~~QCD~~:

KRD (QCD): Renormalize edilebilir $SU(3)$ ayar teorisi.

## SU(N) nedir?

$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots |z_N|^2$ ifadesinin değerini değiştirmeyen bütün lineer dönüşümlerin oluşturduğu guruba $U(N)$ denir.

Eğer $z_1, \dots, z_n$ sayılarını bir sütün matris ile gösterirsek,

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix}$$

$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots |z_N|^2 = Z^\dagger Z$ olarak yazabiliriz. Bu durumda $U(N)$'in her bir elemanını bir matris ile gösterebiliriz.

$$Z \rightarrow Z' = UZ \qquad U \in U(N).$$

$Z^\dagger Z$'in bu dönüşüm altında değişmemesi için

$$Z^\dagger Z \longrightarrow Z'^\dagger Z' = Z^\dagger U^\dagger U Z = Z^\dagger Z$$

olması, dolayısı ile

$$U^\dagger U = \mathbb{1}$$ olması gerekir.

iki tarafın da determinantını alırsak

$$\det(U^{\dagger}U) = (\det U^{\dagger})(\det U)$$
$$= (\det U)^{\dagger}(\det U)$$
$$= (\det U)^{*}(\det U)$$
$$= |\det U|^2$$

sonucunu da kullanırsak

$|\det U| = 1$ olduğu görülür.

eğer sadece $\det U = 1$ olan gurupla ilgilenirsek, elimize $SU(N)$ gurubu kalır.

~~SU(N) gurubu~~

birim matris, $\mathbb{1}_{N\times N} \in SU(N)$ ve

çok küçük dönüşümleri her zaman için

$$U = \mathbb{1} + i\alpha_i T^i$$

olarak yazabiliriz. buradaki $\alpha_i$'ler reel sayılardır ve $T^i$'lere gurubun generatörleri denir.

~~SU(N)'~~ $\det U = 1$ olabilmesi için, $Tr\, T^i = 0$ olması lazım. $SU(N)$ için, izi sıfır olan birbirinden bağımsız $N^2-1$ matris yazılabileceğinden $SU(N)$'in $N^2-1$ generatoru ve herhangi bir $SU(N)$ dönüşümü için $N^2-1$ ~~tane~~ parametre tanımlamak yeterlidir.

quarkların her biri ~~...~~ üç farklı ~~...~~ "renk"te bulunabilir. SU(3) simetri bize bu renklerin karıştırılmasının doğayı değiştirmeyeceğini söyler:

$$q = \begin{pmatrix} q^r \\ q^g \\ q^b \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \sum_{q=u,d,s} \bar{q}(i\not{\partial} - m_q)q$$

~~...~~ bunları açık olarak yazacak olursak

$$\mathcal{L} = \overline{u^r}(i\not{\partial} - m_u)u^r + \overline{u^g}(i\not{\partial} - m_u)u^g$$
$$+ \overline{u^b}(i\not{\partial} - m_u)u^b + \ldots$$

burada $\not{\partial} = \partial_\mu \gamma^\mu$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \qquad \gamma^\mu : \begin{pmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{pmatrix}$$

$$\bar{q} = q^\dagger \gamma^0$$

$$q = \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \\ - \end{pmatrix}$$

Eğer biz burada

$$q^i_\alpha \to q'^i_\alpha = U^{ij} q^j_\alpha \qquad i,j = r,g,b \quad 1,2,3$$

dönüşümünü yaparsak

$$\mathcal{L} = \sum_{\substack{q=u,d,s\\ j=r,g,b}} \bar{q}^c (i\not{\partial} - m_q) q^c$$

$$= \sum_{\substack{q=u,d,s\\ c=r,g,b\\ \alpha,\beta=1,2,3,4}} \bar{q}^c_\alpha \left[ i\partial_\mu (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} - m_q \delta_{\alpha\beta} \right] q^c_\beta$$

$$\to \mathcal{L}' = \sum \bar{q}^a_\alpha (U^{ca})^* \left[ i\partial_\mu (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} - m_q \delta_{\alpha\beta} \right] U^{cb} q^b_\beta$$

$$(U^{ca})^* U^{cb} = \sum_c (U^\dagger)^{ac} U^{cb} = (U^\dagger U)^{ab} = \mathbb{1}^{ab} = \delta^{ab}$$

olduğundan

$$\mathcal{L}' = \sum \bar{q}^a_\alpha \left[ i\partial_\mu (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} - m_q \delta_{\alpha\beta} \right] \delta^{ab} q^b_\beta$$

$$= \sum \bar{q}^a_\alpha \left[ i\partial_\mu (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} - m_q \delta_{\alpha\beta} \right] q^a_\beta$$

$$\mathcal{L}' = \sum_q \bar{q} \left[ i\not{\partial} - m_q \right] q = \mathcal{L}$$

dolayısı ile $\mathcal{L}$ Lagrange yoğunluğu renk SU(3) dönüşümleri altında değişmezdir.

burada U matrislerinin konuma bağlı olmadığını varsaydık. Konuma bağlı olsalardı U(x)

$$\mathcal{L} = \sum_q \bar{q}\,(i\not{\partial} - m_q)\,q$$

$$\rightarrow \mathcal{L}' = \sum_q \bar{q}\, U^{+}(x)\,(i\not{\partial} - m_q)\, U(x) q$$

$$= \sum_q \bar{q}\, U^{+}(x)\, i\gamma^{\mu}\left[(\partial_\mu U(x))\, q + U(x)\,\partial_\mu q\right]$$

$$-\sum_q m_q \bar{q} q$$

$$= \sum_q \Big[\bar{q}\, \overbrace{U^{+}(x)U(x)}^{1}\, i\gamma^{\mu}\partial_\mu q - m_q \bar{q} q\Big]$$

$$+ \sum_q \bar{q}\, U^{+}(x)\,\partial_\mu U(x)\, i\gamma^{\mu} q$$

$$\mathcal{L}' = \sum_q \bar{q}\,[i\not{\partial} - m_q]\, q + \sum_q \bar{q}\, U^{+}(x)\,\partial_\mu U(x)\, i\gamma^{\mu} q$$

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \sum_q \bar{q}\, U^{+}(x)\,\partial_\mu U(x)\, i\gamma^{\mu} q$$

~~Eğer~~ konum bağımlı $U(x)$ için $\mathcal{L}$ değişmez değildir. $\mathcal{L}$'in $U(x)$ için değişmez olmasını istiyorsak, $\mathcal{L}$'i değiştirmemiz gerekir. Türev terimi problemli olduğu için türev işlemini değiştirelim

$$i\partial_\mu \to i\partial_\mu + gA_\mu$$

olsun. Burada $A_\mu$ herhangi bir vektör alan olabilir.

$U(x)$ dönüşümü altında

$$A_\mu \to A'_\mu \text{ olsun.}$$

Eğer $\mathcal{L}$ $U(x)$ dönüşümü altında değişmez kalacaksa, $A'_\mu$ nün ne olması gerektiğine bakalım: ~~Bu dö~~

Bu değişimden sonra $\mathcal{L}$'ye

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^0 + g A_\mu \bar{q} \gamma^\mu q$$

halini alır. buradaki $\mathcal{L}^0$, daha önceden yazdığımız $\mathcal{L}$'dir.

$\mathcal{L}^0$'ın daha önce nasıl dönüştüğünü zaten hesaplamıştık. O sonucu kullanırsak

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^0 + g \cancel{A} \bar{q} \gamma^\mu A_\mu q$$

$$\longrightarrow \mathcal{L}^0 + q\, U^\dagger(x)\partial_\mu U(x)\, i\gamma^\mu q$$

$$+\, g A'_\mu\, \bar{q}\, U^\dagger \gamma^\mu U q$$

$$= \mathcal{L}^0 + \bar{q}\left\{ i U^\dagger(x)\partial_\mu U(x) + g U^\dagger A'_\mu U \right\}\gamma^\mu q$$

bir koşul koyuyoruz

$$\equiv \mathcal{L}^0 + \bar{q}\,(g A_\mu)\,\gamma^\mu q$$

Dolayısı ile $A'_\mu$ için

$$g U^\dagger A'_\mu U \equiv g A_\mu + i U^\dagger(x)\partial_\mu U(x)$$

Soldan $U$, sağdan $U^\dagger$ ile çarparsak

$$\cancel{g} A'_\mu = \cancel{g}\, U A_\mu U^\dagger + \frac{i}{g}(\partial_\mu U) U^\dagger$$

sonucuna ulaşırız.

Bu sonuç herhangi bir ~~b~~ yerel $SU(N)$ ayar simetrisi için geçerlidir.

daha yaygın olarak bilinen $U(1)$ simetrisini göze alırsak

$$U = \cancel{e^{ig\alpha(x)}} e^{-ie\alpha(x)}$$

gibi bir sayıdan ibarettir

$$A'_\mu = \cancel{e^{-ie\alpha(x)}} A_\mu \cancel{e^{+ie\alpha(x)}} + \frac{i}{\cancel{g}}(-ie)(\partial_\mu \alpha) e^{-ie\alpha(x)} e^{+ie\alpha}$$

$$A'_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \alpha$$

sonucu çıkar. genel bir $SU(N)$ ve genel bir $U(x)$ için daha basit bir şekilde yazamayız. ancak küçük donuşumleri

$$U(x) = 1 - ig\alpha^i(x) T^i \cancel{(x)} + \dots$$

olarak yazıp $g^2$ mertebesindeki terimleri ihmal edersek

$$A'_\mu = (1 - ig\alpha^i T^i) A_\mu (1 + ig\alpha^j T^j) + \frac{i}{g}\left[-ig(\partial_\mu \alpha^i) T^i\right](1 + ig\alpha^i T^i) + O(g^2)$$

$$= A_\mu - ig[\alpha^i T^i, A_\mu] + (\partial_\mu \alpha^i) T^i$$

Genel olarak $A_\mu$ bir ~~matrix~~ dizey olabilir.

Dolayısıyla daha doğru yazım

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu \mathbb{1} + A_\mu = i\mathcal{D}_\mu$$

şeklindedir.

herhangi bir ~~matrisi~~ dizeyi $T^i$'ler cinsinden yazabileceğimizi kullanarak

$$A_\mu = A^i_\mu T^i$$ olarak yazarsak,

dönüşüm kuralı için

$$A^k_\mu T^k \rightarrow A^k_\mu T^k - ig\alpha^i A^j_\mu [T^i, T^j] + (\partial_\mu \alpha^k) T^k$$

ve $[T^i, T^j] = f^{ijk} T^k$ dersek

$$A^k_\mu T^k \rightarrow A^k_\mu T^k - ig\alpha^i A^j_\mu f^{ijk} T^k + (\partial_\mu \alpha^k) T^k$$

veya

$$A^k_\mu \rightarrow A^k_\mu + (\partial_\mu \alpha^k) - ig f^{ijk} \alpha^i A^j_\mu$$

olarak bulunur.

Ara ~~not~~: gurubun ~~k~~ ~~yaratıcılar~~ üreticileri kadar alana ihtiyacımız var.

Yeni alanlar tanımlayarak yaptığımız

$$(i\not{D}_\mu q) \longrightarrow i\not{D}'_\mu U(x) q = U(x)(i\not{D}_\mu q)$$

olmasını sağlamaktır. (bunu gösteriniz)

~~Yeni alanlara~~

Bir başka deyişle

$$\not{D}'_\mu U(x) = U(x)\not{D}_\mu$$

$$\not{D}'_\mu U(x) U^\dagger(x) = U(x)\not{D}_\mu U^\dagger(x)$$

$$\not{D}'_\mu = U(x)\not{D}_\mu U^\dagger(x) \text{ dir.}$$

Bu alanlar için, dinamik terim yazmak ~~ger~~ için, dönüşüm altında değişmeyen ve alanın türevinin karesini içeren terimlere ihtiyacımız var.

$$[\not{D}_\mu, \not{D}_\nu]$$

terimine bakalım.

Simetri dönüşümü altında

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \longrightarrow [\mathcal{D}'_\mu, \mathcal{D}'_\nu]$$

$$= \mathcal{D}'_\mu \mathcal{D}'_\nu - \mathcal{D}'_\nu \mathcal{D}'_\mu$$

$$= U \mathcal{D}_\mu \underbrace{U^\dagger U}_{1} \mathcal{D}_\nu U^\dagger - U \mathcal{D}_\nu \underbrace{U^\dagger U}_{1} \mathcal{D}_\mu U^\dagger$$

$$= U [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] U^\dagger$$

dolayısı ile $[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]$'nün kendisi değişmez değildir. Ancak izine bakacak olursak

$$Iz [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \longrightarrow Iz\, U [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] U^\dagger$$

$$= Iz [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \underbrace{U^\dagger U}_{1}$$

$$= Iz [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]$$

yani $Iz [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]$ ~~simetr~~ renk simetrisi dönüşümleri altında değişmez.

