıp, yine hesaplayalım



Bu eksenlere göre m kütlelerinin konum vektörlerini

$$\vec{r}_1 = \frac{l}{2}\hat{x}_3 \quad \text{ve} \quad \vec{r}_2 = -\frac{l}{2}\hat{x}_3$$

olarak gösterebiliriz. Bu durumda eylemsizlik momentı

$$I = \frac{ml^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

Yukarıdaki iki örnekte, $x_1 x_2 x_3$ eksenlerini uygun bir şekilde seçerek, eylemsizlik momentinin köşegensel bir halde yazılabileceğini gördük. Bu yukarıdaki örneğe has bir durum değildir. Eylemsizlik moment tensörü, tanımından da görülebileceği gibi simetrik bir tensördür:

$$I_{kl} = I_{lk}$$

Her simetrik tensör, uygun bir koordinat ekseni dönüşümü ile köşegen bir hale getirilebirir.

Eylemsizlik momenti tensörünü köşegensel hale getiren eksenlere temel dönme eksenleri denir. Eğer bir katı cismin bir simetri ekseni varsa cismi kütle merkezi bu eksenin üzerindedir ve temel dönme eksenlerinden birisi de bu eksen üzerindedir.

$x_1 x_2 x_3$ eksenlerini temel dönme eksenleri üzerinde seçersek, kinetik enerji ifademiz

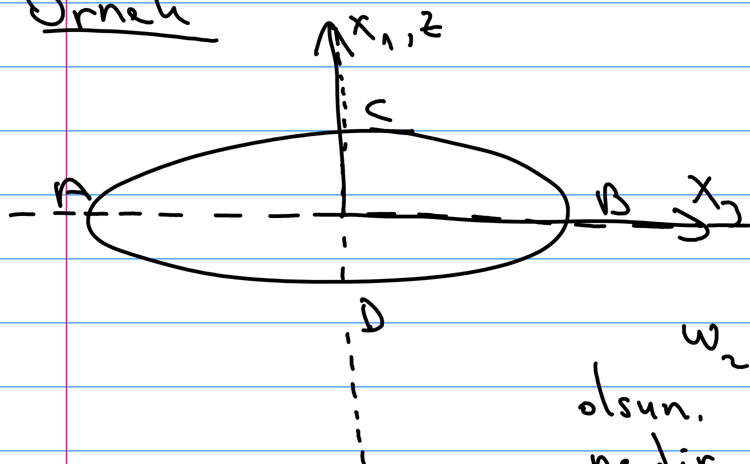
$$T = \frac{1}{2}\mu \vec{V}^2 + \frac{1}{2} I_1 \Omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \Omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \Omega_3^2$$

halini alır.

Bir katı cisim için $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$ ise, birbaşka deyişle I_1, I_2 ve I_3 birbirinden farklı ise böyle bir cisme asimetrik topaç denir.

Eğer ikisi birbirine eşit ve üçüncüden farklı ise, $I_1 = I_2 \neq I_3$, bu cisme simetrik topaç,
hepsi birbirine eşitse, $I_1 = I_2 = I_3$,
küresel topaç denir.
Eğer herhangi iki temel dönme eksenine karşılık gelen $I_1 = I_2$ ise, bu iki eksenin seçimi farklı şekillerde yapılabilir. Bu iki ekseni düzlemlerini değiştirmeden döndererek elde edilen eksenler de temel dönme eksenleridir.

Örnek

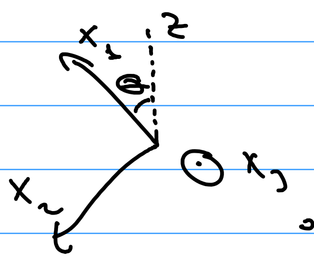


Şekildeki küresel topaç AB ekseni etrafında w_1 açısal hızı ile dönerken, CD ekseni etrafında ise w_2 açısal hızı ile dönüyor olsun. Cismin kinetik enerjisi nedir.

x_1, x_3 ve z eksenlerini şekilde gösterildiği gibi seçelim. (Belli bir anda x_1 ve z eksenleri çakışık olsa da x_1 ekseni katı cisimle beraber döneceğinden, bu çakışıklık sadece bir anliktır.
Cismin açısal hız vektörünü

$$\vec{\Omega} = w_1 \hat{x}_3 + w_2 \hat{z}$$

olarak yazabiliriz. Belli bir anda x_1 ekseni z ekseni ile θ açısı yapıyor olsun



$$w_2 = \dot{\theta}$$

$$\hat{z} = \cos\theta \, \hat{x}_1 + \sin\theta \, \hat{x}_2$$

olacaktır.

