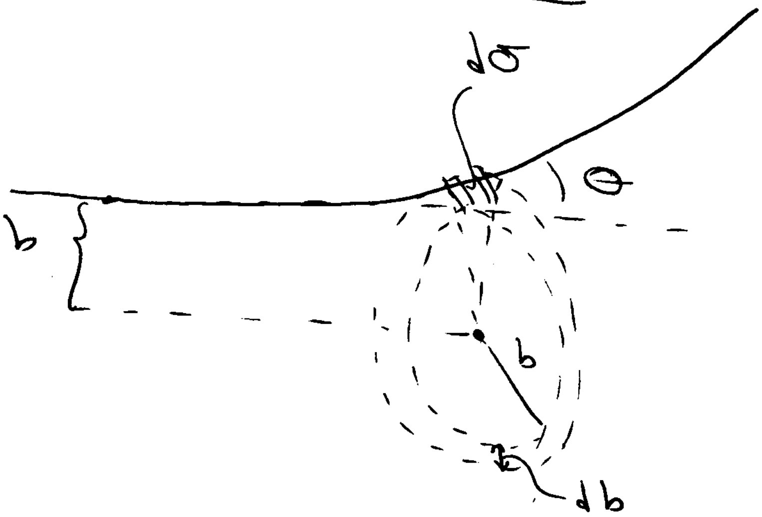
Tesir Kesiti

bir sistemle ilgili bütün bilgileri içerir.

bir nesnenin şekli $\Longleftrightarrow$ o nesnenin em tesir kesiti

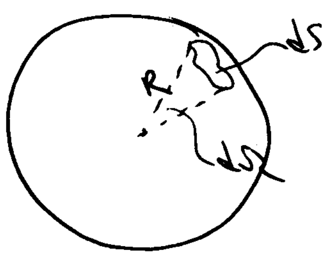
Klasik tesir kesiti;



uzak bir mesafeden

$d\sigma$: $d\Omega$ katı açısının içine saçılması için ~~çarpması~~ nişan alınması gereken alan.

katı açı:

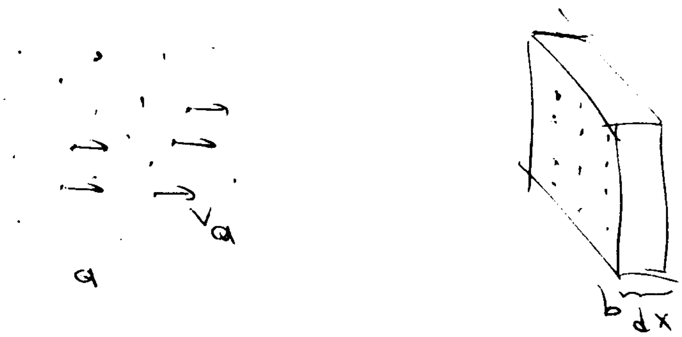


$$d\Omega = \frac{ds}{R^2}$$

açı:

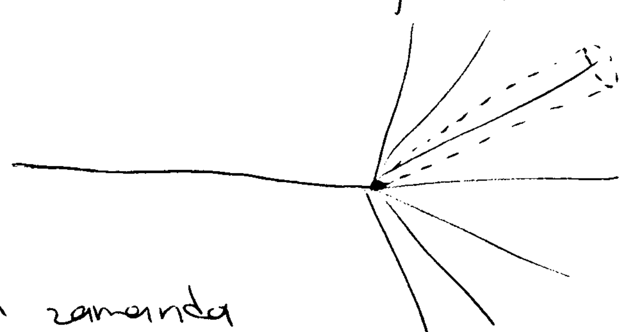
$$d\theta = \frac{dl}{R}$$

Tek bir parçacık yollayıp, onun nereye çarptığına bakmak pratik değil. Onun yerine bir hedefe bir parçacık demeti yollarsınız



density of a(b) particles : $n_{a(b)}$
velocity of a(b) particles : $v_{a(b)}$
~~area~~ total area where the particles colide : A

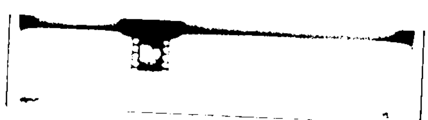
uzaktan bakıldığında



birim zamanda
$d\Omega$ katı açısının içine düşen parçacık sayısı: dN

birim zamanda ~~gelen~~ ~~parça~~ ~~çarpışan~~ varan a parçacığı sayısı: $n_a v_a A$

her bir a+b çarpışması için, $d\Omega$ katı açısına saçılması için $d\sigma$ alanına çarpması gerekmektedir. Toplam $n_b A dx$ kadar b parçacığı olduğuna göre, $(d\sigma\, n_b A dx)$'lik bir alana çarpan



a parçacıkları $d\Omega$ katı açısı içine saçıl
bu alanın toplam alana oranı

$$\frac{d\sigma\, n_b\, A\, dx}{A} = (d\sigma\, n_b\, dx)$$

~~bu kadar parçacık~~
bu kadarlık bir oran $d\Omega$ katı açısına saçılır.
birim zamanda bu katı açıya giren parçacık sayısı

$$\underbrace{(n_a v_a A)}_{\text{birim zamanda gelen "a" parçacıkları}}\underbrace{(d\sigma\, n_b\, dx)}_{\text{ilgili alana çarpan a parçacıkları oranı}} = dN$$

$$d\sigma = \frac{dN}{(n_a v_a)(n_b A\, dx)}$$

$n_a v_a$: a parçacıklarının akısı

$n_b A dx$: toplam b parçacığı sayısı

$\Rightarrow d\sigma$ = birim b parçacığı ve birim a parçacığı akısı başına $d\Omega$ katı açısı içine saçılan parçacık sayısı.

<u>boyut kontrolü</u>

$$\boxed{\frac{dN}{(n_a v_a)(n_b A\, dx)}} = \frac{1/s}{\frac{1}{m^3}\,\frac{m}{\cancel{s}}\,\frac{1}{\cancel{m^3}}\,\cancel{m^2}\,\cancel{m}} = m^2 = \text{Alan birimi}$$

kuantum tesir kesiti tanımı da yine

$$d\sigma = \frac{dN}{(n_a v_a)(n_b A\, dx)}$$

olarak yapılır.

Parçacık akısı:

$n_b n_a v_a$: b parçacıklarının durduğu referans sistemi için geçerli.

b parçacıkları v_b hızı ile gidiyorsa (aynı doğrultuda hareket ettiklerini varsayalım)

$v_a \to v_a + v_b$

$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E}$

$$\overset{a}{\longrightarrow}\ \vec{v}_a \qquad v_b\ \overset{b}{\longleftarrow}$$

$\cancel{\vec{v}_a \quad \vec{v}_b = \vec{p}_a}$

$$v_a + v_b = \frac{p_a}{E_a} + \frac{p_b}{E_b} = \frac{|\vec{p}_a| E_b + |\vec{p}_b| E_a}{E_a E_b}$$

$p_a = (E_a, \vec{p}_a)$

$p_b = (E_b, \vec{p}_b)$

$$v_a + v_b = \sqrt{(v_a + v_b)^2}$$

$$= \sqrt{v_a^2 + v_b^2 + 2 v_a v_b}$$

$$= \frac{1}{E_a E_b}\sqrt{\vec{p}_a^{\,2} E_b^2 + p_b^2 E_a^2 + 2 p_a p_b E_a E_b}$$

$$= \frac{1}{E_a E_b}\sqrt{\vec{p}_a^{\,2}(m_b^2 + \vec{p}_b^{\,2}) + \vec{p}_b^{\,2}(m_a^2 + \vec{p}_a^{\,2}) - 2\vec{p}_a \cdot \vec{p}_b E_a}$$

$$= \frac{1}{E_a E_b}\sqrt{2\vec{p}_a^{\,2}\vec{p}_b^{\,2} + m_a^2 \vec{p}_b^{\,2} + m_b^2 \vec{p}_a^{\,2} - 2\vec{p}_a \vec{p}_b}$$

$$\vec{p}_a \cdot \vec{p}_b = -p_a p_b + E_a E_b$$

$$v_a \to v_a + v_b = \frac{|\vec{p}_a|}{E_a} + \frac{|\vec{p}_b|}{E_b}$$

$$= \frac{|\vec{p}_a| E_b + |\vec{p}_b| E_a}{E_a E_b}$$

$$= \frac{\sqrt{|\vec{p}_a|^2 E_b^2 + |\vec{p}_b|^2 E_a^2 + 2|\vec{p}_a||\vec{p}_b| E_a E_b}}{E_a E_b}$$

$$p_a p_b = E_a E_b - \vec{p}_a \cdot \vec{p}_b$$

$$= E_a E_b + |\vec{p}_a||\vec{p}_b|$$

$$(p_a p_b)^2 = E_a^2 E_b^2 + |\vec{p}_a|^2 |\vec{p}_b|^2 + 2 E_a E_b |\vec{p}_a||\vec{p}_b|$$

$$v_a + v_b = \frac{\sqrt{|\vec{p}_a|^2 E_b^2 + |\vec{p}_b|^2 E_a^2 + (p_a p_b)^2 - E_a^2 E_b^2 - |\vec{p}_a|^2 |\vec{p}_b|^2}}{E_a E_b}$$

$$= \frac{\sqrt{(p_a p_b)^2 - (E_a^2 - \vec{p}_a^{\,2})(E_b^2 - \vec{p}_b^{\,2})}}{E_a E_b}$$

$$= \frac{\sqrt{(p_a p_b)^2 - p_a^2 p_b^2}}{E_a E_b}$$

$$\Rightarrow d\sigma = \frac{dN}{\frac{n_a (n_b A dx)}{E_a E_b} \sqrt{(p_a p_b)^2 - p_a^2 p_b^2}}$$

Let $\mathcal{M}$ be an amplitude s.t.

$|\mathcal{M}|^2$ is the probability of scattering per unit time per unit volume

$$\boxed{d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4\left(\sum p_i - \sum p_f\right)}{\sqrt{(p_a p_b)^2 - (p_a^2 p_b^2)}} \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f}}$$

$$\boxed{d\Gamma = \frac{1}{2m_i} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4\left(p_i - \sum p_f\right) \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f}}$$

$|\mathcal{M}|^2$ hesabı sonra anlatılacak,
Son durumda sadece iki parçacık olan hesaplara bakalım. Bu durumda

$$\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f} = \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2}$$

$\sum p_i = P$ ile gösterelim.
Toplam tesir kesit veya genişliği hesaplamak için

$$|\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4 (P - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2}$$

integrallerini hesaplamamız lazım.

Eğer $|M|^2$, P_1 ve P_2'den bağımsız ise, ya da $(P_1 P_a)$, $(P_1 P_b)_*$ gibi $P_{1\alpha}$ içeren bir terim içeriyor ise, integralleri nasıl hesaplayabileceğimize bakalım:

1) $I_0(P^2) = \int (2\pi)^4 \delta^4(P - p_1 - p_2) \dfrac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \dfrac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2}$

Bu integral, Lorentz dönüşümleri altında değişmez dolayısı ile istediğimiz referans sisteminde hesaplayabiliriz.

ayrıca $(p_1+p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2E_1E_2 - 2\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2$

ve $E_1 \geq |\vec{p}_1|$

$E_2 \geq |\vec{p}_2|$

$E_1E_2 \geq |\vec{p}_1||\vec{p}_2| \geq \vec{p}_1\cdot\vec{p}_2$

olduğundan

$(p_1+p_2)^2 > 0$ olur.

dolayısı ile $I_0(P^2) = 0$ eğer $P^2 < 0$ ise

$P^2 > 0$ ise, öyle bir referans sistemi seçebiliriz ki bu referans sisteminde

$P = (P_0, 0) = (\sqrt{P^2}, 0)$

olsun.