Burada dikkat edilmesi gerek bir nokta $[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]$ komutatörünün alanın türevini içermesi, ancak türev operatorunu içermemesidir.

komutatörü açık olarak yazarsak

$$[D_\mu, D_\nu] = [\partial_\mu - igA_\mu, \partial_\nu - igA_\nu]$$

$$= [\partial_\mu, \partial_\nu] - ig[A_\mu, \partial_\nu] - ig[\partial_\mu, A_\nu] + (ig)^2 [A_\mu, A_\nu]$$

$$= -ig(-\partial_\nu A_\mu) - ig(\partial_\mu A_\nu) + (ig)^2 [A_\mu, A_\nu]$$

$$= -ig\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]\right)$$

olarak yazılabilir $G_{\mu\nu}$'yü

$$[D_\mu, D_\nu] = -ig G_{\mu\nu}$$ olarak tanımlarsak

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$$

olarak çıkar ve kinetik terim

$$\mathcal{L}_{GK} = -\frac{1}{2} Tr\, G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$$ olarak yazılır.

Toplam QCD Lagranj yoğunluğu

$$\boxed{\mathcal{L}^{QCD} = \bar{q}(i\not{D} - m_q)q - \frac{1}{2} Tr\, G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}}$$

olarak yazılır.

## Hareket denklemleri;

**Fermionlar için:**

$$\mathcal{L} = \bar{q}\,(i\not{D} - m_q)\, q - \frac{1}{2}\mathrm{Iz}\, G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$$

$$= \bar{q}\, i \partial_\mu \gamma^\mu q - m_q \bar{q} q + g \bar{q} A_\mu \gamma^\mu q - \frac{1}{2}\mathrm{Iz}\, G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$$

$$= \bar{q}^i_\alpha (i\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\, \partial_\mu q^i_\beta - m_q \bar{q}^i_\alpha q^i_\alpha$$

$$+ g\, \bar{q}^i_\alpha A^{ij}_\mu (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\, q_\beta - \frac{1}{2}\mathrm{Iz}\, G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$$

Euler-Lagrange denklemleri:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q^k_\delta)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k_\delta} = 0$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu q^k_\delta)} \left( \bar{q}^i_\alpha (i\gamma^\nu)_{\alpha\beta}\, \partial_\nu q^i_\beta \right)$$

$$- \frac{\partial}{\partial q^k_\delta} \left[ -m_q \bar{q}^i_\alpha q^i_\alpha + g \bar{q}^i_\alpha A^{ij}_\mu (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\, q^j_\beta \right] = 0$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \left[ \bar{q}^i_\alpha (i\gamma^\nu)_{\alpha\beta}\, \delta^\mu_\nu\, \delta_{\beta\delta}\, \delta^{ik} \right]$$

$$+ m_q \bar{q}^i_\alpha\, \delta_{ik} \delta_{\alpha\delta} - g \bar{q}^i_\alpha A^{ij}_\mu (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\, \delta^{jk}\, \delta_{\beta\delta} = 0$$

$$\partial_\mu \bar{q}^k_\alpha (i\gamma^\mu)_{\alpha\delta} + m_q \bar{q}^k_\delta - g\bar{q}^i_\alpha A^{ik}_\mu (\gamma^\mu)_{\alpha\delta} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{q}^k_\alpha (i\overleftarrow{\partial\!\!\!/})_{\alpha\delta} + m_q \bar{q}^k_\delta - g\bar{q}^i_\alpha (A\!\!\!/^{ik})_{\alpha\delta} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{q}^i \left[ i\overleftarrow{\partial\!\!\!/}\,\delta^{ik} + m_q \delta^{ik} - gA\!\!\!/^{ik} \right]_\delta = 0$$

$$\boxed{\bar{q}\left[ i\overleftarrow{\partial\!\!\!/} + m_q - gA\!\!\!/ \right] = 0}$$

$q$ için hareket denklemi, ya $\bar{q}$ için olandan bulunabilir;

$$q^\dagger \gamma_0 \left[ i\overleftarrow{\partial\!\!\!/} + m_q - gA\!\!\!/ \right] = 0$$

~~Hini alırsak~~

$\cancel{[i\partial\!\!\!/^\dagger + m_q}$

$$(\partial_\mu q)^\dagger \gamma_0 \, i\gamma_\mu + q^\dagger \gamma_0 (m_q - gA\!\!\!/) = 0$$

daggerını alırsak:

$$-i\gamma^\dagger_\mu \gamma^\dagger_0 \partial_\mu q + (m_q - gA\!\!\!/^\dagger)\gamma^\dagger_0 q = 0$$

$\gamma^\dagger_\nu = \gamma_0 \gamma_\nu \gamma^0$ eşitliğini kullanırsak:

$$0 = -i\gamma_0\gamma_\mu \partial_\mu q + \gamma_0 (m_q - gA\!\!\!/) q = -\gamma_0 (i\partial\!\!\!/ + gA\!\!\!/ - m_q) q = 0$$

İki tarafı da $-\gamma_0$ ile çarparsak

$(i\not{D} - m_q)\,q = 0$ ifadesi bulunur.

bir başka yöntem, $\mathcal{L}$'den başlayıp, E.L. denklemlerini yazmaktır:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{q}^k_\delta)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{q}^k_\delta} = 0$$

$\mathcal{L}$ içerisinde $\bar{q}$'ın hiçbir türevi yoktur.

dolayısıyla

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{q}^k_\delta} = \frac{\partial}{\partial \bar{q}^k_\delta} \bar{q}^i_\alpha (i\not{D} - m_q)^{ij}_{\alpha\beta}\, q^j_\beta$$

$$= \delta^{ik}\,\delta_{\alpha\delta}\,(i\not{D} - m_q)^{ij}_{\alpha\beta}\, q^j_\beta$$

$$= \left[(i\not{D} - m_q)\,q\right]^i_\delta = 0$$

$\Rightarrow (i\not{D} - m_q)\,q = 0$ olarak bulunur.

Vektör potensiyelin hareket denklemini yazmak için, öncelikle bağımsız alanları,

$$A_\mu = A_\mu^n T^n$$

olarak yazalım.

$\mathrm{Tr}\, T^m T^n = \frac{\delta^{mn}}{2}$ olarak normalize edilir.

ve

$[T^m, T^n] = f^{mnk} T^k$ olarak tanımlanır.

Dolayısıyla

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]$$

$$= (\partial_\mu A_\nu^n - \partial_\nu A_\mu^n) T^n$$

$$- ig A_\mu^m A_\nu^k f^{mkn} T^n$$

$$= [\partial_\mu A_\nu^n - \partial_\nu A_\mu^n - ig A_\mu^m A_\nu^k f^{mkn}] T^n$$

olarak yazılabilir.

$$G_{\mu\nu}^n = \partial_\mu A_\nu^n - \partial_\nu A_\mu^n - i f^{mkn} A_\mu^m A_\nu^k$$

olarak yazarsak

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\not{\partial} - m)q + \bar{q} g \not{A} q - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^n G^{\mu\nu n}$$ olur.

$A^l_\mu$ için E.L denklemleri.

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A^l_\mu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^l_\mu} = 0$$

$$\partial_\nu \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A^l_\mu)}\left(-\frac{1}{4} G^n_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta n}_\mu\right) = \frac{\partial}{\partial A^l_\mu}\left(\bar{q} g \gamma^\nu A^n_\nu T^n q\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\partial_\nu \left[G^n_{\alpha\beta} \frac{\partial G^{\alpha\beta n}}{\partial(\partial_\nu A^l_\mu)}\right] = \left(\bar{q} g \gamma^\nu T^n q\right) \delta^{ln} \quad \delta^\mu_\nu$$

$$-\frac{1}{2}\partial_\nu G^n_{\alpha\beta}\, \delta^{ln}\left(g^\alpha_\nu g^\beta_\mu - g^\alpha_\mu g^\beta_\nu\right) = \left(\bar{q} g \gamma^\mu T^l q\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\nu G^l_{\mu\nu} = g\left(\bar{q} \gamma_\mu T^l q\right)}$$

Matematiksel altyapı: Fourier transformu

Momentum uzayında ~~prop~~ ilerletici (fermionlar için)

$+i \dfrac{\not p + m_q}{p^2 - m_q^2}$ dir.

Koordinat uzayında ise

$$S(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \, +i \frac{\not p + m_q}{p^2 - m_q^2 + i\varepsilon}$$

olur. Yapacağımız uygulamalarda çoğu zaman hafif kuarklarla işlem yapacağız. dolayısıyla bize $\mathcal{O}(m_q)$ ye kadar ilerletici ifadesi yeter

$$S(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \, +i \frac{\not p + m_q}{p^2} + \mathcal{O}(m_q)$$

$$= +i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left( \gamma_\mu i \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m_q \right) \frac{e^{-ipx}}{p^2}$$

$$= +i \left( \gamma_\mu i \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m_q \right) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2}$$

~~..~~ integrali hesaplamak için "d" boyuta gidip wick ~~..~~ dönmesi yapalım. $p_0 \to i\tilde{p}_0$, $\vec{p} \to \vec{\tilde{p}}$

$x_0 \to i\tilde{x}_0$, $\vec{x} \to \vec{\tilde{x}}$

bu dönme altında

$$\mu^{4-d}\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}\,\frac{e^{-ipx}}{p^2} \to -i\int \frac{d^d\tilde{p}}{(2\pi)^d}\,\frac{e^{i\tilde{p}\tilde{x}}}{\tilde{p}^2}$$

burada $\tilde{p}\tilde{x} = \tilde{p}_0\tilde{x}_0 + \vec{\tilde{p}}\cdot\vec{\tilde{x}}$ ve $\tilde{p}^2 = \tilde{p}_0^2 + \vec{\tilde{p}}^2$ dir.

$\frac{1}{A} = \int_0^\infty dt\, e^{-At}$ $\quad A>0$ eşitliğini kullanırsak

$$-i\mu^{4-d}\int \frac{d^d\tilde{p}}{(2\pi)^d}\,\frac{e^{i\tilde{p}\tilde{x}}}{\tilde{p}^2} = -i\mu^{4-d}\int \frac{d^d\tilde{p}}{(2\pi)^d}\, e^{i\tilde{p}\tilde{x}}\int dt\, e^{-\tilde{p}^2 t}$$

$$= -i\mu^{4-d}\int \frac{dt}{(2\pi)^d}\int d^d p\, \exp\{-\tilde{p}^2 t + i\tilde{p}\tilde{x}\}$$

$$= -i\,\frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^d}\int_0^\infty dt \left(\frac{\pi}{t}\right)^{d/2} \exp\left\{-\frac{\tilde{x}^2}{4t}\right\}$$

İntegralin içinde değişken değiştirirsek

$$t = \frac{\tilde{x}^2}{4u}$$

$$= -i\,\frac{\mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^\infty du\, \frac{\tilde{x}^2}{4u^2}\left(\frac{4u}{\tilde{x}^2}\right)^{d/2} \exp\{-u\}$$

$$= -i \frac{\mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty du\, u^{d/2-2} \exp\{-u\} \left(\frac{4}{\tilde{x}^2}\right)^{d/2-1}$$

$$= -i \frac{\mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} \cancel{\int} \Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)\left(\frac{4}{\tilde{x}^2}\right)^{d/2-1}$$

Dolayısıyla $d=4$ durumunda

$$S(x) = +i\left(\gamma_\mu i \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m_q\right)\frac{-i}{(4\pi)^2}\frac{4}{\tilde{x}^2}$$

Wick dönmesini tersine yaparsak

$\Rightarrow \tilde{x}$

$$S(x) = +i\left(\gamma_\mu i \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m_q\right)\frac{i}{4\pi^2 x^2}$$

$$= +i \frac{i}{4\pi^2}\left(\gamma_\mu i \frac{-2x_\mu}{x^4} + \frac{m_q}{x^2}\right)$$

$$\boxed{S(x) = +i\left[\frac{\not{x}}{2\pi^2 x^4} + \frac{i m_q}{4\pi^2 x^2}\right]}$$

$$= +i\frac{\not{x}}{2\pi^2 x^4} - \frac{m_q}{4\pi^2 x^2}$$

Kütle Toplam Kuralları:

