Katı cisimlerin dinamiği

Katı cisimlerin konum ve yönelimini belirlemek için 6 koordinata ihtiyaç duyduğumuzu daha önce belirtmiştik. Bu 6 koordinat için 6 hareket denklemine ihtiyaç vardır. Bu altı denklemi, iki tane vektörel denklem olarak yazabiliriz.

Öncelikle sistemin toplam momentumunun değişimine bakalım.

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum \vec{f}_i = \vec{F}$$

Burada $\vec{F}$ sisteme etki eden toplam kuvvettir. $\vec{f}_i$ sistemin i parçasına etki eden kuvvettir ve sistemin diğer parçalarının i. parçacığa uyguladıkları kuvveti de içerir. Dolayısıyla $\vec{F}$ ifadesinin içinde sanki sistemin iç kuvvetlerinin katkısı da var gibi görünmektedir. Oysa toplam momentumun korunumundan, iç vektörlerin toplamı sıfır olmalıdır. Dolayısıyla

$$\vec{F} = \sum \vec{f}_i$$

toplamına sadece sisteme etki eden dış kuvvetler katkı verir.

Yukarıdaki denklemi, Euler Lagrange denklemi olarak da yazabiliriz.

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{\dot{R}}} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{\dot{r}}_i} \frac{\partial \vec{\dot{r}}_i}{\partial \vec{\dot{R}}} = \sum \vec{p}_i \equiv \vec{P}$$

olduğunu daha önce görmüştük. Sistemin bir bütün olarak $\delta\vec{R}$ kadar ötelendiğini düşünelim. Sistemi oluşturan bütün parçacıkların konumu $\delta\vec{R}$ kadar değişecektir: $\delta\vec{r}_i = \delta\vec{R}$

Sistemin potansiyelindeki değişim

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta\vec{r}_i = \left(\sum -\vec{f}_i\right) \delta\vec{R}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \vec{R}} = \sum(-\vec{f}_i) = -\vec{F}$$

olacaktır. $L = \sum \frac{1}{2} m_i \vec{\dot{r}}_i^{\,2} - U$

olduğundan

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{R}} = -\frac{\partial L}{\partial \vec{R}}$$

olarak yazılabilir. Buradan da

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{\dot{R}}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{R}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{\dot{R}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{R}} = 0$$

olacaktır.

Şimdi de kütle merkezine göre açısal momentumun zamanla değişimine bakalım.

$$\vec{M} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Burada $\vec{r}_i$, sistemin i. parçasının kütle merkezine göre konumu, $\vec{p}_i$ ise herhangi bir eylemsiz referans sisteminde i. parçanın doğrusal momentumudur.

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right)$$

olacaktır. Kütle merkezi eylemsiz referans sistemine göre $\vec{V}$ hızıyla gidiyor olsun. Bu durumda

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\vec{p}_i}{m_i} - \vec{V}$$

olacaktır. Buradan $\vec{p}_i \times \vec{p}_i = 0$ olduğunu da kullanırsak

$$\frac{dM}{dt} = -\sum \vec{V} \times \vec{p}_i + \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_i$$

$$= -\vec{V} \times \left(\sum \vec{p}_i \right) + \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_i$$

$$= -\vec{V} \times \vec{P} + \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_i$$

$$= -\vec{V} \times (\mu \vec{V}) + \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_i$$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_i$$

elde ederiz. $\vec{r}_i \times \vec{f}_i'$ ye f_i kuvvetinin momentidir. $\sum \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \vec{K}$ ise sisteme etki eden torktur.

Referans noktamızı $\vec{a}$ kadar kaydırdığımızı varsayalım. Bu durumda

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{a}$$

olarak yazılabilir. Bu iki referans noktasına göre tork ifadelerini kıyaslarsak

$$\vec{K}' = \sum \vec{r}_i\,' \times \vec{f}_i = \sum \vec{r} \times \vec{f}_i - \sum \vec{a} \times \vec{f}_i$$

$$\Rightarrow \vec{K}' = \vec{K} - \vec{a} \times \vec{F}$$

elde ederiz. Yukarıdaki denklemde de göründüğü gibi, eğer sisteme etki eden net kuvvet $\vec{F}$ sıfır ise, sisteme etki eden tork referans noktasından bağımsız olur.