Bu referans sisteminde

$$I_0(p^2) = \int \cancel{(2\pi)^4}\, \delta(\sqrt{p^2} - E_1 - E_2)\, \delta^3(-\vec{p}_1 - \vec{p}_2)\, \frac{d^3 p_1}{\cancel{(2\pi)^3}\, 2E_1}$$

uzamsal $\delta(\,)$ fonksiyonunu kullanarak, p_2 integralini hesaplayabiliriz.

$$I_0(p^2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \delta(\sqrt{p^2} - E_1 - E_2)\, \frac{d^3 p_1}{2E_1\, 2E_2}$$

Bu integralde $E_1 = \sqrt{\vec{p}_1^{\,2} + m_1^2}$

$E_2 = \sqrt{\vec{p}_1^{\,2} + m_2^2}$

$d^3\vec{p}_1$ integrallerini almak için küresel koordinatla kullanabiliriz; $d^3 p_1 = p_1^2\, dp_1\, d\Omega_{p_1}$

integralin içindeki hiçbirşey $\vec{p}_1$'in yönüne bağlı olmadığı için, açı integrallerini alabiliriz

$$\int d\Omega_{p_1} = 4\pi$$

$$I_0(p^2) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{\cancel{4\pi}}{\cancel{4}} \int \delta\left(\sqrt{p^2} - \sqrt{m_1^2 + \vec{p}_1^{\,2}} - \sqrt{m_2^2 + \vec{p}_1^{\,2}}\right) \frac{p_1^2}{E_1 E_2}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int \delta\left(\sqrt{p^2} - \sqrt{\vec{p}_1^{\,2} + m_1^2} - \sqrt{p_1^2 + m_2^2}\right) \frac{\vec{p}_1^{\,2}\, dp_1}{E_1 E_2}$$

δ( ) fonksiyonunu kullanarak integrali hesaplayabilmek için, δ'nın içinin sıfır olduğu noktayı hesaplamamız lazım.

$$\left(\sqrt{P^2} - \sqrt{\vec{p}_1^{\,2} + m_1^2}\right)^2 = \left(\sqrt{\vec{p}_1^{\,2} + m_2^2}\right)^2$$

$$P^2 + \cancel{\vec{p}_1^{\,2}} + m_1^2 - 2\sqrt{P^2}\sqrt{\vec{p}_1^{\,2} + m_1^2} = \cancel{\vec{p}_1^{\,2}} + m_2^2$$

$$E_1^0 = \sqrt{\vec{p}_1^{\,2} + m_1^2} = \frac{P^2 + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{P^2}}$$

$$p_1^0 = \frac{\lambda^{1/2}(P^2, m_1^2, m_2^2)}{2\sqrt{P^2}}$$

δ fonksiyonunun

$$\delta(f(x)) = \sum_{\substack{x_0 \text{ st} \\ f(x_0)=0}} \frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_0)|}$$

özelliğini kullanarak

$$\frac{\delta\left(\sqrt{P^2} - \sqrt{m_1^2 + \vec{p}_1^{\,2}} - \sqrt{m_2^2 + \vec{p}_2^{\,2}}\right)}{E_1 E_2} = \frac{\delta(p_1 - p_1^0)}{E_1 E_2\left(\frac{|\vec{p}_1|}{\sqrt{\vec{p}_1^{\,2} + m_1^2}} + \frac{|\vec{p}_2|}{\sqrt{\vec{p}_1^{\,2} + m_2^2}}\right)}$$

$$= \frac{\delta(p_1 - p_1^0)}{p_1^0 (E_1 + E_2)} = \frac{\delta(p_1 - p_1^0)}{p_1^0 \sqrt{P^2}}$$

ve sonra

$$I_0(P^2) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\delta(p_1 - p_1^0)}{p_1^0\sqrt{P^2}}\, p_1^2\, dp_1$$

$$= \frac{1}{4\pi}\,\frac{p_1^0}{\sqrt{P^2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\,\frac{\sqrt{(P^2+m_1^2-m_2^2)^2-4m_1^2P^2}}{2P^2}$$

$$= \frac{1}{8\pi P^2}\sqrt{\lambda(P^2, m_1^2, m_2^2)}$$

buradaki λ fonksiyonu

$$\lambda(a,b,c) = a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc$$
$$= (a+b-c)^2-4ab$$

olarak tanımlanan üçgen fonksiyonudur.

Integralin içinde bir tane $p_{1\alpha}$ veya $p_{2\alpha}$ varsa:

$$\int p_{1\alpha}\,(2\pi)^4\delta^4(P-p_1-p_2)\,\frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1}\,\frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2} = A\,P_\alpha$$

İki tarafı P_α ile çarpıp $\quad p_1 P = \frac{1}{2}[p_1^2+P^2-(p_1-P)^2] = \frac{1}{2}[m_1^2+P^2-m$

~~çünkü integrali alınan fonksiyon $p_1 \to -p_1$ altında işaret değiştirir ve $p_1 = 0$ etrafında simetrik bir bölge üzerinden integrali alınmaktadır~~

olduğu için

$$A = \frac{1}{P^2}\,\frac{1}{2}\left[m_1^2+P^2-m_2^2\right] I_0 \quad \text{olarak bulunur.}$$

<u>Ödev</u> integralin içinde $p_{2\alpha}$ varsa, hesabı yeniden yapınız

İntegralin içinde $P_{1\alpha}P_{1\beta}$, $P_{1\alpha}P_{2\beta}$ veya $P_{2\alpha}P_{2\beta}$ var ise.

$P_{1\alpha}P_{1\beta}$ durumu: (diğerleri ödev)

$$I_{\alpha\beta} = \int P_{1\alpha}P_{1\beta}\, \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3\, 2E_1}\, \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^2\, 2E_2}\, (2\pi)^4 \delta^4(P-p_1-p_2)$$

$I_{\alpha\beta}$ rank 2 bir tensordur. sadece P 4 vektörüne bağlıdır. Dolayısı ile açık ifadesi

(*) $\quad I_{\alpha\beta} = A g_{\alpha\beta} + B P_\alpha P_\beta$ şeklinde olmalıdır.

Bundan sonra yapmamız gereken A ve B sabitlerini hesaplamaktır. İki bilinmeyeni bulmak için, 2 denkleme ihtiyacımız var. Bu iki denklemi, (*) eşitliğini bir kere $g_{\alpha\beta}$ ile çarparak bir kere de $P_\alpha P_\beta$ ile çarparak elde edebiliriz:

$$g_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} = 4A + BP^2$$

$$P_\alpha P_\beta I_{\alpha\beta} = AP^2 + BP^4$$

~~A~~İkinci denklemi P^2, 1. denklemi de 4 ile bölersek

$$A + \frac{BP^2}{4} = \frac{g_{\alpha\beta}}{4} I_{\alpha\beta}$$

$$A + BP^2 = \frac{P_\alpha P_\beta I_{\alpha\beta}}{P^2}$$

olarak bulunur. taraf tarafa çıkarırsak

$$-\frac{3Bp^2}{4} = \left(\frac{g_{\alpha\beta}}{4} - \frac{p_\alpha p_\beta}{p^2}\right) I_{\alpha\beta}$$

$$\boxed{Bp^2 = \frac{4}{3}\left(\frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} - \frac{g_{\alpha\beta}}{4}\right) I_{\alpha\beta}}$$

ve

$$A = \frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} I_{\alpha\beta} - Bp^2$$

$$= \left(\frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} - \frac{4}{3}\frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} + \frac{g_{\alpha\beta}}{3}\right) I_{\alpha\beta}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{3}\left(\frac{g_{\alpha\beta}}{\cancel{4}} - \frac{p_\alpha p_\beta}{p^2}\right) I_{\alpha\beta}}$$

olarak hesaplanır. Bunların açık hallerini elde etmek için $g_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta}$ ve $p_\alpha p_\beta I_{\alpha\beta}$'nın açık hallerinin hesaplanması gerekir.

$$g_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \int p_{1\alpha} p_{1\beta} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^4(p - p_1 - p_2)$$

$$= \int p_1^2 \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^2 \delta^4(p - p_1 - p_2)$$

$$\boxed{g_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} = m_1^2 I_0}$$

$$\cancel{P_\alpha P_\beta I_{\alpha\beta}}$$

$$P_\alpha P_\beta I_{\alpha\beta} = P_\alpha P_\beta \int p_{1\alpha} p_{1\beta} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^4(P - p_1 - p_2)$$

$$= \int (p_1 P)^2 \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^4(P - p_1 - p_2)$$

Burada

$$p_1 P = -\frac{1}{2}\left[(P - p_1)^2 - P^2 - p_1^2\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[p_2^2 - p_1^2 - P^2\right] = \frac{1}{2}\left[P^2 + m_1^2 - m_2^2\right]$$

dolayısı ile

$$\boxed{P_\alpha P_\beta I_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\left[P^2 + m_1^2 - m_2^2\right]^2 I_0}$$

Bu iki sonuç kullanılarak

$$A = \frac{1}{3}\left(m_1^2 I_0 - \frac{1}{4}\frac{[P^2 + m_1^2 - m_2^2]^2}{P^2} I_0\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left[m_1^2 - \frac{(P^2 + m_1^2 - m_2^2)^2}{4P^2}\right] I_0 = -\frac{1}{12P^2} \lambda(P^2, m_1^2, m_2^2) I_0$$

$$\boxed{A = -\frac{1}{96 P^4}\left[\lambda(P^2, m_1^2, m_2^2)\right]^{3/2}}$$

$$B = \frac{4}{3P^2}\left[\frac{(P^2+m_1^2-m_2^2)^2}{4P^2} I_0 - \frac{m_1^2 I_0}{4}\right]$$

$$\cancel{= \frac{1}{3P^4} \lambda(P^2, m_1, m_2) I_0}$$

$$\boxed{\cancel{B = \frac{1}{24P^6}\left[\lambda(P^2, m_1^2, m_2^2)\right]^{3/2}}}$$

$$B = \frac{1}{3P^4}\left[\lambda(P^2, m_1^2, m_2^2) + 3m_1^2 \ldots\right.$$

$$B = \frac{1}{24P^6 \pi} \lambda^{1/2}(P^2, m_1^2, m_2^2)\left[\lambda(P^2, m_1^2 \ldots\right. + 3m_1^2 P^2 \ldots$$