$j(x)$ herhangi bir ~~hadron~~ mezonun kuantum sayılarına sahip herhangi bir operatör olsun.

$$i\int d^4x\, e^{ipx} \langle 0|T\{j(x)\, j^\dagger(0)\}|0\rangle = \Pi$$

ilişkilendirme fonksiyonuna bakalım.

zaman sıralı çarpımı açıkça yazarsak

$$T\{j(x)\, j^\dagger(0)\} = \theta(x^0)\, j(x)\, j^\dagger(0) + \theta(-x^0)\, j^\dagger(0)\, j(x)$$

dolayısıyla

$$\Pi(q) = i\int d^4x\, e^{ipx} \left\{ \theta(x^0) \langle 0|\, j(x)\, j^\dagger(0)|0\rangle + \theta(-x^0) \langle 0|\, j^\dagger(0)\, j(x)|0\rangle \right\}$$

iki operatörün arasına birim ~~dizeyi~~ ~~operat~~ işlemciyi yerleştirirsek:

$$1 = |0\rangle\langle 0| + \sum_h \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} |h(q)\rangle\langle h(q)|\, \delta(q^2 - m_h^2)$$

$+ \ldots$

~~yer~~ $\Pi(p)$'ye yerleştirirsek

$$\Pi(p) = i\int d^4x\, e^{ipx} \sum_h \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (2\pi)\,\delta(q^2-m_h^2)\,\Theta(q^0)$$

$$\Big\{ \Theta(x^0) \langle 0|j(x)|h(q)\rangle \langle h(q)|j^\dagger(0)|0\rangle + \Theta(-x^0) \langle 0|j^\dagger(0)|h(q)\rangle \langle h(q)|j(x)|0\rangle \Big\}$$

öteleme işlemcisini kullanarak

$$j(x) = e^{+iPx}\, j(0)\, e^{-iPx}$$

yazarsak

$$\langle 0|j(x)|h(q)\rangle = \langle 0|e^{+iPx} j(0) e^{-iPx}|h(q)\rangle$$

$$= \langle 0|j(0)|h(q)\rangle e^{-iqx}$$

$$\langle h(q)|j(x)|0\rangle = \langle h(q)|e^{+iPx} j(0) e^{-iPx}|0\rangle$$

$$= e^{-iqx} \langle h(q)|j(0)|0\rangle$$

Yerine yerleştirirsek

$$\Pi(p) = i\int d^4x\, e^{ipx} \sum_h \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (2\pi)\,\delta(q^2-m_h^2)\,\Theta(q^0)$$

$$\Big\{ \Theta(x^0)\, e^{-iqx} \langle 0|j(0)|h(q)\rangle \langle h(q)|j^\dagger(0)|0\rangle + \Theta(-x^0)\, e^{+iqx} \langle 0|j^\dagger(0)|h(q)\rangle \langle h(q)|j(0)|0\rangle \Big\}$$

konum koordinatları üzerinden integralleri alırsak

$$\Pi(p) = i\int dx_0\, e^{ip^0x^0} \sum_h \int \frac{d^4q}{\cancel{(2\pi)^4}} \cancel{(2\pi)}\delta(q^2-m_h^2)\,\theta(q^0)$$

$$\{\theta(x^0)\, e^{-iq^0x^0} \cancel{(2\pi)^3}\delta^3(\vec{p}+\vec{q}) \langle 0|j(0)|h(q)\rangle\langle h(q)|j^+(0)|0\rangle$$

$$+\theta(-x^0)\, e^{+iq^0x^0} \cancel{(2\pi)^3}\delta^3(\vec{p}-\vec{q}) \langle 0|j^+(0)|h(q)\rangle\langle h(q)|j(0)|0\rangle\}$$

$\delta^3(\,)$ leri kullanarak $\vec{q}$ integrallerini de hesaplarsak

$$\Pi(p) = i\int_{-\infty}^{\infty} dx_0\, e^{ip^0x^0} \sum_h \int_0^{\infty} dq_0\, \delta(q^2-m_h^2)\,\theta(q^0)$$

$$\{\theta(x^0)\, e^{-iq^0x^0} \langle 0|j(0)|h(q^0,-\vec{p})\rangle\langle h(q^0,-\vec{p})|j^+(0)|0\rangle$$

$$+\theta(-x^0)\, e^{+iq^0x^0} \langle 0|j^+(0)|h(q^0,+\vec{p})\rangle\langle h(q^0,+\vec{p})|j(0)|0\rangle\}$$

$\cancel{\delta(\,)}$ $\delta(q^2-m_h^2)$ kullanarak $q_0$ integrali alınabilir:

$$\int_0^{\infty} dq_0\, \delta(q^2-m_h^2) = \frac{1}{2\sqrt{\vec{p}^2+m_h^2}} = \frac{1}{2E_h(\vec{p})} = \frac{1}{2q_0}$$

Yerleştirirsek

$$\Pi(p) = i\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ip^0x^0} \sum_h \frac{1}{2E_h(\vec{p})}$$

$$\{\theta(x_0^0)\, e^{-iq^0x^0} \langle 0|j(0)|h(q^0,-\vec{p})\rangle\langle h(q^0,-\vec{p})|j^+(0)|0\rangle$$

$$+\theta(-x^0)\, e^{+iq^0x^0} \langle 0|j^+(0)|h(q^0,+\vec{p})\rangle\langle h(q^0,+\vec{p})|j(0)|0\rangle$$

$$\Pi(p) = i \sum_h \frac{1}{2E_h(\vec{p})}$$

$$\Big\{ \langle 0|j(0)|h(q^0,-\vec{p})\rangle\langle h(q^0,-\vec{p})|j^{+}(0)|0\rangle \int_0^{\infty} dx_0\, e^{ix^0(p^0+q^0+i\varepsilon)}$$

$$+\langle 0|j^{+}(0)|h(q^0,+\vec{p})\rangle\langle h(q^0,+\vec{p})|j(0)|0\rangle \int_{-\infty}^{0} dx_0\, e^{ix^0(p^0-q^0-i\varepsilon)} \Big\}$$

$$= i \sum_h \frac{1}{2E_h(\vec{p})} \Big\{ \frac{-1}{i(p^0\cancel{+}q^0+i\varepsilon)} \langle 0|j(0)|h(q^0,-\vec{p})\rangle\langle h(q^0,-\vec{p})|j^{+}(0)|0\rangle$$

$$+\langle 0|j^{+}(0)|h(q^0,+\vec{p})\rangle\langle h(q^0,+\vec{p})|j(0)|0\rangle \frac{1}{i(p^0\cancel{+}q^0-i\varepsilon)} \Big\}$$

$j$ işlemcisinin kuantum sayıları ~~eğ~~ $M$ mezonu ile aynıysa ve $M \neq \bar{M}$ ise, o zaman bütün mezonlar üzerinden toplam alırken, birinci terime $h=M$, ikinci terime de $h=\bar{M}$ katkı verecek eğer $M=\bar{M}$ ise, iki terime de $h=M$ katkı verir. parçacık ve anti-parçacıklar için operatör matriks elemanlarının çarpımı birbirine eşittir. dolayısıyla

$$\Pi(p) = \sum_h \frac{1}{2E_h(p)} \left|\langle 0|j(0)|h(q^0,\vec{p})\rangle\right|^2 \left( \frac{1}{p^0\cancel{+}q^0-i\varepsilon} - \frac{1}{p^0+q^0+i\varepsilon} \right)$$

$$= \sum_h \left|\langle 0|j(0)|h(q^0,\vec{p})\rangle\right|^2 \frac{1}{2E_h(p)} \left( \frac{\cancel{\pm}2q^0}{p^{0\,2}-q^{0\,2}} \right)$$

$$= \cancel{+}\sum_h \frac{\left|\langle 0|j(0)|h(q^0,\vec{p})\rangle\right|^2}{p^{0\,2}-\vec{p}^{\,2}-m_h^2} = +\sum_h \frac{\left|\langle 0|j(0)|h\rangle\right|^2}{m_h^2-p^2-\cancel{m_h^2}}$$

## Wick Kuramı:

örnek $\quad J_\mu(x) = \bar{b}^j(x)\, i\gamma_\mu \gamma_5\, q^j(x)$ olsun.

$$J_\mu(x)^\dagger = q^\dagger (i\gamma_\mu\gamma_5)^\dagger \gamma_0^\dagger\, b$$

$$= q^\dagger(-i)\gamma_5\gamma_0\gamma_\mu\underbrace{\gamma_0\gamma_0}_{1} b$$

$$= \bar{q}\, i\gamma_5\gamma_\mu\, b$$

$$J_\mu(x)^\dagger = \bar{q}^j(-i\gamma_\mu\gamma_5)\, b^j$$

$$T\{J_\mu(x)\, J_\nu^\dagger(0)\}$$

$$= T\{\bar{b}^j(x)\, i\gamma_\mu\gamma_5\, q^j(x)\, \bar{q}^k(-i\gamma_\nu\gamma_5)\, b^k\}$$

$$= T\{\bar{b}^j(x)\gamma_\mu\gamma_5 q^j(x)\, \bar{q}^k(0)\gamma_\nu\gamma_5 b^k(0)\} \qquad (*)$$

$$= :\bar{b}^j(x)\gamma_\mu\gamma_5 q^j(x)\, \bar{q}^k(0)\gamma_\nu\gamma_5 b^k(0):$$

$$+ :\bar{b}^j(x)\gamma_\mu\gamma_5 q^j(x)\, \bar{q}^k(0)\gamma_\nu\gamma_5 b^k(0):$$

$$+ :\bar{b}^j(x)\gamma_\mu\gamma_5 q^j(x)\, \bar{q}^k(0)\gamma_\nu\gamma_5 b^k(0):$$

$$+ :\bar{b}^j(x)\gamma_\mu\gamma_5 q^j(x)\, \bar{q}^k(0)\gamma_\nu\gamma_5 b^k(0):$$

$$= \sum_{\substack{\text{bütün}\\ \text{contractionlar}\\ \text{üzerinden}\\ \text{toplam}}} :\bar{b}\gamma_\mu\gamma_5 q\bar{q}\gamma_\nu\gamma_5 b:$$

Burada $\sqcap$ contractionları,

$: \ldots :$ ise normal sıralı operatör çarpımını gösterir. ~~Bura~~ normal sıralı operatör çarpımlarında yaratma ~~operat~~ işlemcileri en ~~solda~~ sola, yoketme operatörleri de en sağa gelecek şekilde yerleştirilir.

Contractionlar sadece yanyana duran operatörler için tanımlanır. Operatörleri o yüzden önce yanyana getirmek gerekir. Yanyana gelen quark operatörlerin için

$$\overline{q^i_\alpha(x)\,\bar{q}^j_\beta(y)} \equiv \langle 0|T\{q^i_\alpha(x)\,\bar{q}^j_\beta(y)\}|0\rangle \quad *$$

olarak tanımlanır. Açık ifadesini bulabilmek için hareket denklemlerini kullanacağız.

quarklar için hareket denklemi

$$\left(\not{\partial}-m_q\right)^{ki}_{\eta\delta}\, q^{\alpha}_{q}=0$$

olarak bulmuştuk. türev operatorunu $(*)$ a uygulamakla başlayalım. Dikkat edilmesi gereken bir nokta, ~~ture~~ zamana göre türev alırken, zaman sıralı çarpımların da türevinin alınmasıdır:

$$\overline{q^i_\alpha(x)\,\bar{q}^j_\beta(y)} = \langle 0|\Theta(x^0-y^0)\,q^i_\alpha(x)\,\bar{q}^j_\beta(y)$$
$$-\Theta(y^0-x^0)\,\bar{q}^j_\beta(y)\,q^i_\alpha(x)|0\rangle$$

$\Theta(x)=1-\Theta(-x)$ olduğunu kullanırsak

$$\overline{q^i_\alpha(x)\,\bar{q}^j_\beta(y)} = +\langle 0|\Theta(x^0-y^0)\{q^i_\alpha(x),\bar{q}^j_\beta(y)\}|0\rangle$$
$$-\langle 0|\bar{q}^j_\beta(y)\,q^i_\alpha(x)|0\rangle$$

ikinci terime

$(i\not\partial - m_q)^{ki}_{\eta\alpha}$ ~~operatörünü~~

işlemcisini uygularsak bu terim sıfır verecektir.