Eğer $\vec{K}$ tork vektörü ile $\vec{F}$ birbirine dik ise, her zaman için öyle bir $\vec{a}$ vektörü bulabiliriz ki,

$$\vec{K} = \vec{a} \times \vec{F}$$

olarak yazılabilsin. Bir başka deyişle, sisteme etki eden bütün kuvvet sanki tek bir noktaya etki ediyor gibi düşünebiliriz.

Bunun bir örneği homojen bir elektrik alanı ya da homojen bir kütleçekim alanıdır.

$$\vec{f}_i = m_i \vec{g}$$

olsun. Bu durumda sisteme etki eden tork

$$\vec{K} = \sum \vec{r}_i \times (m_i \vec{g})$$
$$= \left(\sum m_i \vec{r}_i\right) \times \vec{g}$$
$$= \vec{R} \times \vec{F}$$

burada $\vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$ $\quad \vec{F} = \left(\sum m_i\right) \vec{g}$

olarak tanımladık.

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}$$

denklemini de Euler Lagranj denklemi şeklinde yazabiliriz:

$$\vec{M} = \frac{\partial L}{\partial \vec{\Omega}}$$

olacaktır. Bir dönme altında sistemin potansiyelindeki değişim

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \cdot (\delta \vec{\phi} \times \vec{r}_i)$$
$$= \sum -\vec{f}_i \cdot (\delta \vec{\phi} \times \vec{r}_i)$$
$$= -\sum \delta \vec{\phi} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{f}_i)$$
$$= -\delta \vec{\phi} \cdot \vec{K}$$

Dolayısıyla tork vektörünü

$$\vec{K} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{\phi}}$$

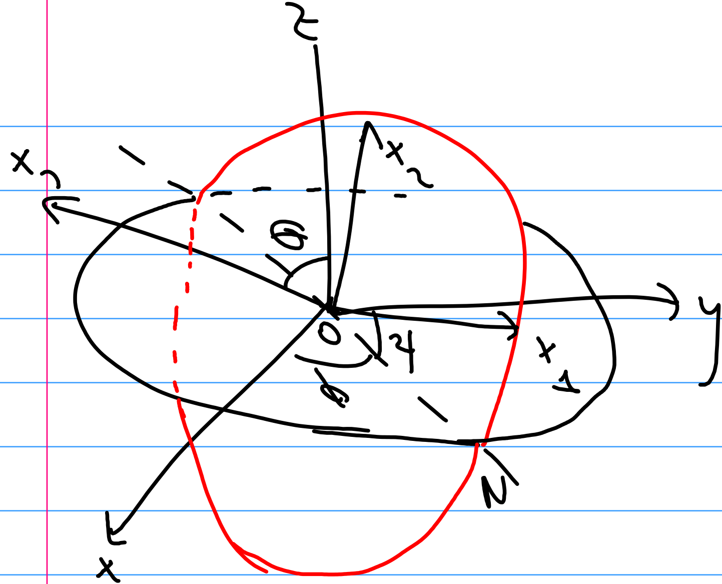
olarak yazabiliriz. Dolayısıyla

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{\Omega}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{\phi}} = 0$$

elde ederiz.

Euler Açıları

Katı cisimlerin yönelimini belirlemek için herhangi genelleştirilmiş koordinatlar kullanılabilir. Sıkça kullanılan genelleştirilmiş koordinatlar Euler açılarıdır.
Katı cismin yönelimini belirlemek için, $x_1 x_2 x_3$ koordinat eksenlerinin yönelimini belirlememiz yeterlidir. $x_1 x_2 x_3$ ile xyz koordinat eksenlerinin merkezleri çakışık olsun. x_3 ekseni ile z ekseninin arasındaki açı θ olsun. $x_1 x_2$ düzlemi ile xy düzlemi birbirlerini bir doğru boyunca kesecektir.
Bu eksenin pozitif yönünü $\hat{z} \times \hat{x}_3$ olarak seçelim.
Bu doğrunun x ekseni ile yaptığı açıya ϕ, x_1 ekseni ile yaptığı açıya da ψ diyelim.
$\hat{x} \cdot (\hat{z} \times \hat{x}_3) = \cos\phi$, $\hat{x}_1 \cdot (\hat{z} \times \hat{x}_3) = \cos\psi$
θ, ϕ ve ψ açıları $x_1 x_2 x_3$ koordinat ekseninin yönelimini belirlemek için yeterlidir.