Bütün sonuçları toplarsak;

$$\int p_{1\alpha} p_{1\beta} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^4(P - p_1 - p_2)$$

$$= -\frac{1}{96\pi P^4} \lambda^{3/2}(P^2, m_1^2, m_2^2) g_{\alpha\beta} + \frac{1}{24\pi P^6} \lambda^{3/2}(P^2, m_1^2, m_2^2) P_\alpha \ldots$$

$$+ \frac{1}{8\pi P^4} m_1^2 \lambda^{1/2}(P^2, m_1^2, m_2^2) P_\alpha P \ldots$$

$$= \frac{\lambda^{3/2}(P^2, m_1^2, m_2^2)}{96\pi P^4}\left[4\frac{P_\alpha P_\beta}{P^2} - g_{\alpha\beta}\right] + \frac{\lambda^{1/2}}{8P^4} m_1^2 P_\alpha P_\beta$$

~~olarak bulunur.~~

$$I_{\alpha\beta} = \frac{\lambda^{3/2}(P^2, m_1^2, m_2^2)}{96\pi P^4}\left[\frac{4P_\alpha P_\beta}{P^2} - g_{\alpha\beta}\right]$$

$$+ \frac{m_1^2 I_0}{P^4} P_\alpha P_\beta$$

Bu ve benzeri integraller ile, herhangi bir $|M|^2$ verildiğinde toplam tesir kesitini hesaplayabiliri

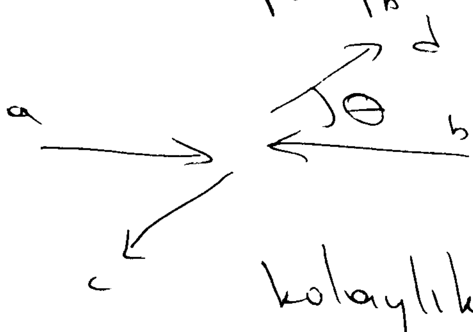
Differansiyel tesir kesiti:

Bazı durumlarda, $|M|^2$'nin açık ifadesini bilm bile bazı özelliklerini bilebiliriz. Ya da toplam tesir kesiti yerine parçacıkların belli bir momentum aralığına saçılma tesir kesitiyle ilgileniriz. Bu gibi durumlarda integrallerden bazılarını almamamız gerekir.

örnek: iki skalar parçacığın iki skalar parçacığa saçılması $a+b \to c+d$

Sistemin toplam momentumunun sıfır olduğu bir referans sisteminden bakalım.

$$\vec{p}_a+\vec{p}_b=0$$



a,b momentumları aynı doğru üzerindedir. c,d momentumları da aynı doğru üzerindedir.

kolaylık olsun diye a parçacığının cinsi ile c parçacığının cinsi ve b ile d parçacıklarının cinsleri aynı olsun.

— bu durumda $E_a = E_c, |\vec{p}_a| = |\vec{p}_c|$
$E_b = E_d, |\vec{p}_b| = |\vec{p}_d|$
olmak zorundadır. Aksi takdirde enerji ve momentumu koruyamayız. Bu durumda saçılmanın değiştireceği tek şey momentumların yönleridir.

— geliş doğrultusu ve saçılma doğrultusu bir düzlem belirtir. ~~Evren ve ilk ve son durum~~ ~~Evren~~ ~~dönüş~~ Doğa yasaları dönmeler altında değişmediği için, bu düzlemin yönelimi sonuçları değiştirme (eğer başlangıç parçacıklarının belli bir spini olsaydı, bu düzlemin bu spinle yaptığı açı sonuçları değiştirebilirdi)
Dolayısı ile $|M|^2$ sadece $|\vec{p}_a|$, $|\vec{p}_c|$ ve θ açısına bağlı olabilir. Daha önce de belirttiğimiz gibi, ~~enerjinin kor~~ enerji momentumun korunumu $|\vec{p}_c|$ ve $|\vec{p}_d|$ nin değerlerini sabitlediği için (ilk durum parametreleri cinsinden), $|M|^2$ nin bağlı olabileceği tek değişken parametre θ açısıdır. Dolayısı ile $|M|^2$'nin açık ifadesi ne olursa olsun, 6 $d^3p_c\, d^3p_d$ integralinden biri hariç hepsini hesaplayabiliriz.

$$(p_1p_2)^2 - p_1^2p_2^2 = \frac{(P^2 - p_1^2 - p_2^2)^2}{4} - p_1^2p_2^2 = \frac{\lambda(P^2, m_a^2, m_b^2)}{4}$$

Bu durumda

$$d\sigma = \frac{|M|^2 \cancel{(2\pi)^4}}{\sqrt{(p_1p_2)^2 - p_1^2p_2^2}} \delta^4(P - p_c - p_d) \frac{d^3p_c}{\cancel{(2\pi)^3}2E_c} \frac{d^3p_d}{(2\pi)^{\cancel{3}}2E_d}$$

$\delta^4(\;)$'yı kullanarak, d^3p_c integrallerini alabiliriz

$$d\sigma = |M|^2 \delta(P_0 - E_c - E_d) \frac{d^3p_c}{(2\pi)^2 2E_c 2E_d}$$

$$P = (P_0, 0)$$

$$p_c = (E_c, \vec{p}) = (\sqrt{\vec{p}^2 + m_c^2}, \vec{p})$$

$$p_d = (E_d, -\vec{p}) = (\sqrt{\vec{p}^2 + m_d^2}, -\vec{p})$$

$\vec{p}_a$'nın doğrultusunu z-ekseni olarak seçel

$$d^3p_c = p^2 dp\, d(\cos\theta)\, d\phi$$

ϕ açısı saçılma düzleminin yönelimini belirleyecek ve başka hiçbirşeyin buna bağlı olmadığı göz önüne alınırsa, bu integral ~~hesaplanabilir~~ olinabilinir ve

$$\boxed{d^3p_c = 2\pi p^2 dp\, d(\cos\theta)}$$

olarak bulunur. dolayısı ile

$$d\sigma = |M|^2 \delta(P_0 - \sqrt{p^2 + m_c^2} - \sqrt{p^2 + m_d^2}) \frac{2\pi p^2 dp\, d(\cos\theta)}{(2\pi)^2 2E_c 2E_d}$$

$$= |M|^2 \frac{\delta(p - p_0)}{P_0 \cancel{\frac{p}{E_c} + \frac{p}{E_d}}} \frac{p^2 dp\, d(\cos\theta)}{(2\pi) 2\cancel{E_c} 2\cancel{E_d}}$$

$$d\sigma = \frac{|M|^2 p_0\, d(\cos\theta)}{2\pi\sqrt{P^2}} \frac{2}{\lambda^{1/2}(P^2, m_a^2, m_b^2)}$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d(\cos\theta)} = \frac{|M|^2 p_0}{2s\sqrt{P^2}}}$$

olarak hesaplanır.

θ belli bir referans sistemindeki saçılma açısıdır. genelde istenen referans sisteminden bağımsız bir ifadedir. bunun için θ'yı 4 vectorler cinsinden yazmak gerekir

$$p_a = (E_a, \vec{k}) \qquad p_c = (E_c, \vec{p})$$

$$p_b = (E_b, -\vec{k}) \qquad p_d = (E_c, -\vec{p})$$

olarak yazarsak $p_0 = |\vec{p}|$, $P^2 = (E_a + E_b)^2$

ve $\cos\theta = \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{k}}{|\vec{p}||\vec{k}|}$ olur.

$(p_a \cdot p_c)$ çarpımına bakarsak

$$p_a p_c = E_a E_c - \vec{p}\cdot\vec{k} = E_a E_c - |\vec{p}|\cdot|\vec{k}|\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{(p_a p_c) - (E_a E_c)}{|\vec{p}||\vec{k}|}$$

$P = (\sqrt{p^2}, 0)$ olduğunu kullanırsak

$$\cancel{\cos\theta}\; E_a = \frac{p_a \cdot P}{\sqrt{P^2}}$$

$$E_c = \frac{p_c \cdot P}{\sqrt{P^2}}$$

$$p_a P = -\frac{1}{2}\left[(P-p_a)^2 - P^2 - p_a^2\right] \qquad (p_c P) = -\frac{1}{2}\left[(P-p_c)^2 - P^2 - p_c^2\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[m_b^2 - m_a^2 - P^2\right] \qquad = \frac{1}{2}\left[P^2 + m_c^2 - m_d^2\right]$$

$$p_a P = \frac{1}{2}\left[P^2 + m_a^2 - m_b^2\right]$$

$$p_b P = \frac{1}{2}\left[P^2 + m_b^2 - m_a^2\right]$$

$$(E_a E_c) = \frac{(p_a P)(p_c P)}{P^2} = \frac{\left[P^2 + (m_a^2 - m_b^2)\right]\left[P^2 + (m_c^2 - m_d^2)\right]}{4P^2}$$

$$\cos\theta = \left\{ (p_a p_c) - \frac{\left[P^2 + (m_a^2 - m_b^2)\right]\left[P^2 + (m_c^2 - m_d^2)\right]}{4P^2} \right\} \frac{1}{|\vec{p}||\vec{k}|}$$

kolaylık olması için $m_a = m_b = m_c = m_d$ olsun.

bu durumda $|\vec{p}| = E_c$

$|\vec{k}| = E_a$

$$\cos\theta = \frac{(p_a p_c)}{E_a E_c} - 1$$

$$p_a p_c = -\frac{1}{2}\left[(p_a - p_c)^2 - p_a^2 - p_c^2\right] = \frac{1}{2}\left[q^2 - m_a^2 - m_c^2\right]$$

$$d(\cos\theta) = d\left[\frac{1}{2E_a E_c}(q^2 - m_a^2 - m_c^2)\right]$$

$$= \frac{dq^2}{2E_a E_c} \Rightarrow \frac{d\sigma}{d(\cos\theta)} = \frac{|M|^2 p_0}{2\pi\sqrt{P^2}}$$

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{d\sigma}{2E_aE_c\, d(\cos\theta)} = \frac{1}{2E_aE_c}\, p_0 \frac{|M|^2}{2s\sqrt{P^2}}$$

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{\cancel{2\sqrt{P^2}}\; |M|^2}{2s\left[P^2+(m_a^2-m_b^2)\right]\left[P^2+(m_c^2-m_a^2)\right]}\; \frac{\lambda^{1/2}(P^2,m_1^2,m_2^2)}{\cancel{2\sqrt{P^2}}}$$

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{|M|^2\, \lambda^{1/2}(P^2,m_1^2,m_2^2)}{2s\left[P^2+(m_a^2-m_b^2)\right]\left[P^2+(m_c^2-m_a^2)\right]}$$

olarak bulunur. □

$|M|^2$ nin hesabı, Feynman Diagramları

Dirac cebri: γ_μ: 4 ~~matris~~ 4x4 matris

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2 g_{\mu\nu} \mathbb{1}$$

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2 g_{\mu\nu} \mathbb{1}$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu) = 2 g_{\mu\nu}\, \mathrm{Tr}\, \mathbb{1}$$

$$2\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\gamma_\nu = 8 g_{\mu\nu}$$

$$\boxed{\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\gamma_\nu = 4 g_{\mu\nu}}$$