Dolayısıyla

$$\vec{\Omega} = w_1 \hat{x}_3 + w_2 \left(\cos\theta \, \hat{x}_1 - \sin\theta \, \hat{x}_2 \right)$$

olacaktır. Buradan da

$$\Omega_1 = w_2 \cos\theta \; ; \; \Omega_2 = -w_2 \sin\theta \; ; \; \Omega_3 = w_1$$

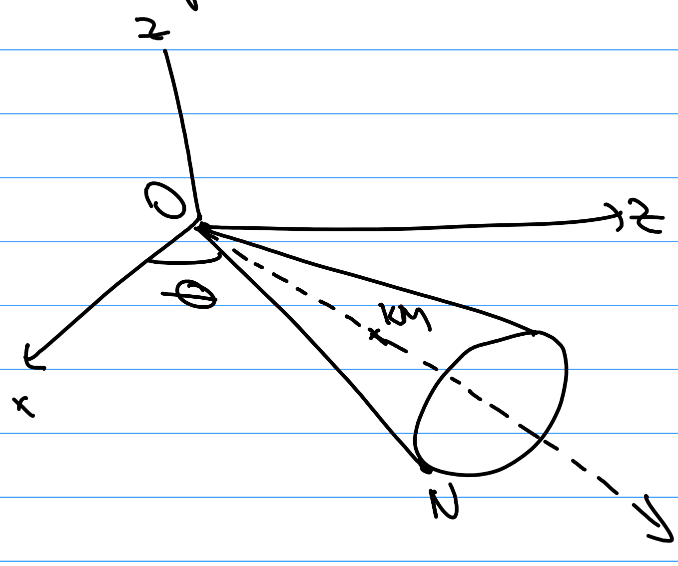
olarak yazılabilir. Kinetik enerjisi de

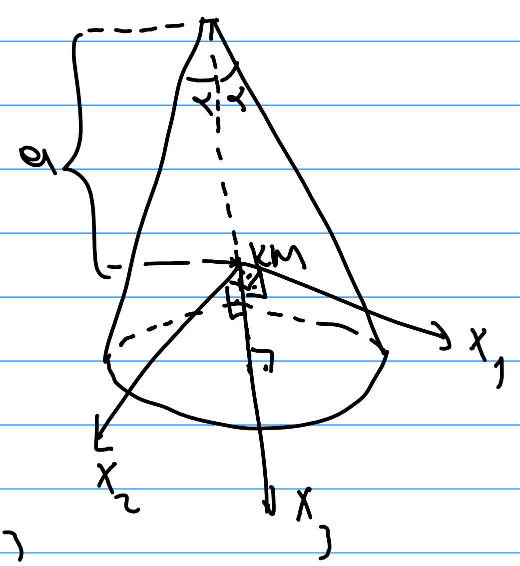
$$T = \frac{1}{2} I_1 (w_2 \cos\theta)^2 + \frac{1}{2} I_2 (-w_2 \sin\theta) + \frac{1}{2} I_3 (w_1)^2$$

$$= \frac{1}{2} I_1 w_2^2 + \frac{1}{2} I_3 w_1^2$$

olarak bulunur. Son eşitlikte $I_1 = I_2$ olduğunu kullandık.

<u>Örnek</u> Tepe açısı 2α olan bir koninin tepe noktası sabit olmak üzere xy düzleminde yuvarlanırsa dönme kinetik enerjisi nedir?





ON çizgisi koninin xy düzlemine temas ettiği noktaların bütünü olsun. x_3 ekseni etrafındaki dönme açısına ϕ diyelim. Açısal hız vektörünü

$$\vec{\Omega} = \dot{\phi}\,\hat{x}_3 + \dot{\theta}\,\hat{z}$$

olarak yazabiliriz. $\hat{z}$ birim vektörünü

$$\hat{z} = \sin\alpha\,\hat{x}_3 + \cos\alpha\cos\phi\,\hat{x}_1 - \cos\alpha\sin\phi\,\hat{x}_2$$

olarak yazabiliriz. Dolayısıyla açısal hız vektörümüz

$$\vec{\Omega} = \hat{x}_1\,\dot{\theta}\cos\alpha\cos\phi - \hat{x}_2\,\dot{\theta}\cos\alpha\sin\phi + \hat{x}_3\,(\dot{\theta}\sin\alpha + \dot{\phi})$$

halini alır.