ON doğrultusu $\hat{z} \times \hat{x}_3$ olarak hesaplanabilir.
$\dot{\theta}$ açısal hızı ON,
$\dot{\phi}$ açısal hızı $\hat{z}$,
$\dot{\psi}$ açısal hızı $\hat{x}_3$
yönündedir.

Dolayısıyla açısal hız vektörünü

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta}\,\hat{n} + \dot{\phi}\,\hat{z} + \dot{\psi}\,\hat{x}_3$$

olarak yazabiliriz. Burada $\hat{n} = (\hat{z} \times \hat{x}_3) / |\hat{z} \times \hat{x}_3|$ olarak tanımlanmıştır.

Kinetik enerjiyi eylemsizlik momenti cinsinden ifade edebilmek için $\hat{n}$ ve $\hat{z}$ vektörlerini $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ ve $\hat{x}_3$ birim vektörleri cinsinden yazmamız gerekir:

$$\hat{n} = \cos\psi\,\hat{x}_1 - \sin\psi\,\hat{x}_2$$
$$\hat{z} = \cos\theta\,\hat{x}_3 + \sin\theta\sin\psi\,\hat{x}_1 + \sin\theta\cos\psi\,\hat{x}_2$$

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} = {} & \hat{x}_1(\cos\psi\,\dot{\theta} + \sin\theta\sin\psi\,\dot{\phi}) \\ & + \hat{x}_2(-\sin\psi\,\dot{\theta} + \sin\theta\cos\psi\,\dot{\phi}) \\ & + \hat{x}_3(\dot{\psi} + \cos\theta\,\dot{\phi})\end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$\Omega_1 = \cos\psi\,\dot{\theta} + \sin\theta\,\sin\psi\,\dot{\phi}$$
$$\Omega_2 = -\sin\psi\,\dot{\theta} + \sin\theta\,\cos\psi\,\dot{\phi}$$
$$\Omega_3 = \dot{\psi} + \cos\theta\,\dot{\phi}$$

$x_1 x_2 x_3$ eksenlerini temel dönme eksenleri olarak seçersek, kinetik enerjiyi

$$T = \frac{1}{2} I_1 \left(\cos\psi\, \dot\theta + \sin\theta \sin\psi\, \dot\phi\right)^2$$
$$+ \frac{1}{2} I_2 \left(-\sin\psi\, \dot\theta + \sin\theta \cos\psi\, \dot\phi\right)^2$$
$$+ \frac{1}{2} I_3 \left(\dot\psi + \cos\theta\, \dot\phi\right)^2$$

olarak yazabiliriz. Simetrik bir topaç için ($I_1 = I_2$)

$$T = \frac{1}{2} I_1 \left(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\, \dot\phi^2\right) + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot\psi + \cos\theta\, \dot\phi\right)^2$$

elde ederiz

<u>Örnek</u> serbest bir simetrik topaç için, hareket denklemlerini çözün.

<u>Çözüm</u> Serbest bir simetrik topacın Lagranj fonksiyonu

$$L = \frac{1}{2} I_1 \left(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\, \dot\phi^2\right) + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot\psi + \cos\theta\, \dot\phi\right)^2$$

olarak yazılabilir.

ϕ ve ψ siklik koordinatlardır. Dolayısıyla karşılık gelen momentumlar korunacaktır

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = I_1 \sin^2\theta\, \dot\phi + I_3 \cos\theta \left(\dot\psi + \cos\theta\, \dot\phi\right)$$
$$= I_1 \sin\theta \left(\sin\psi\, \Omega_1 + \cos\psi\, \Omega_2\right) + I_3 \cos\theta\, \Omega_3$$

$$p_\phi = \sin\theta \sin\psi\, M_1 + \sin\theta \cos\psi\, M_2 + \cos\theta\, M_3$$

$$p_\phi = M_z$$

ve

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = I_3(\dot\psi + \cos\theta\,\dot\phi) = I_3\Omega_3 = M_3$$