Tek sayıda γ matrisinin çarpımının trace

$$Tr(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2n+1}})=0.$$

~~Tek say~~

Çift sayıda γ matrisinin traceleri

$$Tr(\gamma_\mu\gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu}$$

$$Tr\,\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta = Tr(2g_{\mu\nu}-\gamma_\nu\gamma_\mu)\gamma_\alpha\gamma_\beta$$

$$= 2g_{\mu\nu}\,Tr\,\gamma_\alpha\gamma_\beta - Tr\,\gamma_\nu(2g_{\mu\alpha}-\gamma$$

$$= 8g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} - 8g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + Tr\,\gamma_\nu\gamma_\alpha(2g_{\mu\beta}-\gamma_\beta\gamma_\mu)$$

$$= 8g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} - 8g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + 8g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} - Tr\,\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma$$

$$Tr\,\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta = 8g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} - 8g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + 8g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} - Tr\,\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta$$

$$\Rightarrow \boxed{Tr(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta) = 4g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} - 4g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + 4g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}}$$

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

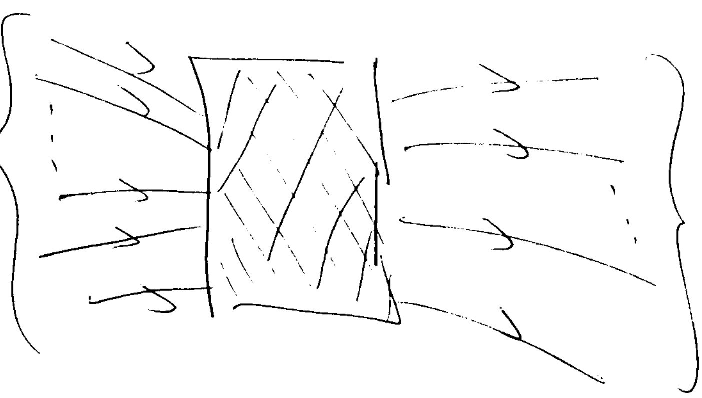
$$\gamma_5^2 = \mathbb{1}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_5 = 4i\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_5$$

QED

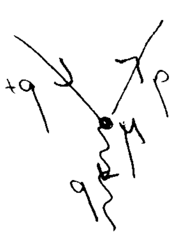
$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + q\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

giren parçacıklar



çıkan parçacıklar

giren parçacık çizgilerini
çıkan parçacık çizgilerine nasıl bağlarız?
kullanabileceğimiz parçalar: (QED için)



$p+q$, p, q, μ $\quad -ie\gamma_\mu$

p $\quad \dfrac{i}{p\!\!\!/ - m + i\varepsilon}$

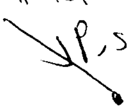
μ k ν $\quad \dfrac{-i}{k^2+i\varepsilon}\left[g_{\mu\nu} + (\xi-1)\dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]$

$\xi = 1$ Feynman gauge

$\xi = 0$ Landau gauge

p,s çıkan parçacık $\quad \bar{u}(p,s)$

giren parçacık



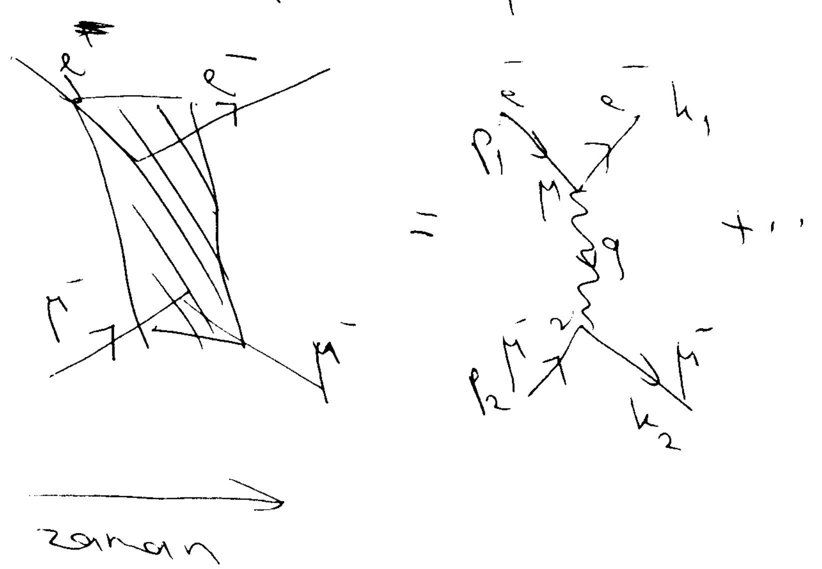
p,s $\quad u(p,s)$

k,λ μ çıkan foton $\quad \varepsilon^*_\mu(k,\lambda)$

μ giren foton $\quad \varepsilon_\mu(k,\lambda)$

- kutunun içine bütün olasılıkları doldur
- feynman kurallarını kullanarak katkıyı h

<u>örnek:</u> $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$



$$iM = \bar{e}(k_1)(-ie\gamma_\mu)e(p_1)\,\bar{\mu}(k_2)(-ie\gamma_\nu)\mu(p_2)\,\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2+i\epsilon}$$

Komplex eşleğini alırsak (Feynman ayarı kullan

$$-iM^* = \left[\bar{e}(k_1)(-ie\gamma_\mu)e(p_1)\right]^*\left[\bar{\mu}(k_2)(-ie\gamma_\nu)\mu(p_2)\right]^*\frac{ig^{\mu\nu}}{q^2-i\epsilon}$$

$\bar{u}$ 4 elemanlı bir satır matristir

$-ie\gamma_\mu$: 4x4 bir kare matristir

u: 4 elemanlı bir sütun matristir

dolayısıyla

$\bar{e}(k_1)(-ie\gamma_\mu)e(p_1) = (- - - -)\begin{pmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} - \\ - \\ - \\ - \end{pmatrix} = (\ )$ tek bir sayıdır

bir sayı için, kompleks eşleniği ile hermitsel eşleniği aynı şeylerdir.

dolayısı ile

$$\left[\bar{e}(k_1)(-ie\gamma_\mu)e(p_1)\right]^{*} = \left[\bar{e}(k_1)(-ie\gamma_\mu)e(p_1)\right]^{\dagger}$$

$$= e^{\dagger}(p_1)(-ie\gamma_\mu)^{\dagger}\,\bar{e}^{\dagger}(k_1)$$

$\bar{e} = e^{\dagger}\gamma^0$ ve $\gamma_\mu^{\dagger} = \gamma_0\gamma_\mu\gamma_0$ olduğundan

$$= e^{\dagger}(p_1)(ie)\cancel{(ie)}\gamma_0\gamma_\mu\cancel{\gamma_0\gamma_0}e(k_1)$$

$$= ie\,\bar{e}(p_1)\gamma_\mu e(k_1) \text{ olarak}$$

bulunur. aynı şey μ akımı için de yapılırsa

$$-iM^{*} = \left[\bar{e}(p_1)(ie\gamma_\mu)e(k_1)\right]\left[\bar{\mu}(p_2)(ie\gamma_\lambda)\mu(k_2)\right]\frac{ig^{\mu\lambda}}{q^2-i\varepsilon}$$

$$iM = \left[\bar{e}(k_1)(-ie\gamma_\alpha)e(p_1)\right]\left[\bar{\mu}(k_2)(-ie\gamma_\beta)\mu(p_2)\right]\frac{-ig^{\alpha\beta}}{q^2-i\varepsilon}$$

taraf tarafa çarparsak

$$|M|^2 = \frac{e^4}{q^4+\varepsilon^2}\left[\bar{e}(p_1)\gamma_\mu e(k_1)\bar{e}(k_1)\gamma_\alpha e(p_1)\right]$$
$$\left[\bar{\mu}(p_2)\gamma^\mu\mu(k_2)\bar{\mu}(k_2)\gamma^\alpha\mu(p_2)\right]$$

$L^{\ell}_{\mu\nu}(p,q) = \bar{\ell}(p)\gamma_\mu\ell(q)\bar{\ell}(q)\gamma_\nu\ell(p)$ olarak tanımlarsak

$$|M|^2 = \frac{e^4}{q^4+\varepsilon^2}L^{e}_{\mu\alpha}(p_1,k_1)\,L^{\mu\,\mu\alpha}(p_2,k_2)$$

olarak yazılabilir

$\overset{1}{L}_{\mu\nu}(p,q)$ hesabı:

Çoğu zaman deneylerde ~~ilk par~~ gönderilen hüzmenin belli bir polarizasyonu yoktur. her polarizasyon eşit oranda bulunur. Bu durumda $|M|^2$'yi hesaplarken, bir ortalama~~dan~~ hesaplamamız gerekir. aynı zamanda, son durum parçacıkları da polarizasyonlarına bakılmadan sayılır. dolayısı ile bütün son durum polarizasyonları üzerinden bir ~~orta~~ toplam alınır

$$\overline{|M|^2} \longrightarrow \sum_{\substack{\text{son durum}\\\text{polarizasyonları}}} \sum_{\substack{\text{ilk durum}\\\text{pol.}}} |M|^2 \frac{1}{(2S_1+1)(2S_2+1)}$$

veya

$$\overset{l}{L}_{\mu\nu} \longrightarrow \sum_{\substack{\text{son durum}\\\text{pol.}}} \sum_{\substack{\text{ilk durum}\\\text{pol.}}} \frac{1}{(2S_l+1)} \overset{l}{L}_{\mu\nu} \equiv \overline{\overset{l}{L}_{\mu\nu}}$$

Bu durumda

$$\sum_{\lambda} l_\alpha(p,\lambda)\,\bar{l}_\beta(p,\lambda) = (\not{p}+m_l)_{\alpha\beta}$$

eşitliği işimizi kolaylaştıracaktır.

$$\overline{L^{\ell}_{\mu\nu}}(p,q) = \frac{1}{2}\sum_{\lambda,\lambda'} \bar{\ell}(p,\lambda)\gamma_\mu \ell(q,\lambda')\bar{\ell}(q,\lambda')\gamma_\nu \ell(p,\lambda)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\lambda,\lambda'} \bar{\ell}_\alpha(p,\lambda)(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\, \ell(q,\lambda')_\beta\, \bar{\ell}(q,\lambda')_\delta\, (\gamma_\nu)_{\delta\eta}\, \ell(p,\ldots$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_\lambda \ell(p,\lambda)_\eta \bar{\ell}_\alpha(p,\lambda)\right)(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\left(\sum_{\lambda'} \ell_\beta(q,\lambda')\bar{\ell}(q,\lambda')_\delta\right.$$

$$(\gamma_\nu)_{\delta\eta}$$

$$= \frac{1}{2}(\not{p}+m_\ell)_{\eta\alpha}(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\not{q}+m_\ell)_{\beta\delta}(\gamma_\nu)_{\delta\eta}$$

$$= \frac{1}{2}\,Tr\left[(\not{p}+m_\ell)\gamma_\mu(\not{q}+m_\ell)\gamma_\nu\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{Tr\left[\not{p}\gamma_\mu\not{q}\gamma_\nu\right] + m_\ell^2\, Tr\,\gamma_\mu\gamma_\nu\right\}$$

$$= 2\left[p_\mu q_\nu - (pq)g_{\mu\nu} + p_\nu q_\mu + m_\ell^2 g_{\mu\nu}\right]$$

$$\boxed{\overline{L^{\ell}_{\mu\nu}}(p,q) = 2\left[(p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) + (m_\ell^2 - pq)g_{\mu\nu}\right]}$$