Buradan da dönme kinetik enerjisi

$$T_{dönme} = \frac{1}{2} I_1\,\dot{\theta}^2\cos^2\alpha + \frac{1}{2} I_3\,(\dot{\theta}\sin\alpha + \dot{\phi})^2$$

olarak yazılabilir. Toplam kinetik enerjiyi yazabilmek için, kütle merkezinin ötelemesinden kaynaklı kinetik enerjiyi de bu ifadeye eklememiz gerekir.

xyz eksenlerinin merkezine göre kütle merkezinin konumunu $\vec{r}_{km} = a\,\hat{x}_3$ olarak yazabiliriz. Bu nokta aynı zamanda katı cismimizin üzerinde durağan bir noktadır. Bu noktaya göre kütle merkezinin hız vektörü

$$\vec{v}_{km} = \vec{\Omega}\times\vec{r}$$

$$= \left[\hat{x}_1\,\dot{\theta}\cos\alpha\cos\phi - \hat{x}_2\,\dot{\theta}\cos\alpha\sin\phi + \hat{x}_3\,(\dot{\theta}\sin\alpha + \dot{\phi})\right]\times a\,\hat{x}_3$$

$$= -\hat{x}_2\,(a\,\dot{\theta}\cos\alpha\cos\phi) - \hat{x}_1\left[\dot{\theta}\,a\cos\alpha\sin\theta\right]$$

$$\vec{V}_{km} = -a\dot{\theta}\cos\alpha \left[\hat{x}_2 \cos\phi + \hat{x}_1 \sin\phi \right]$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla kütle merkezinin öteleme kinetik enerjisi

$$T_{öteleme} = \frac{1}{2}\mu a^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\alpha$$

olarak bulunur. Toplam kinetik enerji de

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 \cos^2\alpha + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\theta}\sin\alpha + \dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}\mu a^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\alpha$$

olarak elde edilir. Eğer cisim kaymadan dönüyorsa, $\dot{\theta}$ ile $\dot{\phi}$ birbirleri ile ilişkili olacaktır:

$$\frac{\cancel{a}\,\delta\theta}{\cos\alpha} = -\delta\phi\,\cancel{a}\tan\alpha$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = -\dot{\phi}\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = -\frac{\dot{\theta}}{\sin\alpha}$$

$$\dot{\theta}\sin\alpha + \dot{\phi} = \dot{\theta}\sin\alpha - \frac{\dot{\theta}}{\sin\alpha} = -\dot{\theta}\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$$

olur ve kinetik enerji de

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 \cos^2\alpha + \frac{1}{2} I_3 \dot{\theta}^2 \frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{2}\mu a^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\alpha$$

halini alır.

Bazı durumlarda eylemsizlik momentini kütle merkezi yerine bir başka noktaya göre hesaplamak daha kolaydır. Bu noktanın kütle merkezine göre konum vektörü $\vec{a}$ olsun. Bu durumda kütle merkezine göre konumu $\vec{r}$ olan bir parçacığın, diğer noktaya göre konumu $\vec{r}\,'$ ise

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{a} \quad \text{veya} \quad \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{a}$$

Yeni merkeze göre eylemsizlik momentini de

$$I'_{kl} = \sum m \left(r'^2 \delta_{kl} - x'_k x'_l \right)$$
$$= \sum m \left(r^2 \delta_{kl} - x_k x_l \right)$$
$$+ \sum m \left(a^2 \delta_{kl} - a_k a_l \right)$$
$$- \sum m \left(2\vec{a}\cdot\vec{r}\,\delta_{kl} - x_k a_l - a_k x_l \right)$$

olarak elde ederiz. $\vec{r}$, kütle merkezine göre konum olduğunda

$$\sum m\vec{r} = 0 \quad ; \quad \sum m x_k = 0$$

olacaktır. Dolayısıyla

$$I'_{kl} = \sum m \left(r^2 \delta_{kl} - x_k x_l \right) + \sum m \left(a^2 \delta_{kl} - a_k a_l \right)$$

$$I'_{kl} = I_{kl} + \mu \left(a^2 \delta_{kl} - a_k a_l \right)$$

olacaktır.