Birinci terime uyguladığımızda

$$(i\not\partial - m_q)^{ki}_{\eta\alpha}\, \overline{q^i_\alpha(x)\bar q^j_\beta(y)} = \langle 0|\Theta(x^0-y^0)(i\not\partial - m_q)^{ki}_{\eta\alpha}\{q_\alpha(x),\bar q^j_\beta(y)\}|0\rangle$$

$$+ \langle 0|\delta^{ki}(\gamma_0)_{\eta\alpha}\left(i\partial_0\Theta(x^0-y^0)\right)\{q^i_\alpha(x),\bar q^j_\beta(y)\}|0\rangle$$

ve yine hareket denklemini kullanırsak

$$(i\not\partial - m_q)^{ki}_{\eta\alpha}\left(\overline{q^i_\alpha(x)\bar q^j_\beta(y)}\right)$$

$$= i(\gamma_0)_{\eta\alpha}(\gamma_0)_{\delta\beta}\,\delta(x^0-y^0)$$

$$\langle 0|\{q^k_\alpha(x),\bar q^j_\beta(y)\}|0\rangle$$

olarak yazılabilir.

Bu yerdeğiştiricinin ne olduğunu görebilmek için, $q^k_\alpha(x)$'in kanonik momentumunun ne olduğuna bakalım:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 q^k_\alpha(x))} = \frac{\partial}{\partial(\partial_0 q^k_\alpha(x))}\left(\bar q^i_\beta\, i\gamma^0_{\beta\delta}\,\partial_0 q^i_\delta\right)$$

$$= \bar q^i_\beta\, i\gamma^0_{\beta\delta}\,\delta^{ik}\delta_{\alpha\delta} = (q^{+k}\gamma_0\gamma_0)_\alpha = q^{+k}$$

Dolayısıyla, kanonik ~~...~~ olarak alanları kuantize edersek, alan ve eşlenik momentumların eşit zaman antikomutatörleri $\delta(\ )$ vermelidir;

Dolayısıyla

$$\{q^k_\alpha(x_0,\vec{x}),\, q^{+j}_\beta(x_0,\vec{y})\} = \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\,\delta_{\alpha\delta}\,\delta^{kj}$$

olacaktır. Dolayısıyla

$$(i\cancel{\partial}-m_q)^{ki}_{\eta\alpha}\left(q^i_\alpha(x)\,\bar{q}^j_\beta(y)\right)$$

$$= i(\gamma_0)_{\eta\alpha}(\gamma_0)_{\delta\beta}\,\delta(x^0-y^0)\,\langle 0|\{q^k_\alpha(x_0,\vec{x}),\, q^{+j}_\delta(y_0,\vec{y})\}|0\rangle$$

$$= i(\gamma_0)_{\eta\alpha}(\gamma_0)_{\delta\beta}\,\delta(x^0-y^0)\,\langle 0|\{q^k_\alpha(x_0,\vec{x}),\, q^{+j}_\delta(x_0,\vec{y})\}|0\rangle$$

$$= i(\gamma_0)_{\eta\alpha}(\gamma_0)_{\delta\beta}\,\delta^{kj}\,\delta_{\alpha\delta}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\,\delta(x^0-y^0)\,\langle 0|0\rangle$$

$$= i(\underbrace{\gamma_0\gamma_0}_{1})_{\eta\beta}\,\delta^{kj}\,\delta^{(4)}(x-y)$$

$$= i\,\delta_{\eta\beta}\,\delta^{kj}\,\delta^{(4)}(x-y)$$

$$(i\cancel{\partial}-m_q)^{ki}_{\eta\alpha}\left(q^i_\alpha(x)\,\bar{q}^j_\beta(y)\right) = i\,\delta_{\eta\beta}\,\delta^{kj}\,\delta^{(4)}(x-y)$$

Vektör alanla etkileşmeleri tedirgemeler yaparak hesaplayacağımız için, bize vektör alanının olmadığı durumdaki ilerletici gerekmektedir. Bu ilerleticinin sağladığı denklem, bir önceki ifadede $\not{D} \to \not{\partial}$ değişimi yapılarak elde edilebilir:

$$(i\not{\partial} - m_q)^{ki}_{\eta\alpha}\left(\overline{q^i_\alpha(x)\,\bar{q}^j_\beta(y)}\right) = i\,\delta_{\eta\beta}\,\delta^{kj}\,\delta^{(4)}(x-y)$$

Bu denklemi çözmek için momentum uzayına geçelim;
momentum uzayında $\delta^{(4)}(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)}$

olarak yazıp

$$\overline{q^i_\alpha(x)\,\bar{q}^j_\beta(y)} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S^{ij}_{\alpha\beta}(p)\, e^{-ip(x-y)}$$

olarak yazarsak

$$(\not{p} - m_q)^{ki}_{\eta\alpha}\, S^{ij}_{\alpha\beta} = i\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta^{kj}$$

olarak bulunur. $\not{p} - m_q$'nun renk uzayında diagonal olduğunu göze alırsak $\cancel{[(\not{p}-m_q)]^{ki}_{\eta\alpha} S^{ij}_{\alpha\beta}}$

$$[(\not{p} - m_q)]^{ki}_{\eta\alpha} = (\not{p} - m_q)_{\eta\alpha}\,\delta^{ki}, \quad -$$

$$(\not{p} - m_q)_{\eta\alpha}\, S^{kj}_{\alpha\beta} = i\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta^{kj}$$

- ~~what is the relation w/ hyperunity?~~
- ~~violation of the SM for too heavy higgs?~~

Buradan $S^{kjl}_{\alpha\beta}$ nin de renk diagonal olması gerektiğini görürüz

$$S^{kj}_{\alpha\beta}(p) = S_{\alpha\beta}(p)\,\delta^{kj}$$

ve

$$(\not{p} - m_q)_{\eta\alpha}\, S_{\alpha\beta}(p) = i\,\delta_{\alpha\beta}$$

Matris halinde yazarsak

$$(\not{p} - m_q)\, S(p) = i\mathbb{1} \quad \text{ve}$$

$$S(p) = i\,(\not{p} - m_q)^{-1} \quad \text{olarak bulunur.}$$

Sağ tarafı ~~sa~~ $\not{p} + m_q$ ile çarpıp bölersek, bu çözümü

$$S(p) = i\,\frac{\not{p} + m_q}{p^2 - m_q^2}$$

olarak da yazabiliriz.

Buradan da

$$S^{ij}_{\alpha\beta}(x-y) \equiv \overline{q^i_\alpha(x)\,\bar{q}^j_\beta(y)} = \delta^{ij}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ip(x-y)}\, i\,\frac{(\not{p}+m_q)_{\alpha\beta}}{p^2 - m_q^2}$$

ve sayfa 20'deki sonucu kullanırsak

$$S^{ij}_{\alpha\beta}(x-y) = \delta^{ij}\left[\frac{i\not{x}}{2\pi^2 x^4} - \frac{m_q}{4\pi^2 x^2}\right] + O(m_q^2) \quad \text{olarak bulmuş oluruz.}$$

# ~~Ope~~ İşlemci Çarpım Açılımı (OPE)

Eğer (25*) denkleminde, $x \sim 0$ ise, o zaman quark öperatörlerini $x=0$ etrafında Taylor açılımı yapabiliriz:

$$q(x) = q(0) + x^\alpha \partial_\alpha q(0) + x^\alpha x^\beta \partial_\alpha \partial_\beta q(0) + \dots$$

hesapları kolaylaştırmak için,

$$x^\mu A_\mu(x) = 0$$

şeklinde tanımlanan Fock Schwinger ayarı kullanılırsa,

$$x^\mu \partial_\mu \longrightarrow x^\mu D_\mu \quad \text{yazılabilinir.}$$

bu durumda

$$q(x) = q(0) + x^\alpha D_\alpha q(0) + x^\beta x^\alpha D_\alpha \partial_\beta q(0) + \dots$$

(bu aşamada renk indexlerine dikkat!)

3. terimde $\partial_\beta \to D_\beta$ yapmamamızın sebebi, bu terimde $x^\beta$'nın $\partial_\beta$'yı direkt çarpmamasıdır.

Bu terimi incelersek

$$x^\beta x^\alpha D_\alpha \partial_\beta = x^\alpha x^\beta D_\alpha D_\beta + i x^\alpha x^\beta D_\alpha A_\beta$$

$$= x^\alpha x^\beta D_\alpha D_\beta + i x^\alpha x^\beta (D_\alpha A_\beta) + i x^\alpha \underbrace{x^\beta A_\beta}_{=0} D_\alpha$$

$$= x^\alpha x^\beta D_\alpha D_\beta + i x^\alpha x^\beta (\partial_\alpha A_\beta)$$

$$= x^\alpha x^\beta D_\alpha D_\beta + i x^\alpha \left[\partial_\alpha (\underbrace{x^\beta A_\beta}_{0}) - A_\beta \delta_\alpha^\beta\right]$$

$$= x^\alpha x^\beta D_\alpha D_\beta - i x^\alpha A_\alpha$$

Dolayısıyla

$$q^{*}(x) = q(0) + x^{\alpha} \mathcal{D}_{\alpha} q(0) + x^{\beta} x^{\alpha} \mathcal{D}_{\alpha} \mathcal{D}_{\beta} q(0) + \dots$$

olarak yazabiliriz.

Bu açılımı (25*) denklemine yerleştirirsek, bütün işlemciler $x=0$'da hesaplanır. Konum bağlı ifadeler ise sadece katsayılardadır. Dolayısı ile

$$T\{J\ J^{+}\} = \sum C^{r}(x)\, O_{r}(0)$$

şeklinde, konumdan bağımsız $O_{r}(0)$ işlemcileri ve konum bağımlı Wilson katsayıları denen sayıların çarpımlarının toplamı şeklinde yazılabilir.

## B mezonun Kütlesi:

Buraya kadar bildiklerimizi bir araya getirip $B_q$ mezonunun kütlesini hesaplayalım.

Önce uygun bir operatör seçmemiz lazım. $B_q$ mezonu ~~ps~~ $\bar{b}$ ve $q$ içeren pseudoscalar bir mezon. Bu kuantum sayılarına sahip bir operatör

$j(x)=\bar{q}(x)\gamma_5 b(x)$ olarak seçilebilir.

Bu öperatörle

$$\Pi = i\int d^4x\, e^{ipx} \langle 0|T\{j(x)\, j^{+}(0)\}|0\rangle$$

ilişkilendirme fonksiyonunu hesaplayalım.

$$= i\int d^4x\, e^{ipx} \langle 0|T\{\bar{b}^j(x)\, i\gamma_\mu\gamma_5\, q^j(x)\, \bar{q}^k(-i\gamma_\nu\gamma_5)\, b^k\}|0\rangle$$

$$= i\int d^4x\, e^{ipx} \langle 0|\{:\bar{b}^j(x)\, i\gamma_\mu\gamma_5\, q^j(x)\bar{q}^k(0)(-i\gamma_\nu\gamma_5)\, b^k(0): \qquad (1)$$

$$+ :\bar{b}^j\, i\gamma_\mu\gamma_5\, q^j(x)\bar{q}^k(0)(-i\gamma_\nu\gamma_5)\, b^k(0): \qquad (2)$$

$$+ :\bar{b}^j\, i\gamma_\mu\gamma_5\, q^j(x)\bar{q}^k(0)(-i\gamma_\nu\gamma_5)\, b^k(0): \qquad (3)$$

$$+ :\bar{b}^j(x)\, i\gamma_\mu\gamma_5\, q^j(x)\bar{q}^k(0)(-i\gamma_\nu\gamma_5)\, b^k(0):\}|0\rangle \qquad (4)$$

2. ve 4. terimlere bakarsak b quark yaratma ve yoketme operatörlerinin normal çarpımını içerir. Bunlar vakuma etkilediğinde, vakumdaki (varsa) b ~~anti~~ quarkları yok eder. Yoksa sıfır verir. b quark ağır bir

kuark olduğu için, vakumda bulunması beklenmez. dolayısı ile bu ~~kart~~ terimlerin katkısı sıfırdır:

$$\Pi_{\mu\nu} = i\int d^4x\, e^{ipx} \langle 0| :\bar{b}^j(x)\, i\gamma_\mu\gamma_5\, q^j(x)\,\bar{q}^k(0)(-i\gamma_\nu\gamma_5)\, b^k(0): \quad ①$$

$$+ :\bar{b}^j(x)\, i\gamma_\mu\gamma_5\, q^j(x)\,\bar{q}^k(0)(-i\gamma_\nu\gamma_5)\, b^k(0): |0\rangle \quad ②$$

olarak yazabiliriz.

$$\Pi^1_{\mu\nu} = i\int d^4x\, e^{ipx} \langle 0| :\bar{b}^j(x)\, i\gamma_\mu\gamma_5\, q^j(x)\,\bar{q}^k(0)(-i\gamma_\nu\gamma_5)\, b^k(0): |0\rangle$$

$$\Pi^2_{\mu\nu} = i\int d^4x\, e^{ipx} \langle 0| :\bar{b}^j(x)\, i\gamma_\mu\gamma_5\, q^j(x)\,\bar{q}^k(0)(-i\gamma_\nu\gamma_5)\, b^k(0): |0\rangle$$

olarak tanımlayalım. ve teker teker hesaplayalım.