$|M|^2$ ifadesine yerleştirirsek

$$\overline{|M|^2} = \frac{e^4}{q^4+\varepsilon^2}\cdot 4\left\{\left[p_{1\mu}k_{1\alpha} + p_{1\alpha}k_{1\mu}\right] + (m_e^2 - p_1k_1)g_{\mu\alpha}\right\}$$

$$\left\{p_2^\mu k_2^\alpha + p_2^\alpha k_2^\mu + (m_\mu^2 - p_2k_2)g^{\mu\alpha}\right\}$$

Ödev: $m_e \neq 0$; m

Kolaylık olması açısından $m_e = m_\mu = 0$ alalım.

$$\overline{|M|^2} = \frac{4e^4}{q^4+\varepsilon^2}\left[p_{1\mu}k_{1\alpha} + p_{1\alpha}k_{1\mu} - p_1k_1\, g_{\mu\alpha}\right]\left[p_2^{\mu}k_2^{\alpha} + p_2^{\alpha}k_2^{\mu} - p_2k_2\, g^{\mu\alpha}\right]$$

$$= \frac{4e^4}{q^4+\varepsilon^2}\Big[2(p_1p_2)(k_1k_2) + 2(p_1k_2)(k_1p_2) - \cancel{(p_1k_1)(p_2k_2)} + \cancel{(p_1k_2)(k_1p_2)} + \cancel{(p_1p_2)(k_1k_2)} - \cancel{(p_1k_1)(p_2k_2)} - \cancel{(p_1k_1)(p_2k_2)} - \cancel{(p_1k_1)(p_2k_2)} + \cancel{4(p_1k_1)(p_2k_2)}\Big]$$

$$\boxed{\overline{|M|^2} = \frac{8e^4}{q^4+\varepsilon^2}\left[(p_1p_2)(k_1k_2) + (p_1k_2)(k_1p_2)\right]}$$

Çoğu zaman, 4 vektörler yerine, mandelstam değişkenleri kullanılır;

$$s \equiv (p_1+p_2)^2 = (k_1+k_2)^2$$
$$t \equiv (p_1-k_1)^2 = q^2 = (p_2-k_2)^2$$
$$u = (p_1-k_2)^2 = (p_2-k_1)^2$$

Mandelstam değişkenleri cinsinden ifade edersek

$$(p_1 p_2) = \frac{1}{2}\left[(p_1+p_2)^2 - p_1^2 - p_2^2\right] = \frac{s}{2}$$

$$(k_1 k_2) = \frac{1}{2}\left[(k_1+k_2)^2 - k_1^2 - k_2^2\right] = \frac{s}{2}$$

$$p_1 k_2 = -\frac{1}{2}\left[(p_1-k_2)^2 - p_1^2 - k_2^2\right] = -\frac{u}{2}$$

$$p_2 k_1 = -\frac{1}{2}\left[(p_2-k_1)^2 - p_2^2 - k_1^2\right] = -\frac{u}{2}$$

$$\overline{|M|^2} = \frac{8e^4}{t^2}\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2\right] = 2e^4\left[\left(\frac{s}{t}\right)^2 + \left(\frac{u}{t}\right)^2\right]$$

$$\overline{|M|^2} = 2e^4\left[\left(\frac{s}{t}\right)^2 + \left(\frac{u}{t}\right)^2\right]$$

18. sayfadaki sonucu kullanırsak ($P^2 \equiv s$)

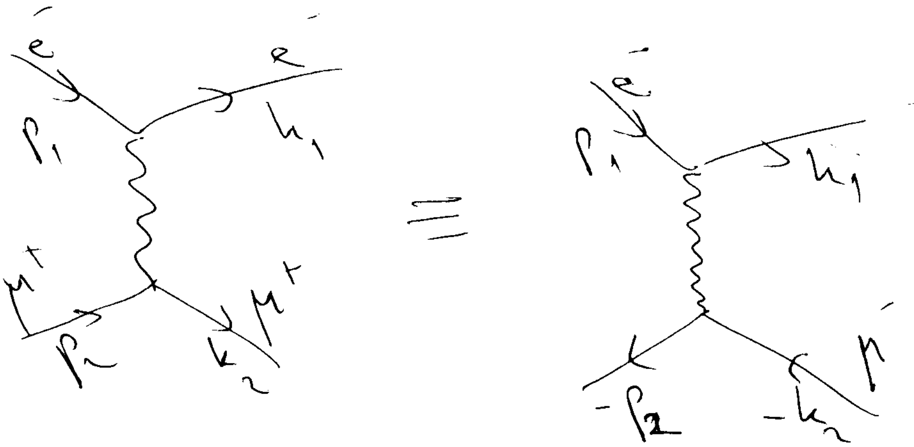
$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{e^4}{s\pi}\left[\left(\frac{s}{t}\right)^2 + \left(\frac{u}{t}\right)^2\right] = \frac{16\pi\alpha^2}{s}\left[\left(\frac{s}{t}\right)^2 + \left(\frac{u}{t}\right)^2\right]$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{dt} = \frac{16\pi\alpha^2}{s}\left[\left(\frac{s}{t}\right)^2 + \left(\frac{u}{t}\right)^2\right]}$$ *

ödev: ifadesinden başlayarak, μ'un durağan olduğu referans sisteminde $\frac{d\sigma}{d\Omega}$'yı hesaplayın.

$e^-\mu^+ \to e^-\mu^+$ saçılması

p momentumlu parçacık $\Leftrightarrow$ zamanda tersine giden $-p$ momentumlu parçacık



$e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ in neredeyse aynısı. tek fark

$k_2 \Leftrightarrow -p_2$

$\cancel{p_2 \Leftrightarrow k_2}$

$s=(p_1+p_2)^2 \to (p_1-k_2)^2 = u$

$t=(p_1-k_1)^2 \to (p_1-k_1)^2 = t$

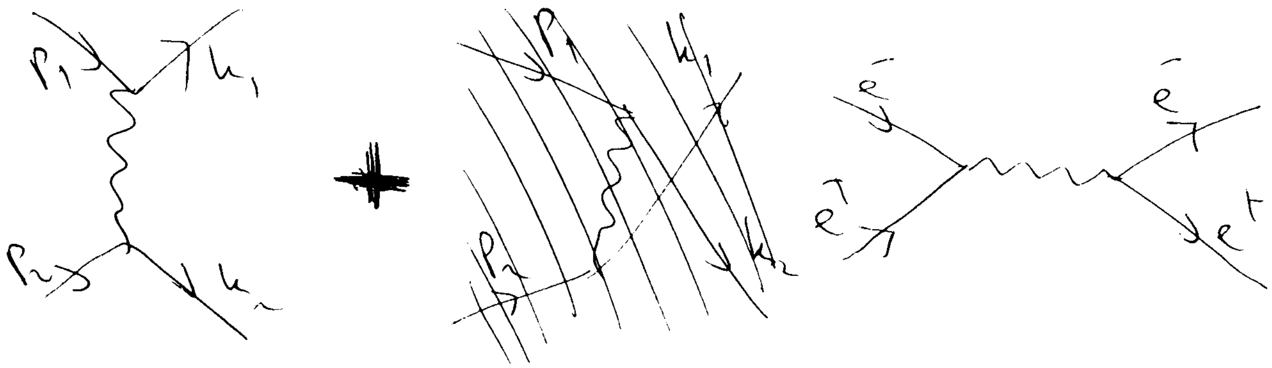
$u=(p_1-k_2)^2 \to (p_1+p_2) = s$

$|M|^2$

bir önceki sonucunda $|M|^2$'de $u \Leftrightarrow s$ yaparsak, bu saçılma için ~~tesir~~ ~~kesiti~~ elde edilir.

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{16 s\alpha^2}{s}\left[\left(\frac{s}{t}\right)^2 + \left(\frac{u}{t}\right)^2\right]$$

$e^+e^- \to e^+e^-$ saçılması



~~"−" işareti iki diagram arasında~~

İlk diagram bir önceki hesapın aynısıdır. İkinci diagram çaprazladan gelir. İki diagramda $i\mathcal{M}$'e katkı verir.

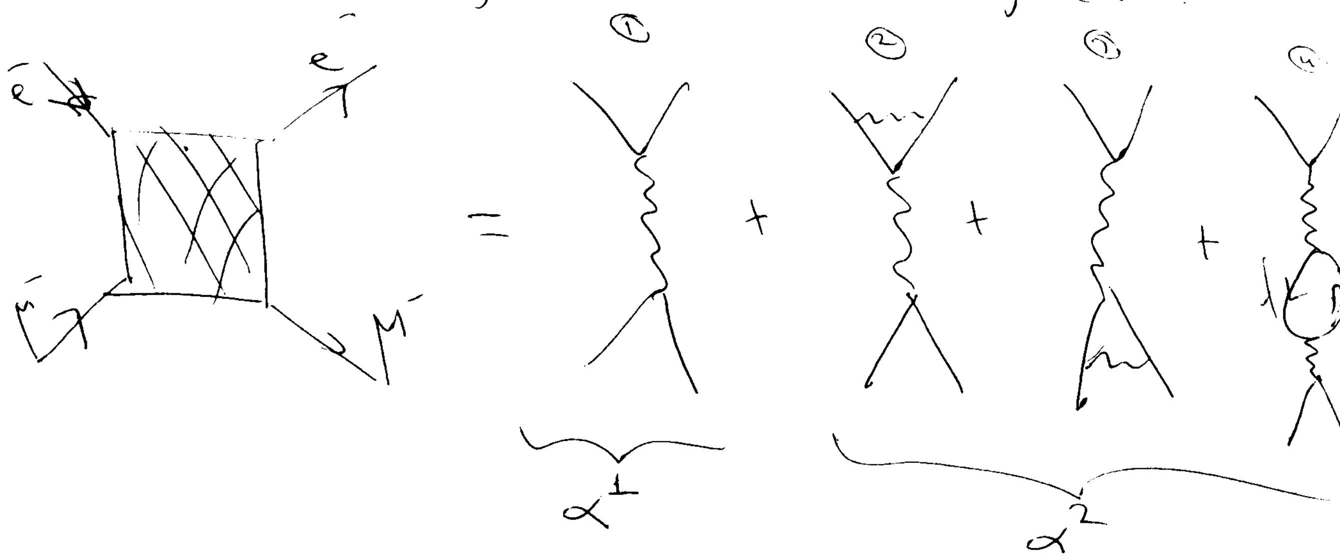
Ödev $\overline{|\mathcal{M}|^2}$'yi hesaplayın

Ödev $e^-e^- \to e^-e^-$ için $\overline{|\mathcal{M}|^2}$'yi hesaplayın
(yine 2 diagram olacak)

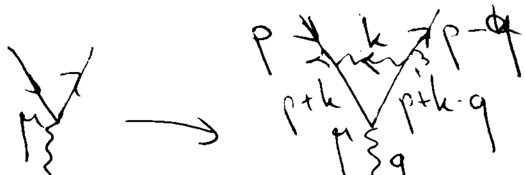
Yüksek mertebeden hesaplar

$e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ saçılması için  diyagramı

$e^2 \equiv 4\pi\alpha$ cinsinden en küçük mertebedeki diyagramdır. Bu diyagrama daha yüksek mertebeden diyagramlar eklenmesi gerekir.