Sistemin açısal momentumunu z yönünde seçersek

$$p_\phi = M, \quad p_\psi = M\cos\theta$$

olacaktır. Her M hem p_ψ korunan, yani zamanla değişmeyen nicelikler olduğundan, θ da zamanla değişmez

$$\cos\theta = \frac{p_\psi}{p_\phi} = \frac{M_3}{M}$$

olacaktır. ϕ ve ψ'in zamanla değişimleri ise

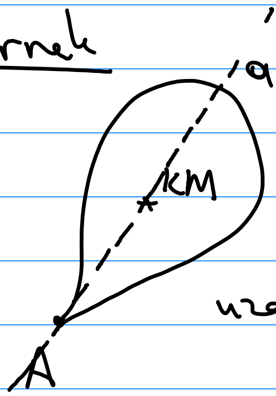
$$\dot\phi = \frac{1}{I_1\sin^2\theta}\left[M - M\cos^2\theta\right] = \frac{M}{I_1}$$

$$\dot\psi = \frac{M\cos\theta}{I_3} - \frac{M\cos\theta}{I_1} = M\cos\theta\left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1}\right)$$

$$\dot\psi = M_3\left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1}\right)$$

Bunun bize söylediği, simetrik topacın x_3 ekseni etrafında sabit bir açısal hızla dönerken ($\dot\psi$ = sabit) x_3 ekseninin de $\vec{M}$ etrafında sabit açısal hızla döndüğüdür ($\dot{\phi}$ = sabit)

Örnek



şekildeki simetrik topaçın A noktasının konumu sabittir hareketini inceleyin. (KM'nin A noktasına uzaklığı a olsun)

Kütle merkezinin doğrusal hızı

$$\vec{v} = (a\hat{x}_3 \times \vec{\Omega}) = a\hat{x}_3 \times (\Omega_1\hat{x}_1 + \Omega_2\hat{x}_2 + \Omega_3\hat{x}_3)$$
$$= a\left[\Omega_1(-\hat{x}_2) + \Omega_2\hat{x}_1\right]$$

olacaktır. Dolayısıyla KM'in ötelemesinden gelen kinetik enerjisi

$$T_{öteleme} = \frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2}\mu a^2(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)$$

olacaktır. Potansiyel enerjisini de

$$U = \mu g \cos\theta$$

olarak yazabiliriz. Bu durumda Lagranj fonksiyonu

$$L = \frac{1}{2}(I_1 + \mu a^2)(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \cos\theta\,\dot{\phi})^2 - \mu g\cos\theta$$

olur. Bir önceki örnekte olduğu gibi

P_ϕ ve P_ψ korunan momentumlardır:

$$P_\psi = I_3(\dot{\psi} + \cos\theta\,\dot{\phi})$$

$$P_\phi = (I_1 + \mu a^2)\sin^2\theta\,\dot{\phi} + I_3\cos\theta(\dot{\psi} + \cos\theta\,\dot{\phi})$$

Bu denklemlerden

$$\dot{\phi} = \frac{(p_\phi - \cos\theta\, p_\psi)}{(I_1 + \mu a^2)\sin^2\theta}$$

ve

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I_3} - \frac{\cos\theta\,(p_\phi - \cos\theta\, p_\psi)}{(I_1+\mu a^2)\sin^2\theta}$$

olarak bulunabilir. Sistemin enerjisi de korunan diğer niceliklerinden biridir:

$$E = \frac{1}{2}(I_1+\mu a^2)(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \cos\theta\,\dot{\phi})^2 + \mu g \cos\theta$$

Yukarıdaki $\dot{\psi}$ ve $\dot{\phi}$ ifadelerini kullanırsak

$$E = \frac{1}{2}(I_1+\mu a^2)\left[\dot{\theta}^2 + \frac{(p_\phi - \cos\theta\, p_\psi)^2}{(I_1+\mu a^2)^2\sin^2\theta}\right] + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + \mu g\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2}\tilde{\mu}\,\dot{\theta}^2 + V_{etk}(\theta)$$

elde ederiz. Burada

$$\tilde{\mu} = I_1 + \mu a^2$$

$$V_{etk}(\theta) = \frac{1}{2\tilde{\mu}}\frac{(p_\phi - \cos\theta\, p_\psi)^2}{\sin^2\theta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + \mu g\cos\theta$$

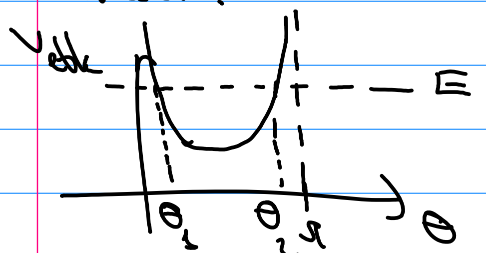
olarak tanımladık. Bu ise V_{etk} altında hareket eden tek serbestlik derecesine sahip sistemin enerjisidir. Böyle sistemleri incelerken daha önce geliştirdiğimiz yöntemleri burada da kullanabiliriz:

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{\tilde{\mu}}}\left(E - V_{etk}(\theta)\right)^{1/2}$$

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{\tilde{\mu}}}\left(E - V_{etk}(\theta)\right)^{1/2}} = t - t_0$$

Bu integral alınarak θ'nın zaman bağımlılığı elde edilebilir.