Açısal Momentum

Daha önce noktasal bir parçacığın açısal momentumunu

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$$

olarak tanımlamıştık. Katı cismimizin açısal momentumunu

$$\vec{M} = \sum \vec{r}' \times (m\vec{v}')$$
$$= \sum m (\vec{r} + \vec{R}) \times (\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r})$$
$$= \sum m [\vec{r} \times \vec{V} + \vec{r} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \vec{R} \times \vec{V} + \vec{R} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})]$$
$$= \left(\sum m\vec{r}\right) \times \vec{V} + \sum m \vec{r} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \left(\sum m\right) \vec{R} \times \vec{V} + \vec{R} \times \left[\vec{\Omega} \times \left(\sum m\vec{r}\right)\right]$$
$$= \left(\sum m\vec{r}\right) \times \vec{V} + \sum m \left(\vec{\Omega} r^2 - \vec{r}(\vec{\Omega} \cdot \vec{r})\right) + \mu \vec{R} \times \vec{V} + \vec{R} \times \left[\vec{\Omega} \times \left(\sum m\vec{r}\right)\right]$$

$x_1x_2x_3$ eksenlerinin merkezini kütle merkezi olarak seçersek

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{P} + \sum m \left(\vec{\Omega} r^2 - \vec{r}(\vec{\Omega} \cdot \vec{r})\right)$$

olarak elde ederiz. Burada $\vec{P} = \mu \vec{V}$ katı cismimizin toplam kütlesidir. Açısal momentumun k bileşenine bakacak olursak

$$M_k = (\vec{R} \times \vec{P})_k + \sum m (\delta_{kl} r^2 - x_k x_l) \Omega_l$$

$$M_k = (\vec{R} \times \vec{P})_k + I_{kl} \Omega_l$$

elde ederiz. Vektörel olarak yazarsak

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{P} + I \vec{\Omega}$$

Buradaki ilk terim, katı cismimizin öteleme hareketinden kaynaklı açısal momentumudur. İkinci terim ise kütle merkezi etrafındaki dönmesinden kaynaklı açısal momentumdur.

Eğer katı cisme etki eden harici bir net kuvvet yoksa, kütle merkezinin durağan olduğu bir referans sistemi bulabiliriz. Bu referans sisteminde

$$\vec{M} = I\vec{\Omega}$$

olacaktır. Eğer $x_1 x_2 x_3$ eksenlerini temel dönme eksenleri olarak seçersek

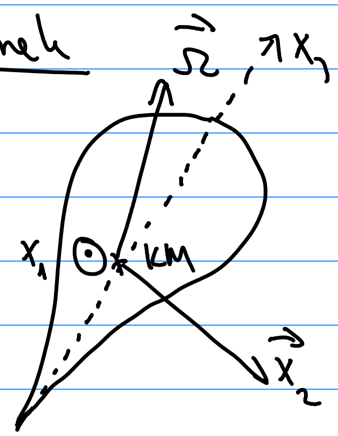
$$M_1 = I_1 \Omega_1$$

$$M_2 = I_2 \Omega_2$$

$$M_3 = I_3 \Omega_3$$

elde ederiz. Eğer küresel bir topacımız yoksa, veya $\vec{\Omega}$ temel dönme yönlerinden biri değilse $\vec{M}$ ile $\vec{\Omega}$ aynı yönde değildir.

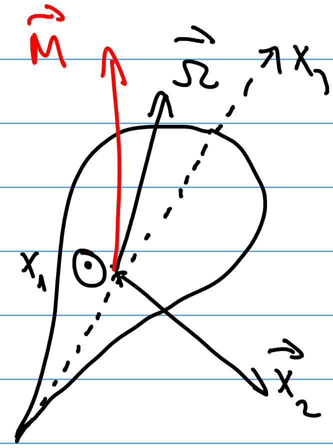
<u>Örnek</u>



Şekilde gösterilen simetrik topacın açısal hız vektörü şekildeki gibi olsun. x_3 simetri eksenindeki temel dönme yönü olsun. x_1 ve x_2 yönleri x_3'e ve birbirlerine dik herhangi iki yön olabilir. Bu serbestliği kullanarak x_2''yi $\vec{\Omega}$ vektörü $x_2 x_3$ düzleminde kalacak şekilde seçelim. Bu durumda

$$\Omega_1 = 0$$

olacaktır, dolayısıyla da $M_1 = 0$ olacaktır. Yani $\vec{M}$ açısal momentum vektörü de $x_2 x_3$ düzleminde olacaktır.



Açısal momentum, izole bir sistem için korunduğu için M_2 her zaman için sıfır olacaktır. Dolayısıyla Ω_2'de her zaman için sıfır olacaktır.

$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$ olduğundan, her noktanın hız vektörü sayfa düzlemine diktir. Bunun anlamı simetrik topacın açısal momentum vektörünün $\vec{M}$ etrafında düzgün bir şekilde dolanacağıdır.