2.(3). diagramın 1. diyagramdan tek farkı



yerleştirilmiş olmasıdır.

dolayısı ile

$$\bar{\ell}(p-q)(-ie\gamma_\mu)\ell(p) \to \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \bar{\ell}(p-q)(-ie\gamma_\beta)\, i\frac{\not p+\not k-\not q+m_\ell}{(p+k-q)^2-m_\ell^2}(-ie\gamma_\mu)$$

$$i\frac{\not p+\not k+m_\ell}{(p+k)^2-m_\ell^2}(-ie\gamma_\alpha)\ell(p)\left(\frac{-i}{k^2}\right)g^{\alpha\beta}$$

$$\equiv \bar{\ell}(p-q)\,\Delta\Gamma_\mu\, \ell(p)$$

~~yer~~

Bu integrali hesaplamak için

$$\frac{1}{A^n B^m} = \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)\Gamma(m)} \int_0^1 du \frac{u^{n-1} \bar{u}^{m-1}}{(Au+B\bar{u})^{n+m}}$$

$$\frac{1}{A^n B^m C^\ell} \frac{\Gamma(n+m+\ell)}{\Gamma(n)\Gamma(m)\Gamma(\ell)} \int_0^1 du\, u \int_0^1 dv \frac{(uv)^{n-1}(u\bar{v})^{m-1}\bar{u}^{\ell-1}}{(Auv+Bu\bar{v}+C\bar{u})^{n+m+\ell}}$$

parametrizasyonlarını kullanacağız

Daha sonradan işimizi kolaylaştırması için, integrali 4 değil d boyutta alıyor gibi yapıp, en sonunda d=4 yerleştireceğiz yani

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \longrightarrow \mu^{4-d} \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}$$

yazacağız,

$$\cancel{\Gamma(p-q)(-ie\gamma_\beta)\mu^{4-d}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^4}}$$

Integrale gelmeden önce, γ matrislerinin

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4$$

$$\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma^\mu = -2\gamma_\alpha$$

$$\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma^\mu = 4 g_{\alpha\beta}$$

$$\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\delta \gamma^\mu = -2\gamma_\delta \gamma_\beta \gamma_\alpha$$

Ödev:
- Bu eşitlikleri göster.
- d boyuta genelleştir.

özelliklerini kullanarak, paydayı sadeleştirelim

$$\gamma_\beta (\not p+\not k-\not q+m_\ell)\gamma_\mu(\not p+\not k+m_\ell)\gamma_\alpha g^{\alpha\beta}$$

$$=\gamma_\beta\left[(\not p+\not k-\not q)\gamma_\mu(\not p+\not k)+m_\ell(\not p+\not k-\not q)\gamma_\mu+m_\ell\gamma_\mu(\not p+\not k)+m_\ell^2\right.$$

$$=-2(\not p+\not k)\gamma_\mu(\not p+\not k-\not q)+4m_\ell(p+k-q)_\mu+4m_\ell(p+$$
$$-2m_\ell^2\gamma_\mu$$

Yine kolaylık olsun diye $m_\ell=0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

Ödev: $m_\ell\neq 0$ olduğu durumda diğer katkıları hesaplayın.

$$=-2(\not p+\not k)\gamma_\mu(\not p+\not k-\not q)$$

Dolayısıyla lepton-~~...~~foton köşesi

$$(-ie)^3\, i\bar{l}(p-q)\,\mu^{4-d}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{(\not p+\not k)\gamma_\mu(\not p+\not k-\not q)}{\underbrace{(p+k-q)^2}_{uv}\underbrace{(p+k)^2}_{u\bar v}\underbrace{k^2}_{\bar u}}(-2)\,l(p)$$

$$=4e^3\,\bar{l}(p-q)\,\mu^{4-d}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\int_0^1 du\,u\int_0^1 dv\,\frac{(\not p+\not k)\gamma_\mu(\not p+\not k-\not q)\,l(p)}{\left[(p+k-q)^2uv+(p+k)^2u\bar v+k^2\bar u\right.}$$

Paydayı k cinsinden bir tamkareye tamamla

$$(p+k-q)^2 uv + (p+k)^2 u\bar{v} + k^2 \bar{u}$$

$$= k^2 + 2k(p-q) uv + (p-q)^2 uv + 2pk u\bar{v} + p^2 u\bar{v}$$

$$= \left[k + (p-q)uv + pu\bar{v}\right]^2$$

$$- \left[(p-q)uv + pu\bar{v}\right]^2 + (p-q)^2 uv + p^2 u\bar{v}$$

$$= \left[k + pu - quv\right]^2 - u^2(p-qv)^2$$
$$+ (p-q)^2 uv + p^2 u\bar{v}$$

$$= \left[k + u(p-qv)\right]^2 + p^2\left[u\cancel{v} + \cancel{uv} - u^2\right]$$
$$+ q^2\left[uv - u^2v^2\right]$$
$$+ \left[(p-q)^2 - p^2 - q^2\right](uv - u^2 v)$$

$$= \left[k + u(p-qv)\right]^2 + p^2(u\bar{u} - u\bar{u}v) + q^2\left[\cancel{uv} - u^2v^2 - \cancel{uv} + u^2\right.$$
$$+ (p-q)^2 uv\bar{u}$$

$$= \left[k + u(p-qv)\right]^2 + p^2 u\bar{u}\bar{v} + q^2 u^2 v\bar{v} + (p-q)^2 u\bar{u}v$$

(32. sayfa)

Önceki hesabımıza dönersek

$$= -4e^3 \bar{\ell}(p-q)\, \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int du \int dv \frac{(\not p + \not k)\gamma_\mu(\not p + \not k - \not q)}{\left\{\left[k + u(p - qv)\right]^2 + \Delta^2\right\}^3}$$

$$\Delta^2 = p^2 u\bar{u}\bar{v} + q^2 u^2 v\bar{v} + (p-q)^2 u\bar{u}v$$

Değişken değiştirin

$k \to k - u(p - qv)$ yaparsak

$$= 4e^3 \bar{\ell}(p-q)\, \mu^{4-d} \int du\, dv \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{[\not p + \not k - u(\not p - \not q v)]\gamma_\mu[\not p + \not k - u(\not p - \not q v) - \not q]}{(k^2 + \Delta^2)^3}$$

$$= 4e^3 \bar{\ell}(p-q)\mu^{4-d} \int du\, dv \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\left[(\not p\bar{u} + \not q uv)\gamma_\mu(\not p\bar{u} + \not q(uv-1)) + \not k\gamma_\mu\not k\right]}{(k^2 + \Delta^2)^3}$$

$\not p\,\ell(p) = 0$ ve $\bar{\ell}(p-q)(\not p - \not q) = 0$ hareket denklemleri kullanırsak ($m_e = 0$ olduğu için hareket denklemleri bunlar)

$$= 4e^3 \bar{\ell}(p-q)\mu^{4-d} \int du\, dv \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\left[(\bar{u} + uv)(uv-1)\,\not q\gamma_\mu\not q + \not k\gamma_\mu\not k\right]}{(k^2 + \Delta^2)^3}$$

$$(1 - \bar{u} + uv)(uv - 1)$$

$$= uv - 1 - u^2v + u + u^2v^2 + uv$$

$$= -1 + u + 2uv - u^2 v\bar{v}$$

$$= -\bar{u} + uv(2 - u\bar{v})$$

$$\cancel{k_\alpha \gamma_\mu k^\alpha = -2 k_\mu \not k + 4 \gamma_\mu k^2}$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\alpha k_\beta}{(k^2+\Delta^2)^3} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\frac{g_{\alpha\beta}}{d} k^2}{(k^2+\Delta^2)^3}$$

ve

$\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma^\alpha = -2\gamma_\mu$ eşitliklerini kullanırsak

$$= 4e^3 \bar{\ell}(p-q)\, \mu^{4-d} \int du\, dv\, \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\left[+(\bar{u}-uv)(uv+1)\not q \gamma_\mu \not q + \frac{k^2}{2}\right]}{(k^2+\Delta^2)^3}$$

$$= +4e^3 \bar{\ell}(p-q)\, \mu^{4-d} \int du\, dv\, \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\left[(\bar{u}+uv)(uv+1)\not q \gamma_\mu \not q + \frac{k^2+\Delta^2-\Delta^2}{2}\right]}{(k^2+\Delta^2)^3}$$

kolaylık olması için

$$I_n(\Delta^2) = \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2+\Delta^2)^n}$$

olarak tanımlayalım. O zaman

$$\bar{\ell}(p-q)\, \Delta\Gamma_\mu\, \ell(p) = +4e^3 \bar{\ell}(p-q) \int du\, dv \Big[(\bar{u}+uv)(uv+1)\not q \gamma_\mu \not q\, I_3(\Delta^2)$$

$$- \frac{\Delta^2}{2} I_3(\Delta^2)\gamma_\mu + \frac{\gamma_\mu}{2} I_2(\Delta^2)\Big]$$

olur.

$I_n(\Delta^2)$'yi hesaplayalım.

$$I_n(\Delta^2) = \mu^{4-d}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{(k^2+\Delta^2)^n}$$

once Wick dönmesini yapalım.

$$k_0 \to i\tilde{k}_0 \qquad \vec{k}^2$$
$$p_0 \to i\tilde{p}_0 \qquad k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 = -\tilde{k}_0^2 - \vec{k}^2 \equiv -\tilde{k}^2$$
$$q_0 \to i\tilde{q}_0 \qquad \Delta^2 \to \tilde{\Delta}^2$$

$$I_n(\Delta^2) = i\mu^{4-d}(-1)^n\int\frac{d^d\tilde{k}}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{(\tilde{k}^2+\tilde{\Delta}^2)^n}$$

$$= i\mu^{4-d}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n)}\int\frac{d^d\tilde{k}}{(2\pi)^d}\int_0^\infty dt\, t^{n-1}\exp\{-t(\tilde{k}^2+\tilde{\Delta}^2)\}$$

$$= i\frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^d}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n)}\int_0^\infty dt\, t^{n-1}\left(\frac{\pi}{t}\right)^{d/2}\exp\{-t\tilde{\Delta}^2\}$$

$$= i\frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^d}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n)}\pi^{d/2}\int_0^\infty dt\, t^{n-\frac{d}{2}-1}\exp\{-t\tilde{\Delta}^2\}$$

$$= i\mu^{4-d}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n)}\pi^{d/2}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{(\tilde{\Delta}^2)^{n-\frac{d}{2}}}$$

$$I_n(\Delta^2) = i\frac{\mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}}\frac{(-1)^n\,\cancel{\pi^{d/2}}}{(-\Delta^2)^{n-\frac{d}{2}}}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}$$

Problem!! $I_n(\Delta^2) \xrightarrow{d=4} \Gamma(0) = \infty$!!!