$\Pi^1_{\mu\nu}$ terimini indeksler kullanarak açarsak

$$\Pi^1_{\mu\nu} = i\int d^4x\, e^{ipx} \langle 0| :\bar{b}^j_\alpha(x)\,(i\gamma_\mu\gamma_5)_{\alpha\beta}\, q^j_\beta(x)\,\bar{q}^k_\gamma(0)\,(-i\gamma_\nu\gamma_5)_{\gamma\delta}\, b^k_\delta(0): |0\rangle$$

$$= -i\int d^4x\, e^{ipx} (i\gamma_\mu\gamma_5)_{\alpha\beta}(-i\gamma_\nu\gamma_5)_{\gamma\delta} \langle 0|T\{q^j_\beta(x)\,\bar{q}^k_\gamma(0)\}|0\rangle$$
$$\langle 0|T\{b^k_\delta(0)\,\bar{b}^j_\alpha(x)\}|0\rangle \langle 0|:\mathbb{1}:|0\rangle$$

$$= -i\int d^4x\, e^{ipx} (i\gamma_\mu\gamma_5)_{\alpha\beta}(-i\gamma_\nu\gamma_5)_{\gamma\delta}\, \delta^{jk} S^q_{\beta\gamma}(x)$$
$$\delta^{kj} S^b_{\delta\alpha}(-x)$$

$$= -3i\int d^4x\, e^{ipx} \left[(i\gamma_\mu\gamma_5)\, S^q(x)\,(-i\gamma_\nu\gamma_5)\, S^b(-x)\right]_{\alpha\alpha}$$

$$= -3i\int d^4x\, e^{ipx}\, \mathrm{Iz}\left[(i\gamma_\mu\gamma_5)\, S^q(x)\,(-i\gamma_\nu\gamma_5)\, S^b(-x)\right]$$

$$S^q(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx}\, i\,\frac{\not k + m_q}{k^2 - m_q^2}$$

açılımını kullanırsak

$$\Pi^1_{\mu\nu} = +3i \int d^4x\, e^{ipx} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} e^{-ik_1x} \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} e^{-ik_2(-x)} \frac{\cancel{(\not k_1 + m_q)}\; Tr\left[(i\gamma_\mu\gamma_5)\, i(\not k_1+m_q)\,(i\gamma_\nu\gamma_5)\, i(\not k_2+m_b)\right]}{(k_1^2-m_q^2)(k_2^2-m_b^2)}$$

$$= 3i \int d^4x \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} e^{ix(p-k_1+k_2)} \frac{Tr\left[\gamma_\mu\gamma_5(\not k_1+m_q)\gamma_\nu\gamma_5(\not k_2+m\right.}{(k_1^2-m_q^2)(k_2^2-m_b^2)}$$

$$= 3i \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k_2}{\cancel{(2\pi)^4}} \cancel{(2\pi)^4}\, \delta^4(p-k_1+k_2)\, \frac{Tr\left[\gamma_\mu(\not k_1-m_q)\gamma_\nu(\not k_2+m_b)\right]}{(k_1^2-m_q^2)(k_2^2-m_b^2)}$$

$$= 3i \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{Tr\left[\gamma_\mu(\not p+\not k_2 - m_q)\gamma_\nu(\not k_2+m_b)\right]}{\left[(p+k_2)^2-m_q^2\right]\left[k_2^2-m_b^2\right]}$$

$$= 3i \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{4\left[(p+k_2)_\mu k_{2\nu} + (p+k_2)_\nu k_{2\mu} - g_{\mu\nu}(p+k_2)(k_2) - m_q m_b\, g_{\mu\nu}\right]}{\left[(p+k_2)^2-m_q^2\right]\left[k_2^2-m_b^2\right]}$$

$d^4 p = dp_0^2\, d\vec{p}^{\,2}$ (36)

$$\Pi^{(1)}_{\mu\nu} = 3i \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{Tr\left[\gamma_\mu (\not p + \not k_2 - m_q)\gamma_\nu (\not k_2 + m_b)\right]}{\left[(p+k_2)^2 - m_q^2\right]\left[k_2^2 - m_b^2\right]}$$

4 yerine d boyutta hesaplarsak

$$\Pi^{(1)}_{\mu\nu} = 3i\, \mu^{4-d} \int \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \frac{Tr\left[\gamma_\mu (\not p + \not k_2)\gamma_\nu \not k_2\right] - m_q m_b Tr\left[\gamma_\mu \gamma_\nu\right]}{\left[(p+k_2)^2 - m_q^2\right]\left[k_2^2 - m_b^2\right]}$$

$$= 3i\mu^{4-d} \cdot 4 \int \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \frac{(p+k_2)_\mu k_{2\nu} + (p+k_2)_\nu k_{2\mu} - g_{\mu\nu}\left[k_2(p+k_2) + m_q m_b\right]}{\underbrace{\left[(p+k_2)^2 - m_q^2\right]}_{\bar{u}}\underbrace{\left[k_2^2 - m_b^2\right]}_{u}}$$

$$= 12 i\mu^{4-d} \int \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \int du \frac{(p+k_2)_\mu k_{2\nu} + (p+k_2)_\nu k_{2\mu} - g_{\mu\nu}\left[k_2(p+k_2) + m_q m_b\right]}{\left\{\left[k_2^2 - m_b^2\right]u + \left[(p+k_2)^2 - m_q^2\right]\bar{u}\right\}^2}$$

$$= 12 i\mu^{4-d} \int \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \int du \frac{(p+k_2)_\mu k_{2\nu} + (p+k_2)_\nu k_{2\mu} - g_{\mu\nu}\left[(p+k_2)k_2 + m_q m_b\right]}{\left\{k_2^2 + 2pk_2\bar{u} + p^2\bar{u}^2 - m_b^2 u - m_q^2\bar{u} + p^2\bar{u} - p^2\bar{u}^2\right\}^2}$$

$$= 12 i\mu^{4-d} \int \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \int du \frac{(p+k_2)_\mu k_{2\nu} + (p+k_2)_\nu k_{2\mu} - g_{\mu\nu}\left[(p+k_2)k_2 + m_q m_b\right]}{\left\{(k_2 + p\bar{u})^2 + p^2 u\bar{u} - m_b^2 u - m_q^2 \bar{u}\right\}^2}$$

$$= 12 i\mu^{4-d} \int du \int \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \frac{(pu+k_2)_\mu (k_2 - p\bar{u})_\nu + (\mu \leftrightarrow \nu) - g_{\mu\nu}\left[(k_2+pu)(k_2-p\bar{u}) + m_q m_b\right]}{\left\{k_2^2 + p^2 u\bar{u} - m_b^2 u - m_q^2\bar{u}\right\}^2}$$

$$= 12 i \mu^{4-d} \int du \int \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \frac{2 p_\mu p_\nu u\bar{u} + \frac{2 g_{\mu\nu}}{d} k_2^2 - g_{\mu\nu}\left[k_2^2 - p^2 u\bar{u} + m_q m_b\right]}{\left(k_2^2 + p^2 u\bar{u} - m_b^2 u - m_q^2 \bar{u}\right)^2}$$

Wick dönüşümü

$$k_2^0 \to i k_2^0$$

$$\Pi^1_{\mu\nu} = -12 \mu^{4-d} \left\{ 2 p_\mu p_\nu \int du\, u\bar{u} \int \frac{d^d \tilde{k}_2}{(2\pi)^d} \frac{1}{\left(\tilde{k}_2^2 + \tilde{\Delta}^2\right)^2} \right.$$

$$\left. + g_{\mu\nu} \int du \int \frac{d^d \tilde{k}_2}{(2\pi)^d} \frac{k_2^2\left(\frac{2}{d} - 1\right) - \left(m_q m_b + \tilde{p}^2 u\bar{u}\right)}{\left(\tilde{k}_2^2 + \tilde{\Delta}\right)^2} \right\}$$

$$= -12 \mu^{4-d} \left\{ 2 p_\mu p_\nu \int du\, u\bar{u} \int \frac{d^d \tilde{k}_2}{(2\pi)^d} \frac{1}{\left(\tilde{k}_2^2 + \tilde{\Delta}^2\right)^2} \right.$$

$$\left. + g_{\mu\nu} \int du \int \frac{d^d \tilde{k}_2}{(2\pi)^d} \left[ \left(\frac{2}{d} - 1\right) \frac{1}{\left(\tilde{k}_2^2 + \tilde{\Delta}\right)} - \frac{\tilde{\Delta}^2\left(\frac{2}{d} - 1\right) + m_q m_b + \tilde{p}^2 u\bar{u}}{\left(\tilde{k}_2^2 + \tilde{\Delta}\right)^2} \right] \right\}$$

$$= -12 \mu^{4-d} \left\{ 2 p_\mu p_\nu \int du\, u\bar{u} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dt\, t \exp\{-t \tilde{\Delta}^2\} \frac{\pi^{d/2}}{t^{d/2}} \right.$$

$$+ \ldots$$

$$= -24 \mu^{4-d} p_\mu p_\nu \int du \frac{u\bar{u}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{\left(\tilde{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}}} + g_{\mu\nu} \ldots$$

$$d = 4 - 2\varepsilon$$

$$= \frac{-24}{(4\pi)^2} p_\mu p_\nu \int du\, u\bar{u} \left(\frac{4\pi \mu^2}{\tilde{\Delta}}\right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) + g_{\mu\nu} \ldots$$

$$= \frac{-\cancel{2}\,4^3}{\cancel{16\pi^2}\,x^2}\, p_\mu p_\nu \int du\, u\bar{u} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + O(\varepsilon^2)\right]\left[1 + \varepsilon \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta^2}\right) + O(\varepsilon^2)\right]$$

$$= -\frac{3}{2}\, p_\mu p_\nu \int du\, u\bar{u} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \ln(4\pi) - \gamma_E + \ln\left(\frac{\mu^2}{\Delta}\right) + O(\varepsilon)\right]$$

$$= -\frac{3}{2}\, p_\mu p_\nu \left[\int du\, u\bar{u} \ln\left[\left(\frac{m_b^2}{\bar{u}} + \frac{m_q^2}{u} - p^2\right)\frac{1}{\mu^2}\right] + \text{sabit}\right]$$

$$\boxed{\Pi^{(1)}_{\mu\nu} = -\frac{3}{2}\, p_\mu p_\nu \left[\int du\, u\bar{u} \ln\left[\left(\frac{m_b^2}{\bar{u}} + \frac{m_q^2}{u} - p^2\right)\frac{1}{\mu^2}\right] + \text{sabit}\right] + g_{\mu\nu} \cdots}$$

$\Pi^{(2)}_{\mu\nu}$ nin hesabına başlayalım:

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu} = i\int d^4x\, e^{ipx} \langle 0 | : \bar{b}^j_\alpha(x) (i\gamma_\mu\gamma_5)_{\alpha\beta}\, q^j_\beta(x)\, \bar{q}^k_\gamma(0) (-i\gamma_\nu\gamma_5)_{\gamma\delta}\, b^k_\delta(0) : | 0 \rangle$$

$$= i\int d^4x\, e^{ipx} \langle 0 | T\{ b^k_\delta(0)\, \bar{b}^j_\alpha(x)\} | 0 \rangle (i\gamma_\mu\gamma_5)_{\alpha\beta} (-i\gamma_\nu\gamma_5)_{\gamma\delta}$$
$$\langle 0 | : q^j_\beta(x)\, \bar{q}^k_\gamma(0) : | 0 \rangle$$

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu} = -i\int d^4x\, e^{ipx}\, \delta^{kj} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ik(0-x)}\, \frac{i(\not k + m_b)_{\delta\alpha}}{k^2-m_b^2}$$

$$(i\gamma_\mu\gamma_5)_{\alpha\beta}\,(-i\gamma_\nu\gamma_5)_{\gamma\delta}\,\langle 0|: q^j_\beta(x)\,\bar q^k_\gamma(0):|0\rangle$$

$$= \cancel{i}\int d^4x\, e^{ipx}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{ikx}\, \cancel{i} \left[\frac{(\cancel{-}i\gamma_\nu\gamma_5)(\not k+m_b)(\cancel{i}\gamma_\mu\gamma_5)}{k^2-m_b^2}\right]_{\gamma\beta}$$

$$\langle 0|: q^j_\beta(x)\,\bar q^j_\gamma(0):|0\rangle$$

$\langle 0|: q^j_\beta(x)\,\bar q^j_\gamma(0):|0\rangle$ 4x4 bir matrisin $\beta\gamma$ elemanı olarak düşünülebilinir.

$$\langle 0|: q^j_\beta(x)\,\bar q^j_\gamma(0):|0\rangle = A_{\beta\gamma}$$

Bütün 4x4 matrisler $\Gamma = \{\mathbb{1}, \gamma_\mu, i\gamma_\mu\gamma_5, \sigma_{\mu\nu}/\sqrt{2}, \gamma_5\}$ matrişlerinin lineer bileşimi şeklinde yazılabilirler:

$$A_{\beta\gamma} = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}(A\Gamma_i)(\Gamma_i)_{\beta\gamma}$$ $\Gamma_i \in \Gamma$ olmak üzere.