$V_{etk}(\theta)$, $\theta \to 0$ ve $\theta \to \pi$'ye giderken ıraksar.

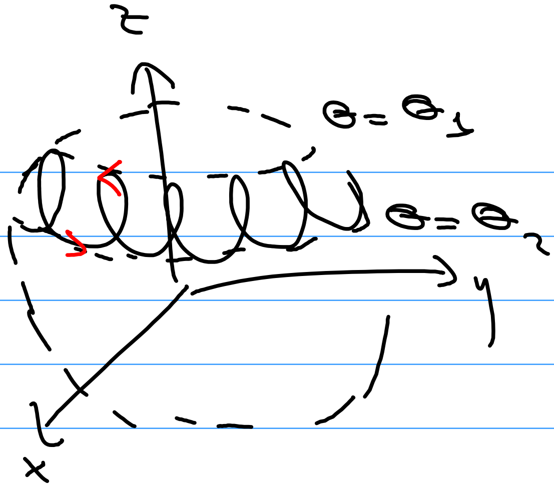


$E = V_{etk}(\theta)$ ifadesinin genel olarak iki kökü vardır.

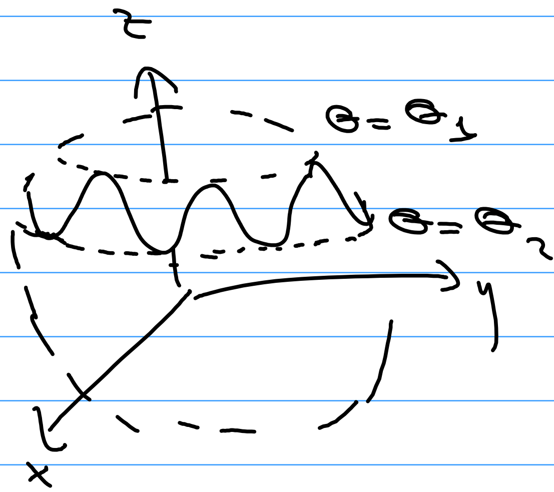
θ açısı bu iki değer arasında hareket eder.

$$\dot{\phi} = \frac{(p_\phi - \cos\theta \, p_\psi)}{(I_1 + \mu a^2)\sin^2\theta}$$

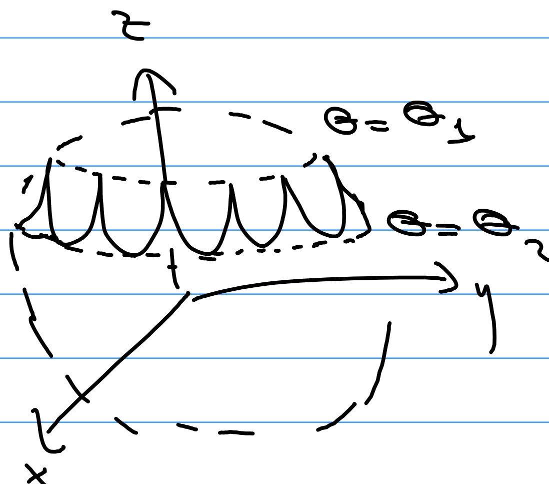
olduğundan, eğer $p_\phi - \cos\theta \, p_\psi$ bu iki değer arasında işaret değiştiriyorsa, $\theta = \theta_1$'de topaç z ekseni etrafında bir yönde dönüyorsa, $\theta = \theta_2$'de diğer yönde dönecektir.



eğer işaret değiştirmiyorsa, o zaman hep z ekseni etrafında aynı yönde dönecektir.



Eğer $\theta=\theta_1$'de sıfır oluyorsa da hareketi



şeklinde olacaktır.