Sonsuzluk problemine sonra döneceğiz.
Şimdilik d'yi d olarak bırakalım.

$$\bar{l}(p-q)\,\Delta\Gamma_\mu\, l(p) = +4e^3\,\bar{l}(p-q)\int du\,dv\,u$$

$$\left\{\left[(\bar{u}+uv)(uv-1)\,\not{q}\gamma_\mu\not{q} + \frac{\Delta^2}{2}\gamma_\mu\right]\frac{i\mu^{4-d}(-1)\,\pi^{d/2}}{(4\pi)^{d/2}(-\Delta^2)^{3-\frac{d}{2}}}\frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{\Gamma(3)}\right.$$

$$\left. + \frac{\gamma_\mu}{2}\frac{i\mu^{4-d}\,\pi^{d/2}}{(-\Delta^2)^{2-\frac{d}{2}}}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)}\right\}$$

reel bir foton köşesi olsun. $(q^2=0)$

$$\not{q}\gamma_\mu\not{q} = 2q_\mu\not{q} - \gamma_\mu\not{q}\not{q}$$

$$= 2q_\mu\left[\not{p}-(\not{p}-\not{q})\right] - \gamma_\mu q^2$$

$$\cancel{\bar{l}(p-q)\gamma_\mu l(p)} = 2q_\mu\left[\not{p}-(\not{p}-\not{q})\right]$$

$$\bar{l}(p-q)\,\not{q}\gamma_\mu\not{q}\, l(p) = 2q_\mu\,\bar{l}(p-q)\left[\not{p}-(\not{p}-\not{q})\right]l(p) = 0$$

$$\bar{l}(p-q)\,\Delta\Gamma_\mu\, l(p) = +4e^3\,\bar{l}(p-q)\int du\,dv\,u\left(\frac{i\mu^{4-d}\,\pi^{d/2}}{(4\pi)^{d/2}}\right)$$

$$\left\{-\frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{2\Gamma(3)}\frac{(-1)}{(-\Delta^2)^{2-\frac{d}{2}}} + \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{2(-\Delta^2)^{2-\frac{d}{2}}}\frac{1}{\Gamma(2)}\right\}l(p)$$

$$= -4e^3\,\bar{l}(p-q)\int\frac{du\,dv\,u}{(4\pi)^{d/2}}\frac{(i\mu^{4-d}\,\pi^{d/2})}{(-\Delta^2)^{2-\frac{d}{2}}}\,\Gamma(2-\tfrac{d}{2})\left\{\frac{-(2-\frac{d}{2})}{4} + \frac{1}{2}\right\}$$

$$= \cancel{4}e^3\,\bar{\ell}(p-q)\int du\,u\,dv\,\frac{i\mu^{4-d}\,\pi^{d/2}}{(-\Delta^2)^{2-\frac{d}{2}}}\,\frac{d}{\cancel{8}2}\,\Gamma\!\left(2-\frac{d}{2}\right)\gamma_\mu\,\ell(p)$$

$$= -\cancel{4}\frac{e^3}{2}\,\bar{\ell}(p-q)\gamma_\mu\ell(p)\left[\int_0^1 du\,u\int_0^1\frac{dv}{(4\pi)^{d/2}}\,\frac{i\mu^{4-d}\,\cancel{\pi^{d/2}}}{(-\Delta^2)^{2-\frac{d}{2}}}\,d\,\Gamma(2-\ldots\right.$$

$$\cancel{\bar{\ell}(p-q)(-ie\gamma_\mu)\ell(p)}$$

$$\bar{\ell}(p-q)(-ie\Gamma_\mu)\ell(p) = \bar{\ell}(p-q)(-ie\gamma_\mu + \Delta\Gamma_\mu)\ell(p)$$

$$= \bar{\ell}(p-q)(-ie\gamma_\mu)\left(1+\frac{e^2}{2(4\pi)^{d/2}}\int du\,u\int dv\,\frac{\mu^{4-d}\,\cancel{\pi}}{(-\Delta^2)^{2-\frac{d}{2}}}\,d\,\Gamma\ldots\right.$$

~~$m_\ell^2 = 0$ aldığım durumda ($p^2 = (p-q)^2 = 0$)~~

$$\cancel{\Delta = q^2u^2v(1}$$

~~$q^2 = 0$; $p^2 = (p-q)^2 = m_\ell^2$ için~~

$$\cancel{\Delta^2 = m_\ell^2\,u\,(\bar{u}\bar{v} + uv)}$$

$$\cancel{= m_\ell^2 u (1 - u - v + uv + v)}$$

$$\cancel{\Delta^2 = m_\ell^2\,u\,(\bar{u} + uv)}$$

$$\bar{\ell}(p-q)(-ie\Gamma_\mu)\ell(p) = \bar{\ell}(p-q)(-ie\gamma_\mu)\left(1+\frac{\alpha}{8\pi}\int du\,u\int dv\,\frac{\mu^2(4\pi)\ldots 2^{-\frac{d}{2}}}{(-\Delta^2)}\right)\ell(p)$$

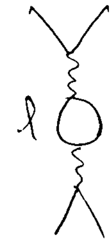
$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$$

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu \left[1 + \frac{\alpha}{8\pi}\int du \int dv \left(\frac{4\pi\mu^2}{-\Delta^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)\right]$$

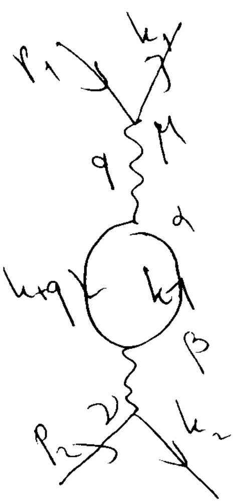
Ödev

$m_\ell \neq 0$, ve γ matris cebiri için de $d \neq 4$ için tekrar hesapla

Bu hesabı burada bırakıp



diyagramına dönelim.



Feynman kuralı: kapalı bir fermion çizgisi varsa, bir "−" ekle, ve izini hesapla

$$\bar{e}(k_1)(-ie\gamma_\mu)e(p_1)\ \bar{\mu}(k_2)(-ie\gamma_\nu)\mu(p_2)\ \frac{-i}{q^2}D^{\mu\nu}(q)$$

Ağaç diyagramında $D^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ idi, şimdi

$$\frac{-iD^{\mu\nu}}{q^2} = \frac{-i}{q^2} g^{\mu\alpha}(-1)\,\mathrm{Iz}\left[(-ie\gamma_\alpha)\frac{(\not{k}+m_\ell)}{k^2-m_\ell^2}(-ie\gamma_\beta)\frac{(\not{k}+\not{q}+m_\ell)}{(k+q)^2-m_\ell^2}\right]\frac{-ig^{\beta\nu}}{q^2}$$

$$\cancel{\frac{4ie^2}{q^2}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\int du\left[2k_\mu k_\nu\right]+2q^2}$$

$$\Rightarrow \Delta D^{\mu\nu} = +\frac{i}{q^2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{Tr}\,(-ie\gamma_\mu)(\not k+m_\ell)(-ie\gamma_\nu)(\not k+\not q+m_\ell)}{(k^2-m_\ell^2)((k+q)^2-m_\ell^2)}$$

$m_\ell=0$

$$=\frac{ie^2}{q^2}\mu^{4-d}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu(\not k+\cancel{m_\ell})\gamma_\nu(\not k+\not q)}{(k^2-\cancel{m_\ell^2})((k+q)^2-\cancel{m_\ell^2})}$$

$$=\frac{ie^2 4}{q^2}\mu^{4-d}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{k_\mu(k+q)_\nu-g_{\mu\nu}k(k+q)+(k+q)_\mu k_\nu}{k^2(k+q)^2}$$

$k_\mu(k+q)_\nu + (k+q)_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k(k+q)$

$\rightarrow (+k+q)_\mu(+k)_\nu + (+k)_\mu(+k+q)_\nu - g_{\mu\nu}(+k+q)(+k) \rightarrow$

$k^2 \quad (p+k-q)^2(p+k)^2k^2$

$k\to -k-p \quad (p-k-p-q)^2(p+k-p)^2(+k+p)^2$

$(q-k)^2 \quad k\to -\frac{q}{2}+k$

$k\to k-q$

$(k+q)^2k^2$

$\frac{q}{2}$

$\frac{q}{2}+\frac{q}{2}-k=q-k$

$k\to q-k$

$q+k\to q+q-k$

$(k+\frac{q}{2})+(k+\frac{q}{2})-k$

$$=\frac{4ie^2}{q^2}\mu^{4-d}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\int du\,\frac{k_\mu(k+q)_\nu+(k+q)_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k(k+q)}{\left[(k+q)^2u+k^2\bar u\right]^2}$$

$$=\frac{4ie^2}{q^2}\mu^{4-d}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\int du\,\frac{k_\mu(k+q)_\nu+(k+q)_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k(k+q)}{\left[(k+qu)^2+q^2u\bar u\right]^2}$$

$-q$

$$=\frac{4ie^2}{q^2}\mu^{4-d}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\int du\,\frac{(k-qu)_\mu(k+q\bar u)_\nu+(k+q\bar u)_\mu(k-qu)_\nu-g_{\mu\nu}(k+q\bar u)(k-qu)}{(k^2+\Delta^2)^2}$$

$-\frac{q}{2}+\;(k-\frac{q}{2})$

$$\Delta D_{\mu\nu} = \frac{4ie^2}{q^2}\mu^{4-d}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\int_0^1 du\,\frac{2k_\mu k_\nu - 2q_\mu q_\nu u\bar{u} - g_{\mu\nu}(}{(k^2+\Delta^2)^2}$$

$$= \frac{4ie^2}{q^2}\mu^{4-d}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\int_0^1 du\,\frac{\frac{2k^2 g_{\mu\nu}}{d} - 2q_\mu q_\nu u\bar{u} - g_{\mu\nu}(k^2-q^2}{(k^2+\Delta^2)^2}$$

$$= \frac{-2ie^2}{q^2}\mu^{4-d}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\int_0^1 du\,\frac{4q_\mu q_\nu u\bar{u} + g_{\mu\nu}(\overbrace{k^2}^{(2-\frac{4}{d})} - 2q^2u\bar{u})}{(k^2+\Delta^2)^2}$$

$$= \frac{-2ie^2}{q^2}\mu^{4-d}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\int du\left[\frac{4q_\mu q_\nu u\bar{u} + g_{\mu\nu}(\overbrace{-\Delta^2}^{(2-\frac{4}{d})} - 2q^2u\bar{u})}{(k^2+\Delta^2)^2} + \frac{(2-\frac{4}{d})g_{\mu\nu}}{k^2+\Delta^2}\right.$$

$\frac{d^dk}{(2\pi)^d}$ integrallerini daha önce hesaplamıştık

$$= \frac{-2ie^2}{q^2}\int du\,\frac{i\mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}}\left\{\frac{\left[4u\bar{u}q_\mu q_\nu + \overbrace{(\Delta^2+2q^2u\bar{u})}^{2-\frac{4}{d}}g_{\mu\nu}\right]\Gamma(2-}{(-\Delta^2)^{2-\frac{d}{2}}}\right.$$

$$\left. + \frac{g_{\mu\nu}\overbrace{}^{\frac{4}{d}(1-\frac{d}{2})}}{(-\Delta^2)^{1-\frac{d}{2}}}\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)\right\}$$

$2-\frac{4}{d} = \frac{2d-4}{d}$

$\frac{4}{d}(\frac{d}{2}$

$= \frac{4}{d}(1-$

$$\Delta D_{\mu\nu} = \frac{+2ie^2}{q^2}\int du\,\frac{i\mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}}\frac{g_{\mu\nu}}{(-\Delta^2)^{1-\frac{d}{2}}}\left[3\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)+\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)\right]$$

$$\Delta D_{\mu\nu} = \mp\frac{\alpha}{q^2 2\pi}g_{\mu\nu}\int du\left(\frac{\mu^2 4\pi}{-\Delta^2}\right)^{2-\frac{d}{2}}\Delta^2\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)\left[3+\frac{1}{1-\frac{d}{2}}\right]$$