Yerine yerleştirirsek

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu} = +\cancel{i}\int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{i(p+k)x}\, \mathrm{Tr}\left(\frac{\gamma_\nu\gamma_5(\not k+m_b)\gamma_\mu\gamma_5\Gamma_i}{k^2-m_b^2}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)\langle 0|:\bar q(0)\,\Gamma_i\, q(x):|0\rangle$$

Sadece $\Gamma_i = \mathbb{1}$ ve $\Gamma_i = \gamma_\alpha$ terimleri katkı verebilir.

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \frac{e^{i(p+k)x}}{k^2-m_b^2}\, \cancel{Tr\left[\gamma_\nu \gamma_5 (\not k + m_b)\gamma_\mu \gamma_5\right]}$$

$$\Big\{ Tr\left[\gamma_\nu \gamma_5 \cancel{(\not k + m_b)} \gamma_\mu \gamma_5\right] \langle 0|:\bar q(0) q(x):|0\rangle$$

$$+ Tr\left[\gamma_\nu \gamma_5 \cancel{(\not k + m_b)} \gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\alpha\right] \langle 0|:\bar q(0)\gamma_\alpha q(x):|0\rangle \Big\}$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{d^4x\, d^4k}{(2\pi)^4}\, \frac{e^{i(p+k)x}}{k^2-m_b^2}$$

$$\Big\{ -m_b 4 g_{\mu\nu} \langle 0|:\bar q(0) q(x):|0\rangle$$

$$\cancel{4}\left(k_\nu g_{\mu\alpha} + k_\mu g_{\nu\alpha} - g_{\mu\nu} k_\alpha\right) \langle 0|:\bar q(0)\gamma_\alpha q(x):|0\rangle \Big\}$$

$$= -\int \frac{d^4x\, d^4k}{(2\pi)^4}\, \frac{e^{i(p+k)x}}{k^2-m_b^2}$$

$$\Big\{ -m_b g_{\mu\nu} \langle 0|:\bar q(0) q(x):|0\rangle$$

$$- g_{\mu\nu} \langle 0|:\bar q(0) \not k\, q(x):|0\rangle$$

$$+ k_\nu \langle 0|:\bar q(0)\gamma_\mu q(x):|0\rangle$$

$$+ k_\mu \langle 0|:\bar q(0)\gamma_\nu q(x):|0\rangle \Big\}$$

Biz $p_\mu p_\nu$ yapısıyla ilgileniyoruz.

Dolayısıyla ilk iki satırı hesaplamamıza gerek yok

$$\langle 0| : \bar{q}(0)\gamma_\mu q(x) : |0\rangle = x_\mu A(x^2)$$

şeklinde olmak zorundadır. Burada $A(x^2)$ ne olduğu bilinmeyen, ama sadece $x^2$'ye bağlı olan bir fonksiyondur. $A(x^2)$'yi Fourier dönüşümü olarak

$$A(x^2) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega x^2} A(\omega)$$

olarak yazacak olursak

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu} = -\int \frac{d^4x\, d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{i(p+k)x}}{k^2-m_b^2} \left\{k_\nu x_\mu + k_\mu x_\nu\right\} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega x^2} A(\omega)$$

$$= -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int\frac{d\omega}{2\pi}\frac{A(\omega)}{k^2-m_b^2} \left[k_\nu\left(-i\frac{\partial}{\partial p_\mu}\right)+k_\mu\left(-i\frac{\partial}{\partial p_\nu}\right)\right] \int d^4x\, e^{i(p+k)x+i\omega x^2}$$

$$= -\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int\frac{d\omega}{2\pi}\frac{A(\omega)}{k^2-m_b^2}$$

Önce k integralini almayı deneyelim

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu} = -i \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \int \frac{dw}{2\pi} e^{iwx^2} A(w)\, e^{ipx} \left[ x_\mu \left(-i\frac{\partial}{\partial k_\nu}\right) + (\mu \leftrightarrow \nu) \right]$$

$$\int d^4k \frac{e^{ikx}}{k^2 - m_b^2}$$

$$= -i \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \int \frac{dw}{2\pi} e^{iwx^2} A(w)\, e^{ipx} \left[ x_\mu \left(-i\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right) + (\mu \leftrightarrow \nu) \right]$$

$$(-i) \int d^4\tilde{k} \int dt \, \exp\{-i\tilde{k}\tilde{x} - t\tilde{k}^2 - tm_b^2\}$$

$$= -\int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \int \frac{dw}{2\pi} e^{iwx^2} A(w)\, e^{ipx} \left[ x_\mu \left(-i\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right) + (\mu \leftrightarrow \nu) \right]$$

$$\int_0^\infty dt \, \frac{\pi^2}{t^2} \exp\left\{-\frac{\tilde{x}^2}{4t}\right\} \exp\{-tm_b^2\}$$

$$= -\int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \int \frac{dw}{2\pi} e^{iwx^2} A(w)\, e^{ipx} \pi^2 \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} \exp\{-tm_b\}$$

$$\left[ x_\mu \left(-i\frac{x_\nu}{4t}\right) + (\mu \leftrightarrow \nu) \right] \exp\left\{-\frac{\tilde{x}^2}{4t}\right\}$$

$$= i(-i) \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \int \frac{dw}{2\pi} A(w)\, \pi^2 \int_0^\infty \frac{dt}{24t^3} \, 2\, x_\mu x_\nu \, \exp\left\{\frac{-\tilde{x}^2}{4t} - i\tilde{p}\tilde{x} - iw\tilde{x}^2\right\}$$

$$\exp\{-tm_b\}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 16\pi^2} \int \frac{dw}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{t^3} \exp\{-tm_b\} \left(-\frac{\partial}{\partial p_\mu}\frac{\partial}{\partial p_\nu}\right) \frac{\pi^2}{\left(\frac{1}{4t}+iw\right)} \exp\left\{\frac{-\tilde{p}^2}{4\left(\frac{1}{4t}+iw\right)}\right\}$$

Eğer $\tilde{p}^2$ çok büyük ise, ve $\frac{1}{4t}+i\omega$ çok büyük değil ise, integrale çok ~~...~~ az katkı gelir. $\tilde{p}^2$'nin çok büyük olduğu durumda integrale katkı $\frac{1}{4t}+i\omega$'nın çok büyük olduğu bölgeden gelecektir. Bu bölge ise, ya $t$'nin çok küçük olduğu bölgeye, ya da $\omega$'nın çok büyük olduğu bölgeye denk gelir. iki satır öncesine bakarsak, $t$'nin çok küçük olduğu bölge $\exp\left\{-\frac{\tilde{x}^2}{4t}\right\}$ faktöründen dolayı $\tilde{x}^2$'nin küçük olduğu bölgeden sadece katkı alır. $\omega$'nın çok büyük olduğu bölge ise $e^{i\omega\tilde{x}^2}$ faktöründen dolayı yine aynı bölgeden katkı alır. Dolayısıyla, $\tilde{p}^2 \to \infty$ giderken, $A(x^2)$'nin ne olduğundan bağımsız olarak ilişkilendirme fonksiyonuna ~~ast~~ büyük katkı sadece $\tilde{x}^2 \simeq 0$ veya $x_\mu \sim 0$ bölgesinden gelir.

dolayısıyla $A(x^2)$ fonksiyonunu $x \sim 0$ bölgesi etrafında açabiliriz.

Her ne kadar bu hesapta

$\langle 0|:\bar{q}(0)q(x):|0\rangle$ matrix elemanı bize gerekmiyor olsa da, bu matrix elemanını da $x\simeq 0$ etrafında açalım.

$$q(x) = q(0) + x_\alpha \mathcal{D}^\alpha q(0) + \frac{1}{2} x_\alpha x_\beta \mathcal{D}^\alpha \mathcal{D}^\beta q(0) + \dots$$

$$\langle 0|:\bar{q}(0)q(0):|0\rangle \equiv \langle \bar{q}q\rangle$$

$$\langle 0|:\bar{q}(0)\mathcal{D}^\alpha q(0):|0\rangle = 0$$

$$x_\alpha x_\beta \mathcal{D}^\alpha \mathcal{D}^\beta = \frac{1}{2} x_\alpha x_\beta \{\mathcal{D}^\alpha, \mathcal{D}^\beta\}$$

$$\langle 0|:\bar{q}(0)\{\mathcal{D}^\alpha, \mathcal{D}^\beta\} q(0):|0\rangle = C\, g^{\alpha\beta}$$

$$C = \frac{1}{4}\langle 0|:\bar{q}(0)\left(\mathcal{D}^\alpha \mathcal{D}^\beta + \mathcal{D}^\beta \mathcal{D}^\alpha\right)\frac{1}{2}\left(\gamma^\alpha\gamma^\beta + \gamma^\beta\gamma^\alpha\right) q(0):|0\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\langle 0|:\bar{q}(0)\mathcal{D}^\alpha \mathcal{D}^\beta\left(\gamma^\alpha\gamma^\beta + \gamma^\beta\gamma^\alpha\right) q(0):|0\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\langle 0|:\bar{q}(0)\Big[\cancel{\not{\mathcal{D}}\not{\mathcal{D}}} + \big(\underbrace{\mathcal{D}^\alpha \mathcal{D}^\beta}_{=\,\mathcal{D}^\beta \mathcal{D}^\alpha + [\mathcal{D}^\alpha, \mathcal{D}^\beta]}\gamma^\beta\gamma^\alpha\big)\Big] q(0):|0\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\langle 0|:\bar{q}(0)\Big[\cancel{\not{\mathcal{D}}\not{\mathcal{D}}} + \cancel{\not{\mathcal{D}}\not{\mathcal{D}}} - i g\, G^{\alpha\beta}\gamma^\beta\gamma^\alpha\Big] q(0):|0\rangle$$

$$= \frac{-ig}{4}\langle 0|\bar{q}(0)\, G^{\alpha\beta}\left(\frac{1}{2}[\gamma^\beta,\gamma^\alpha] + \frac{1}{2}\{\gamma^\beta,\gamma^\alpha\}\right) q(0):|0\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\langle 0|\bar{q}(0)\, g\, G^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\, q(0):|0\rangle + O(m_q^2)$$

$$= \frac{1}{4}\langle \bar{q}\, g\, G \sigma q\rangle$$

$$\boxed{\langle 0|:\bar{q}(0)q(x):|0\rangle = \langle\bar{q}q\rangle + \frac{1}{16}x^2\langle\bar{q}g\sigma G q\rangle + \ldots}$$

~~Diğer~~

$$\boxed{\langle 0|:\bar{q}^i(0)q^j(x):|0\rangle = \frac{\delta^{ij}}{3}\langle\bar{q}q\rangle + \frac{\delta^{ij}}{48}x^2\langle\bar{q}g\sigma G q\rangle + \ldots}$$