Euler Denklemleri

Katı cismi, xyz koordinat eksenleri yerine $x_1x_2x_3$ koordinat eksenleri üzerinden incelemek isteyebiliriz. Bunun bir örneği dünya üzerine sabit bir referans sistemidir. Dünya döndüğü için, dünya üzerine sabit referans sistemleri $x_1x_2x_3$ koordinat eksenlerine denk gelecektir.

$\vec{A}$ vektörünü xyz eksenlerinden bakan bir gözlemci için zamanla değişimi

$$\frac{d\vec{A}}{dt}$$

olsun. $x_1x_2x_3$ koordinat eksenlerinden bakan bir gözlemci için $\vec{A}$'nın değişimi ise

$$\frac{d'\vec{A}}{dt}$$

olsun. Bu ikisi arasındaki fark dönmeden kaynaklanacaktır ve

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

olarak yazılabilir. Bunu sistemin hareket denklemlerine uygulayacak olursak

$$\vec{K} = \frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d'\vec{M}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{M}$$

ve

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d'\vec{P}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{P}$$

elde ederiz. Bileşenleri cinsinden yazacak olursak

$$\frac{dP_1}{dt}+\left(\Omega_2 P_3-\Omega_3 P_2\right)=F_1$$

$$\frac{dP_2}{dt}+\left(\Omega_3 P_1-\Omega_1 P_3\right)=F_2$$

$$\frac{dP_3}{dt}+\left(\Omega_1 P_2-\Omega_2 P_1\right)=F_3$$

ve

$$\frac{dM_1}{dt}+\left(\Omega_2 M_3-\Omega_3 M_2\right)=K_1$$

$$\frac{dM_2}{dt}+\left(\Omega_3 M_1-\Omega_1 M_3\right)=K_2$$

$$\frac{dM_3}{dt}+\left(\Omega_1 M_2-\Omega_2 M_1\right)=K_3$$

elde ederiz. Eksenlerimizi temel dönme eksenleri olarak seçersek

$$M_1=I_1\Omega_1,\quad M_2=I_2\Omega_2 \quad \text{ve} \quad M_3=I_3\Omega_3$$

olduğundan

$$I_1\frac{d\Omega_1}{dt}+\left(I_3-I_2\right)\Omega_2\Omega_3=K_1$$

$$I_2\frac{d\Omega_2}{dt}+\left(I_1-I_3\right)\Omega_1\Omega_3=K_2$$

$$I_3\frac{d\Omega_3}{dt}+\left(I_2-I_1\right)\Omega_1\Omega_2=K_3$$

elde ederiz. Bunlar Euler denklemleridir.

Örn

Serbest simetrik topaç için Euler denklemlerini çözün.

$I_1 = I_2$ olduğundan, Euler denklemlerinden

$$I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} = 0 \Rightarrow \Omega_3 = \text{sabit}$$

elde ederiz.

$$w = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \Omega_3$$

olarak tanımlayacak olursak, diğer iki Euler denklemi

$$\frac{d\Omega_1}{dt} - w\Omega_2 = 0$$

$$\frac{d\Omega_2}{dt} + w\Omega_1 = 0$$

halini alır. $\Delta = \Omega_1 + i\Omega_2$ olarak tanımlarsak

$$\frac{d\Delta}{dt} + iw\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = Ae^{-iwt}$$

olarak buluruz. Başlangıç anını öyle seçebiliriz ki, A reel bir sayı olsun. Bu durumda

$$\Omega_1 = A\cos wt$$
$$\Omega_2 = -A\sin wt$$

olacaktır. Bir başka deyişle $\vec{\Omega}$ vektörü x_3 ekseni etrafında w açısal hızı ile dönecektir.

Açısal momentuma bakacak olursak

$$M_1 = I_1 \Omega_1 = (A I_1) \cos wt$$

$$M_2 = I_2 \Omega_2 = -(A I_1) \sin wt$$

$$M_3 = I_3 \Omega_3 = \text{sabit}$$

olacaktır. Dolayısıyla $\vec{M}$ vektörü de x_3 ekseni etrafında sabit w açısal hızı ile dönecektir. Bu ise daha önce elde ettiğimiz sonuçların katı cisim üzerinde sabit bir eylemcı tarafından görüntüsüdür.

Eylemsiz olmayan Referans Sisteminde Hareket Denklemleri

Şimdiye kadar genelde eylemsiz referans sistemlerinde çalıştık. Oysa Euler-Lagrange denklemleri, seçtiğimiz referans sisteminin özelliklerinden bağımsızdır. Tek bir parçacığı alalım. Eylemsiz referans sistemindeki hızına $\vec{v}_0$ dersek, bu parçacığın Lagranj fonksiyonunu

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}_0^{\,2} - U$$

olarak yazmıştık. Farklı bir koordinat ekseni seçersek

$$\vec{v}_0 = \vec{v} + \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

olacaktır. Burada $\vec{v}$ yeni referans sistemindeki hızı, $\vec{V}$ yeni referans sisteminin merkezinin hızı, $\vec{\Omega}$ yeni koordinat ekseninin açısal hızı ve

$\vec{r}$, parçacığın yeni koordinat eksenine göre konumu olmak üzere. Bu ifadeyi Lagrange fonksiyonunda yerleştirirsek

$$L = \frac{1}{2}m\left(\vec{v} + \vec{V} + \vec{\Omega}\times\vec{r}\right)^2 - U$$

$$= \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{1}{2}m\vec{V}^2 + \frac{1}{2}m\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)^2$$

$$+ m\vec{v}\cdot\vec{V} + m\,\vec{v}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right) + m\vec{V}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right) - U$$

elde ederiz. $\frac{1}{2}m\vec{V}^2$ sadece zamana bağlı bir ifadedir ve Euler-Lagrange denklemlerini etkilemez.

$$\vec{v}\cdot\vec{V} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}\cdot\vec{V}\right) - \vec{r}\cdot\frac{d\vec{V}}{dt}$$

yazarsak, ilk terim zamana göre tam bir türev olduğundan yine hareket denklemlerini etkilemez. Bu terimleri ihmal edersek, Lagrange fonksiyonunu

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{1}{2}m\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)^2 - m\vec{r}\cdot\frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$+ m\,\vec{v}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right) + m\vec{V}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right) - U$$

$$= \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{1}{2}m\left(\Omega^2 r^2 - \left(\vec{\Omega}\cdot\vec{r}\right)^2\right) - \vec{r}\cdot\vec{W}$$

$$+ m\,\vec{v}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right) - U$$

olarak elde ederiz. Burada

$$\vec{W} = m\frac{d\vec{V}}{dt} + m\,\vec{\Omega}\times\vec{V}$$

olarak tanımladık.

Bu koordinat ekseninde parçacığın momentumu

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + m(\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

olarak bulunabilir. Buradan hareket denklemi de

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + m\left[\Omega^2 \vec{r} - \vec{\Omega}(\vec{\Omega}\cdot\vec{r})\right] - \vec{W} + m(\vec{v} \times \vec{\Omega})$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + m\,\vec{\Omega} \times (\vec{r} \times \vec{\Omega}) - \vec{W} + m(\vec{v} \times \vec{\Omega})$$

olarak elde edilir. Buradaki ilk terim cisme potansiyelden dolayı etki eden gerçek kuvvettir. Diğer terimler ise, eylemsiz olmayan bir referans sisteminde çalıştığımız için ortaya çıkan sanki kuvvetlerdir. İkinci terim merkezkaç kuvvetidir, üçüncü terim referans sisteminin ivmesinden kaynaklı bir terimdir. Son terim ise cismin hızına bağlı Coriolis kuvvetidir.

Bu referans sisteminde cismin enerjisini hesaplayalım.

$$E = \vec{p}\cdot\vec{v} - L$$

$$= \left[m\vec{v} + m(\vec{\Omega} \times \vec{r})\right]\cdot\vec{v} - \left[\frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{1}{2}m\left(\Omega^2 r^2 - (\vec{\Omega}\cdot\vec{r})^2\right) - \vec{r}\cdot\vec{W} + m\,\vec{v}\cdot(\vec{\Omega}\times\vec{r}) - U\right]$$

$$E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - \frac{1}{2}m(\vec{\Omega}\times\vec{r})^2 + \vec{r}\cdot\vec{W} + U$$

olarak yazılabilir. Eğer yeni referans sistemi sadece dönüyorsa (öteleme hareketi yapmıyorsa) enerjiye gelen tek katkı

$$-\frac{1}{2}m(\vec{\Omega}\times\vec{r})^2$$

ifadesidir.