Diğer matrix elemanına dönersek

$$\langle 0|:\bar{q}(0)\gamma_\mu q(x):|0\rangle$$

$$= \langle 0|:\bar{q}(0)\gamma_\mu\left[q(0) + x_\alpha \mathcal{D}_\alpha q(0) + \frac{1}{4}x^\alpha x^\beta\{\mathcal{D}_\alpha,\mathcal{D}_\beta\}q(0) + \ldots\right]:|0\rangle$$

$$= \langle 0|:\bar{q}(0)\gamma_\mu q(0):|0\rangle + x^\alpha\langle 0|:\bar{q}(0)\gamma_\mu\mathcal{D}_\alpha q(0):|0\rangle$$
$$+ \frac{1}{4}x^\alpha x^\beta\langle 0|:\bar{q}(0)\gamma_\mu\{\mathcal{D}_\alpha,\mathcal{D}_\beta\}q(0):|0\rangle + \ldots$$

$$\langle 0|:\bar{q}(0)\gamma_\mu q(0):|0\rangle = 0$$

$$\langle 0|:\bar{q}(0)\gamma_\mu\{\mathcal{D}_\alpha,\mathcal{D}_\beta\}q(0):|0\rangle = 0$$

$$\langle 0|:\bar{q}(0)\gamma_\mu\mathcal{D}_\alpha q(0):|0\rangle = D\, g_{\mu\alpha}$$

$$D = \frac{1}{4}\langle 0|:\bar{q}(0)\gamma_\mu\mathcal{D}^\mu q(0):|0\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\langle 0|:\bar{q}(0)\underbrace{\not{\mathcal{D}}q(0)}_{-im_q q(0)}:|0\rangle$$

$$= -\frac{im_q}{4}\langle\bar{q}q\rangle$$

$$\langle 0|:\bar{q}(0)\gamma_\mu q(x):|0\rangle = -\frac{im_q}{4}x_\mu\langle\bar{q}q\rangle$$

$\Pi^{(2)}_{\mu\nu}$ hesabında yerleştirirsek

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu} = - \int \frac{d^4x\, d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{i(p+k)x}}{k^2 - m_b^2}$$

$$\left\{ k_\nu \left( \frac{-im_q}{4} \langle \bar{q}q \rangle \right) x_\mu + (\mu \leftrightarrow \nu) \right\} + g_{\mu\nu}(\ )$$

$$= + \frac{im_q}{4} \langle \bar{q}q \rangle \int \frac{d^4x\, d^4k}{(2\pi)^4} (k_\mu x_\nu + k_\nu x_\mu) \frac{e^{i(p+k)x}}{k^2 - m_b^2}$$

$$= \frac{im_q}{4} \langle \bar{q}q \rangle \int \frac{d^4k}{\cancel{(2\pi)^4}} \left[ k_\mu \left( -i \frac{\partial}{\partial p_\nu} \right) + k_\nu \left( -i \frac{\partial}{\partial p_\mu} \right) \right] \frac{\cancel{(2\pi)^4}\, \delta^4(p+k)}{k^2 - m_b^2}$$

$$= \frac{m_q}{4} \langle \bar{q}q \rangle \left[ \frac{\partial}{\partial p_\nu} \int d^4k \, \frac{k_\mu\, \delta^4(p+k)}{k^2 - m_b^2} + (\mu \leftrightarrow \nu) \right]$$

$$= \frac{m_q}{4} \langle \bar{q}q \rangle \left[ \frac{\partial}{\partial p_\nu} \frac{(-p_\mu)}{p^2 - m_b^2} + (\mu \leftrightarrow \nu) \right] + g_{\mu\nu}(\ )$$

$$= \frac{m_q}{4} \langle \bar{q}q \rangle \left[ \frac{-g_{\mu\nu}}{p^2 - m_b^2} + (-p_\mu) \frac{(-1)}{(p^2 - m_b^2)^2} (2p_\nu) + (\mu \leftrightarrow \nu) \right]$$

$$= \frac{m_q}{\cancel{4}} \langle \bar{q}q \rangle \frac{\cancel{4}\, p_\mu p_\nu}{(p^2 - m_b^2)^2} + g_{\mu\nu}(\ )$$

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu} = p_\mu p_\nu \frac{m_q \langle \bar{q}q \rangle}{(p^2 - m_b^2)^2} + g_{\mu\nu}(\ )$$

İki terimi toplarsak, $\Pi_{\mu\nu}$ için

$$\Pi_{\mu\nu} = p_\mu p_\nu \left\{ -\frac{3}{2} \int du\, u\bar{u} \ln\left[\left(\frac{m_b^2}{\bar{u}} + \frac{m_q^2}{u} - p^2\right] \frac{1}{\mu^2}\right\} \right.$$

$$\left. + \frac{m_q \langle \bar{q}q \rangle}{(p^2 - m_b^2)^2} + \text{sabit} \right\}$$

$$+ g_{\mu\nu} \{ \ldots \}$$

$$(p^2 \to -\infty)$$

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = p_\mu p_\nu \Pi^p(p^2) - g_{\mu\nu} \Pi^g(p^2)$$

olarak tanımlayacak olursak

$$\Pi^p(p^2) \underset{p^2 \to -\infty}{=} -\frac{3}{2} \int du\, u\bar{u} \ln\left[\left(\frac{m_b^2}{\bar{u}} + \frac{m_q^2}{u} - p^2\right] \frac{1}{\mu^2}\right]$$

$$+ \frac{m_q \langle \bar{q}q \rangle}{(p^2 - m_b^2)^2} + \text{sabit}$$

hadronik kısmı yazacak olursak

$$\Pi_{\mu\nu} = \sum_h \frac{|\langle 0 | \eta_\mu | h \rangle|^2}{-p^2 + m_h^2} = \frac{f_B^2 p_\mu p_\nu}{-p^2 + m_h^2} - \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) \frac{f_{B^*}^2}{-p^2 + m_{B^*}^2} + \ldots$$

olarak yazabiliriz. Burada sadece $0^-$ ve $1^+$ durumlarının katkısı yazılmıştır. Buradan

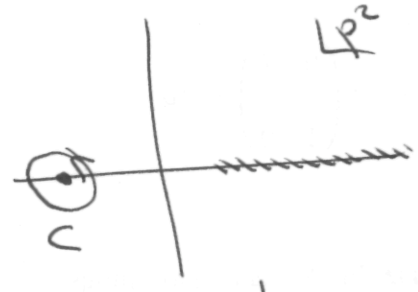
$$\Pi^p(p^2) \underset{p^2 \to 0}{=} \frac{f_B^2}{-p^2 + m_h^2} + \frac{f_{B^*}^2}{p^2(-p^2 + m_{B^*}^2)}$$ olarak yazılabilir.

Bu durumda $\Pi^\rho(p^2)$'yi hem $p^2 > 0$ için bulmak istediğimiz parametreler cinsinden, hem de $p^2 \ll 0$ ~~[illegible]~~ için QCD'nin parametreleri cinsinden ifade etmiş olduk.

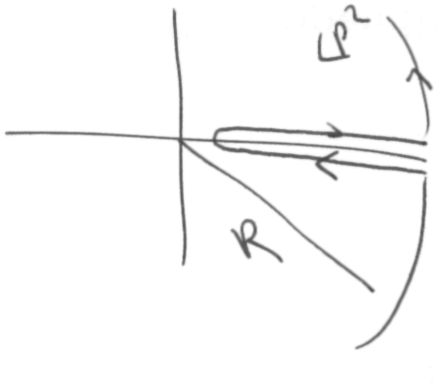
$p^2 \ll 0$ için olan ifadeyi $p^2 > 0$ olan ifadeye eşitleyebilmek için $\Pi(p^2)$'yi analitic olarak bütün karmaşık düzleme genelleştirmemiz lazım. Bunu $\Pi^\rho(p^2)$'nin spektral gösterimini kullanarak elde edebiliriz.

$\Pi^\rho(p^2)$, $p^2 > 0$ reel ekseni dışında her yerde analitiktir. Cauchy integral denklemini kullanarak

$$\Pi^\rho(p^2) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\Pi^\rho(s)}{s - p^2}\, ds$$




Integral konturumuzu, reel ekseni kesmeyecek şekilde deforme etmemiz integralin değerini değiştirmeyecektir. Konturu deforme ederek




haline getirirsek,

$$\Pi^P(p^2) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|s|=R} \frac{\Pi^P(s)}{s-p^2}\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{R}^{t_{th}} \frac{\Pi^P(s-i\varepsilon)}{s-p^2-i\varepsilon}\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{t_{th}}^{R} \frac{\Pi^P(s+i\varepsilon)}{s-p^2+i\varepsilon}\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|s|=R} \frac{\Pi^P(s)}{s-p^2}\,ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{t_{th}}^{R} \frac{\Pi^P(s-i\varepsilon)}{s-p^2}\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{t_{th}}^{R} \frac{\Pi^P(s+i\varepsilon)}{s-p^2}\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|s|=R} \frac{\Pi^P(s)}{s-p^2}\,ds + \frac{1}{\pi}\int_{t_{th}}^{R} ds\,\frac{1}{s-p^2}\,\frac{\Pi^P(s+i\varepsilon)-\Pi^P(s-i\varepsilon)}{2i}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|s|=R} \frac{\Pi^P(s)}{s-p^2}\,ds + \int_{t_{th}}^{R} ds\left(\frac{\mathrm{Im}\,\Pi^P(s)}{\pi}\right)\frac{1}{s-p^2}$$

olarak yazılır. Burada $\Pi^P(s+i\varepsilon)-\Pi^P(s-i\varepsilon)=2i\,\mathrm{Im}\,\Pi^P(s)$ yazmak için Schwarz yansıma prensibi kullanılmıştır. Buna göre negatif reel eksende reel değerler alan analitik bir fonksiyonun pozitif reel eksendeki süreksizliği ~~ana~~ sanal kısmına eşittir.

$R \to \infty$ limitini aldığımızda,

$$\frac{1}{s-p^2} = \frac{1}{s}\frac{1}{1-\frac{p^2}{s}} = \cancel{\frac{1}{s}} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(p^2)^n}{s^{n+1}}$$

ve

$$\Pi^P(p^2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(p^2)^n}{2\pi i}\int_{|s|\to\infty}\frac{\Pi^P(s)}{s^{n+1}}ds + \int_{t_{th}}^{\infty} ds\,\frac{Im\,\Pi^P(s)}{\pi}\frac{1}{s-p^2}$$

İlk kısımdaki toplamda, belli bir n değerinden sonra, $|s|\to\infty$ limitinde $\Pi^P(s)$ sıfıra gidecektir, geriye ise $p^2$ cinsinden sonlu bir polynom kalacaktır. Bu durumda

$$\Pi^P(p^2) = \int_{t_{th}}^{\infty} ds\,\frac{Im\,\Pi^P(s)}{\pi}\frac{1}{s-p^2} + p^2 \text{ cinsinden bir polinom olarak yazılabilir.}$$

Burada dikkat edilmesi gereken nokta, bu ifade kullanılarak $p^2<0$ bölgesinde $\Pi^P(p^2)$'nin değerinin $s>0$ bölgesinde $Im\,\Pi^P(s)$ ifadesi kullanılarak hesaplanabileceğidir.

<u>Not:</u> Bu çıkarım, pozitif reel eksen dışındaki bütün karmaşık düzlemde analitik olan bütün fonksiyonlar için geçerlidir.

$$\frac{Im\,\Pi^P(s)}{\pi} \equiv \rho(s)$$ fonksiyonuna spektral yoğunluk adı verilir.

QCD parametreleri cinsinden hesaplanan $\Pi^\rho(p^2)$ ifadesinin spektral yoğunluğunu hesaplayalım.

Bunun için

$\frac{1}{(p^2-m_b^2)^2}$ 'sinin ve

$\ln\left[\left[\frac{m_b^2}{\bar{u}}+\frac{m_q^2}{u}-p^2\right]\frac{1}{\mu^2}\right]$ ifadesinin

pozitif reel eksen üzerindeki sanal kısmını hesaplamak gerekmektedir.

$\frac{1}{(p^2-m_b^2)^2}$ 'sinin sanal kısmı:

$$\mathrm{Im}\frac{1}{(p^2-m_b^2)^2} = \left(\frac{1}{(p^2-m_b^2+i\varepsilon)^2}-\frac{1}{(p^2-m_b^2-i\varepsilon)^2}\right)\frac{1}{2i}$$

$$= -\frac{d}{dp^2}\left(\frac{1}{p^2-m_b^2+i\varepsilon}-\frac{1}{p^2-m_b^2-i\varepsilon}\right)\frac{1}{2i}$$

$$= -\frac{d}{dp^2}\frac{-2i\varepsilon}{(p^2-m_b^2)^2+\varepsilon^2}\frac{1}{2i}$$

$$= \frac{d}{dp^2}\frac{\varepsilon}{(p^2-m_b^2)^2+\varepsilon^2}$$

$$= +\pi\frac{d}{dp^2}\delta(p^2-m_b^2)$$

$$\boxed{\mathrm{Im}\frac{1}{(p^2-m_b^2)^2} = +\pi\,\delta'(p^2-m_b^2)}$$

62

$$\text{Im}\ln\left(\frac{s(u)-p^2}{\mu^2}\right) = \frac{1}{2i}\left[\ln\left(\frac{s(u)-p^2-i\varepsilon}{\mu^2}\right) - \ln\left(\frac{s(u)-p^2+i\varepsilon}{\mu^2}\right)\right]_0^1$$

$$\boxed{s(u) = \frac{m_b^2}{\bar{u}} + \frac{m_q^2}{u}}$$

$\ln x$ fonksiyonu $x>0$ için sürekli ve reeldir. $x<0$ için ise ($x<0$'da kesik tanımlarsak)

$\ln(-|x|+i\varepsilon) = \ln|x| + i\pi$

$\ln(-|x|-i\varepsilon) = \ln|x| - i\pi$ olarak tanımlanır.

dolayısıyla

$\text{Im}\ln\left(\frac{s(u)-p^2}{\mu^2}\right) = 0$ eger $p^2 - s(u) < 0$ ise

$$\text{Im}\ln\left(\frac{s(u)-p^2}{\mu^2}\right) = \Theta(p^2-s(u))\frac{1}{2i}\left[\ln\left(\frac{s(u)-p^2-i\varepsilon}{\mu^2}\right) - \ln\left(\frac{s(u)-p^2+i\varepsilon}{\mu^2}\right)\right]$$

$$= \Theta(p^2-s(u))\frac{1}{2i}\left[\left(\cancel{\ln\left|\frac{s(u)-p^2}{\mu^2}\right|} - i\pi\right) - \left(\cancel{\ln\left|\frac{s(u)-p^2}{\mu^2}\right|} + i\pi\right)\right]$$

$$= \Theta(p^2-s(u))\frac{1}{2i}(-2i\pi)$$

$\text{Im}\ln\left(\frac{s(u)-p^2}{\mu^2}\right) = -\pi\,\Theta(p^2-s(u))$ olarak bulunur.

Bu sonuçları kullanırsak

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\text{Im}\,\Pi^P(s=p^2) = +\frac{3}{2}\int du\, u\bar{u}\,\Theta(p^2-s(u)) + m_q\langle\bar{q}q\rangle\,\delta'(p^2-m_b^2)}$$

$s(u) = \frac{m_b^2}{\bar{u}} + \frac{m_q^2}{u}$

olarak bulunur.

diğer taraftan, hadronik parametreler cinsinden

$$\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\Pi^p(s=p^2) = -f_B^2\,\delta(s-m_B^2) + \frac{f_{B^*}^2}{m_{B^*}^2}\left[\delta(s-m_{B^*}^2)-\delta(s)\right]$$

$$+ \dots$$

olarak yazılabilir. İki tarafı eşitlersek

$$\int_{(m_b+m_q)^2}^{\infty} ds\,\frac{1}{s-p^2}\left[\frac{3}{2}\int_0^1 du\,u\bar{u}\,\Theta(s-s(u)) + m_q\langle\bar{q}q\rangle\,\delta'(s-m_b^2)\right] + p^2 \text{ cinsinden polinom}$$

$$= \frac{f_B^2}{-p^2+m_B^2} + \frac{f_{B^*}^2}{p^2(-p^2+m_{B^*}^2)} + \dots \qquad (*)$$

olarak yazılabilir.

$p^2$ cinsinden polinom bilmediğimiz bir ifadedir. Bundan kurtulmak için, $p^2$ ye göre yeterince türev almamız gerekmektedir.

Polinomun kaçıncı derece olduğunu da bilmediğimizden, kaç türev almamız gerektiğini bilemeyiz. Ayrıca belli bir $p^2$ değerinde türev alabilmek için, daha geniş bir $p^2$ aralığındaki $\Pi(p^2)$'nin değerleri ile ilgili bilgiye ihtiyacımız olmaktadır. Oysa OPE'yi kullanabilmek için, bu aralığın yeterince büyük ve negatif olan bölgede bulunması gerekmektedir.

hem yeterince çok türev alıp, hem de $p^2$'yi yeterince negatif alırsak!

$$\lim_{\substack{p^2 \to -\infty \\ n \to \infty \\ \frac{p^2}{n} = M^2}} \frac{(-p^2)^{n+1}}{n!} \left(\frac{d}{dp^2}\right)^n$$

işlemine Borel dönüşümü denir. Bu dönüşüm altında

$$\lim_{\substack{p^2 \to -\infty \\ n \to \infty \\ \frac{-p^2}{n} = M^2}} \frac{(-p^2)^{n+1}}{n!} \left(\frac{d}{dp^2}\right)^n \frac{1}{s-p^2} = \lim_{\substack{p^2 \to -\infty \\ n \to \infty \\ \frac{-p^2}{n} = M^2}} \frac{(-p^2)^{n+1} \cancel{(-1)^n}\, n!}{n!\,(s-p^2)^{n+1}}$$

$$= \lim \frac{1}{\cancel{n!}} \frac{\cancel{n!}}{\left(1-\frac{s}{p^2}\right)^{n+1}}$$

$$= \lim \left(1-\frac{s}{p^2}\right)^{-(n+1)}$$

$$= \lim \exp\left\{\frac{-s}{p^2}\left[-(n+1)\right]\right\}$$

$$= \lim \exp\left\{-s \frac{1}{\frac{-p^2}{n+1}}\right\} = \exp\left\{-\frac{s}{M^2}\right\}$$

$$\boxed{B_{M^2}(p^2) \frac{1}{s-p^2} = \exp\left\{-\frac{s}{M^2}\right\}}$$

Bu sonucu kullanarak (57*) denklemine uygularsak

$$\int_{(m_b+m_q)^2}^{\infty} ds \, \exp\left\{-\frac{s}{M^2}\right\}\left[\frac{3}{\sim}\int_0^1 du\, u\bar{u}\, \Theta(s-s(u)) - m_q\langle\bar{q}q\rangle\delta'(s-m_b^2)\right]$$

$$= + f_B^2 \exp\left\{-\frac{m_B^2}{M^2}\right\} + \frac{f_{B^*}^2}{m_{B^*}^2}\left(e^{-\frac{m_{B^*}^2}{M^2}} - 1\right) + \ldots$$

olarak bulunur. Eğer ilgilendiğimiz sadece B mezon ise, $B^*$'ın katkısını ve geri kalanların katkısını bir şekilde parametrize etmemiz gerekmektedir. Bunun için kuark-hadron Dualitesini kullanacağız. Buna göre uyarılmış durumların ve ~~daha yüksek enerjili durumların ka~~ sürekliliğin katkısını, OPE ~~kullandığımız dur~~ kullanarak hesapladığımız ifade cinsinden

$$\int_{s_0(M^2)}^{\infty} ds \, e^{-\frac{s}{M^2}} \rho^{OPE}(s) = + \frac{f_{B^*}}{m_{B^*}^2}\left(e^{-\frac{m_{B^*}^2}{M^2}} - 1\right) + \ldots$$

olarak yazabiliriz. Bu durumda

$$+ f_B^2 \exp\left\{-\frac{m_B^2}{M^2}\right\} = \int_{(m_b+m_q)^2}^{s_0(M^2)} ds \, \exp\left\{-\frac{s}{M^2}\right\} \rho^{OPE}(s)$$

olarak yazılabilir. Bu kesin bir sonuçtur, ancak bilinmeyen bir $s_0(M^2)$ fonksiyonu içerir. $s_0(M^2) \simeq s_0$ şeklinde bir sabit olarak alırsak, QCD Toplam kuralı

$$+ f_B^2 \exp\left\{-\frac{m_B^2}{M^2}\right\} = \int_{(m_b+m_q)^2}^{s_0} ds \, \exp\left\{-\frac{s}{M^2}\right\} \rho^{OPE}(s)$$ olarak elde edilir.

Borel parametresi, yoğuşmaların katkısının küçük olacağı kadar büyük, yüksek durumların katkısının küçük olacağı kadar da küçük seçilir. Eğer kütle biliniyorsa, toplam kuralları ~~toplamak~~ $f_B$'yi bulmak için

$$f_B^2 = \exp\left\{\frac{m_B^2}{M^2}\right\}\int_{(m_b+m_q)^2}^{s_0} ds \exp\left\{-\frac{s}{M^2}\right\}\rho^{OPE}(s)$$

olarak elde edilir.

Kütle bulunmak isteniyorsa, toplam kuralının $1/M^2$'ye göre türevi alınır:

$$f m_B^{\cancel{2}} \exp\left\{-\frac{m_B^2}{M^2}\right\} = \int_{(m_b+m_q)^2}^{s_0} ds \exp\left\{-\frac{s}{M^2}\right\}(+s)\rho^{OPE}(s)$$

elde edilir. Taraf tarafa bölünürse

$$m_B^2 = \frac{\int_{(m_b+m_q)^2}^{s_0} ds \exp\left\{-\frac{s}{M^2}\right\} s\rho^{OPE}(s)}{\int_{(m_b+m_q)^2}^{s_0} ds \exp\left\{-\frac{s}{M^2}\right\}\rho^{OPE}(s)}$$

olarak bulunabilinir.

Borel dönüşümü, spektral yoğunluğu hesaplamak için bize bir yöntem daha verir.
Bu yöntemi görmek için önce

$e^{-\alpha \tilde{p}^2}$'nın borelinin ne olduğuna bir bakalım. ~~Bunun Boreli~~ Bunun için önce

$$\frac{1}{s+\tilde{p}^2} = \int_0^\infty dt \exp\{-t(s+\tilde{p}^2)\}$$ nin

iki tarafının da borelini alalım:

$$\exp\left\{-\frac{s}{M^2}\right\} = \int_0^\infty dt \exp\{-st\} B\left(\exp(-t\tilde{p}^2)\right)$$

Bu eşitliğin sağlanabilmesi için

$$B_{M^2}\left(\exp(-t\tilde{p}^2)\right) = \delta\left(t - \frac{1}{M^2}\right)$$ olması

gerekmektedir.

$$\Pi(p^2) = \int ds \frac{\rho(s)}{s-p^2} *$$

ifadesini $p^2$'ye göre borel alırsak

$$B_{M^2}(p^2)\, \Pi(p^2) = \int ds\, \rho(s)\, e^{-\frac{s}{M^2}}$$

$\frac{1}{M^2} = \sigma$ yazıp, $\sigma$ ya göre bir defa daha borel alırsak

$$B_{\tau}(\sigma)\, B_{M^2}(p^2)\, \Pi(p^2) = \int ds\, \rho(s)\, \delta\left(s - \frac{1}{\tau}\right) = \rho\left(\frac{1}{\tau}\right)$$

olarak spectral yoğunluk bulunur.

$\dfrac{1}{(m_b^2-p^2)^2}$ için spektral yoğunluğun $\cancel{-}\,\delta'(p^2-m_b^2)$ olduğunu hesaplamıştık. Bu yeni yöntemi uygularsak

$$\frac{1}{(m_b^2-p^2)^2} = \int_0^\infty dt\, t \exp\{-t m_b^2\} \exp\{-t(-p^2)\}$$

$$\longrightarrow \int_0^\infty dt\, t \exp\{-t m_b^2\}\, \delta\left(t - \frac{1}{M^2}\right)$$

$$= \frac{1}{M^2} \exp\left\{-\frac{m_b^2}{M^2}\right\}$$

$$\cancel{\text{olur}} \quad = \sigma \exp\{-\sigma m_b^2\}$$

$$= -\frac{d}{dm_b^2} \exp\{-\sigma m_b^2\}$$

$$\longrightarrow -\frac{d}{dm_b^2}\, \delta\left(\cancel{\sigma} m_b^2 - \frac{1}{\tau}\right) = \rho\left(\frac{1}{\tau}\right)$$

$$\rho(s) = -\frac{d}{dm_b^2}\delta(m_b^2 - s) = -\delta'(m_b^2 - s)$$

$$\boxed{\rho(s) = \delta'(s - m_b^2)}$$

olarak hesaplanır.