$+ q_\mu q_\nu(\quad)$

$$\Delta D_{\mu\nu} = \frac{-2ie^2}{q^2}\int du\, \frac{i\mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} \left\{ \begin{pmatrix} 4u\bar{u}\, q_\mu q_\nu - \left(2-\frac{4}{d}\right)\Delta^2 \\ -2q^2 u\bar{u}\, g_{\mu\nu} \end{pmatrix} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(-\Delta^2)^{2-d/2}} - \frac{g_{\mu\nu}}{(-\Delta^2)^{1-\frac{d}{2}}}\frac{4}{d}\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)\right\}$$

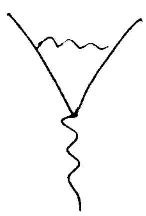
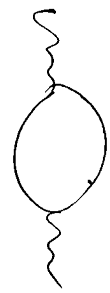
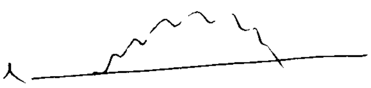
$$= \frac{-2ie^2}{q^2}\frac{i\mu^{4-d}\,\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}}\int \frac{du}{(-\Delta^2)^{2-\frac{d}{2}}}\left\{ \begin{matrix} 4u\bar{u}\, q_\mu q_\nu - \left(2-\cancel{\frac{4}{d}}\right)\Delta^2 g_\mu \\ -2q^2 u\bar{u}\, g_{\mu\nu} \\ \cancel{+\frac{4}{d} g_{\mu\nu}\Delta^2} \end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{-2ie^2}{q^2}\frac{i\mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}}\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)\int \frac{du}{(-\Delta^2)^{2-\frac{d}{2}}}\left\{ \begin{matrix} 4u\bar{u}\, q_\mu q_\nu \\ -4q^2 u\bar{u}\, g_\mu \end{matrix}\right.$$

$$= \frac{-8ie^2}{q^2}\frac{i\mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}}\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)\int \frac{du\, u\bar{u}}{(-\Delta^2)^{2-\frac{d}{2}}}\left\{ q_\mu q_\nu - q^2 g_\mu \right.$$

$$\cancel{\Lambda_{\mu 2} = \gamma_{\mu 2}\left\{1 + \frac{\alpha}{2\pi}\int du\, u\bar{u}\left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2}\right)^{2-\frac{d}{2}}\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)\left[3+\right.\right.}$$

Karşımıza yine sonsuzluklar geldi.

 ,  ve 

~~attı~~ diyagram parçalarını içeren bütün diyagramlar sonsuzluk içerir. Bunları içermeyen hiçbir diyagram sonsuzluk içermez.

3. diyagramın hesap yapmadan sonsuzluk içerdiğini görelim.

 $\sim \int d^4k \, \frac{\not{k}}{k^2}\,\frac{1}{k^2} \sim \int \frac{d^4k\, \not{k}}{k^4} \sim \int \frac{k^3\, dk}{k^3}$

lineer olarak sonsuza gider.

Renormalizasyon (sonsuzlardan kurtulma)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^0 (i\cancel{\partial} - m^0)\psi^0 - e^0 \bar{\psi}^0 \gamma_\mu \psi^0 A^{\mu 0} - \frac{1}{4} F^0_{\mu\nu} F^{\mu\nu 0}$$

$$F^0_{\mu\nu} = \partial_\mu A^0_\nu - \partial_\nu A^0_\mu$$

(Sıfırları şimdiden ekledik)

" $\bar{\psi}^0 \gamma_\mu \psi^0 A^{\mu 0}$: etkileşme terimi

diğerleri etkileşme terimi değil, etkileşme terimi üzerinden tedirgeme yap"

~~etkileşme terim~~

tedirgeme yapılacak terimi bu şekilde seçmek tamamen keyfi. Diğer terimlerin de bir kısmıyla tedirgeme yapılabilinir.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^0 (i\cancel{\partial})\psi^0 - m^0 \bar{\psi}^0 \psi^0 - e^0 \bar{\psi}^0 \gamma_\mu \psi^0 A^{\mu 0} - \frac{1}{4} F^0_{\mu\nu} F^{0\mu\nu}$$

$$= (1-\delta_\psi)\bar{\psi}^0 (i\cancel{\partial})\psi^0 - (m^0 - \delta m^0)\bar{\psi}^0\psi^0 - (e^0 - \delta e^0)\bar{\psi}^0\gamma_\mu \psi^0 A^{0\mu} - \frac{1}{4}(1-\delta_A) F^0_{\mu\nu} F^{0\mu\nu}$$

$$+ \delta_\psi \bar{\psi}^0 (i\cancel{\partial})\psi^0 - \delta m^0 \bar{\psi}^0 \psi^0 - \delta e^0 \bar{\psi}^0 \gamma_\mu \psi^0 A^{0\mu} - \frac{1}{4}\delta_A F^0_{\mu\nu} F^{0\mu\nu}$$

Yeni alanlar tanımlayalım.

$$\psi = \sqrt{1-\delta_\psi}\,\psi^0 \Rightarrow \psi^0 = \frac{\psi}{\sqrt{1-\delta_\psi}}$$

$$A_\mu = \sqrt{1-\delta_A}\,A^0_\mu \Rightarrow A^0_\mu = \frac{A_\mu}{\sqrt{1-\delta_A}}$$

Yeni alanlar cinsinden

$$\mathcal{L} = \bar\psi i\partial\!\!\!/ \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{m^0-\delta m_0}{(1-\delta_\psi)}\bar\psi\psi$$

$$-\frac{e^0(1-\delta e^0)}{(1-\delta_\psi)(1-\delta_A)^{1/2}}\bar\psi\gamma_\mu\psi A^\mu$$

$$+\frac{\delta_\psi}{1-\delta_\psi}\bar\psi(i\partial\!\!\!/)\psi - \frac{\delta m^0}{1-\delta_\psi}\bar\psi\psi - \frac{e^0\delta e^0}{(1-\delta_\psi)(1-\delta_A)^{1/2}}\bar\psi\gamma_\mu\psi A^\mu$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\delta_A}{1-\delta_A}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Yeni tanımlar

$$\delta_3 = \frac{\delta_A}{1-\delta_A} \qquad \delta_2 = \frac{\delta_\psi}{1-\delta_\psi} \qquad \delta_m = \frac{\delta m^0}{1-\delta_\psi}$$

$$e = \frac{e^0(1-\delta e^0)}{(1-\delta_\psi)(1-\delta_A)^{1/2}}, \quad e\delta_1 = \frac{e^0\delta e^0}{(1-\delta_\psi)(1-\delta_A)^{1/2}} \quad m = \frac{m^0-\delta m^0}{1-\delta_\psi}$$

~~⇒ Ayar simetrisi ⇒~~ $\delta_1 = \delta_2$ $\quad \delta_1 = \frac{\delta e^0}{1-\delta e^0}$

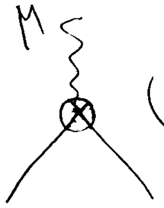
$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar\psi i\partial\!\!\!/ \psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - m\bar\psi\psi - e\bar\psi\gamma_\mu\psi A^\mu \\ &+ \bar\psi(i\delta_2\partial\!\!\!/ - \delta_m)\psi - e\delta_1\bar\psi\gamma_\mu\psi A^\mu - \frac{1}{4}\delta_3 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\end{aligned}}$$

Ayar simetrisi ⇒ $\delta_2 = \delta_1$

Yeni Feynman kuralları:

$-i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\delta_3$

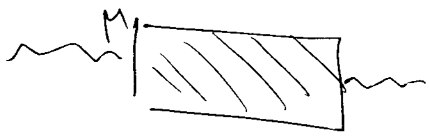
$i(p\!\!\!/\delta_2 - \delta_m)$

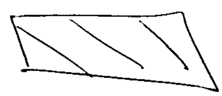


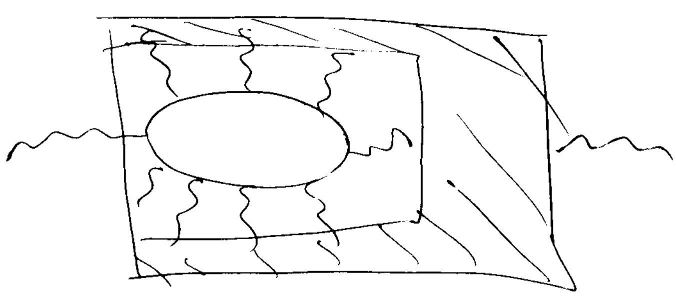
$(-ie\gamma^\mu)\delta$

$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_m$ bütün hesaplar sonlu olacak şekilde seçilmelidir.

<u>Uygulama</u>: Foton öz enerjisi



Foton  içindeki bir fermion çizgisine bağlanacak. Fermion çizgisi kapalı bir halka olacak çünkü dışarıya sadece bir foton çıkıyor.



Ödev:

$\not p(\not p + m_q) = (p^2 - m_q^2) + m_q(\not p + m_q)$

$\int \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4}$ and ~~$\not k_i$~~

$$D_{\mu\nu}(-1)\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \mathring{I}_z \left[\frac{\not p + \not q + m_q}{(p+q)^2 - m_q^2}(-ie\gamma_\mu)\frac{\not p + m_q}{p^2 - m_q^2}\cdots \cancel{(-ie\gamma)}\right]$$

$$q^\mu D_{\mu\nu}(-1)\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(-ie)\,\mathring{I}_z\left[\frac{(\not p+\not q)+m_q}{(p+q)^2-m_q^2}[\not p+\not q-\not p]\frac{\not p+m_q}{p^2-m_q^2}\cdots\cancel{(-ie\gamma_z)}\cdots\right]$$

$$=(-1)(-ie)m_q\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\mathring{I}_z\left[\frac{\not p+m_q}{p^2-m_q^2}\cdots\cancel{(-ie\gamma_z)}\cdots\right]$$

$$-(-1)(-ie)m_q\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\mathring{I}_z\left[\frac{\not p+\not q+m_q}{(p+q)^2-m_q^2}\cdots\cancel{(-ie\gamma_z)}\cdots\right]$$

$$\cancel{+(-1)(-ie)\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left[\frac{\not p+\not q+m_q}{(p+q)^2-m_q^2}\right.}\frac{\not p+m_q}{p^2-m_q^2}\cdots\cancel{(-ie\gamma_z)}\Big]$$

$$\cancel{-(-1)(-ie)\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left[\frac{\not p+\not q+m_q}{(p+q)^2-m_q^2}\right.}\frac{\not p+m_q}{p^2-m_q^2}\cdots\cancel{(-ie\gamma_z)}\cdots\Big]$$

$=$

$= 0$

Sonuç olarak

$q^\mu D_{\mu\nu} = q^\nu D_{\mu\nu} = 0$ olması gerekir.

$D_{\mu\nu}$ sadece q'ya bağlı olabilir. dolayısı

$D_{\mu\nu} = A\, q_\mu q_\nu + B\, g^{\mu\nu}$ şeklinde olmak zorundadır.

$$q^\mu D_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow A q^2 q_\nu + B q_\nu = 0$$

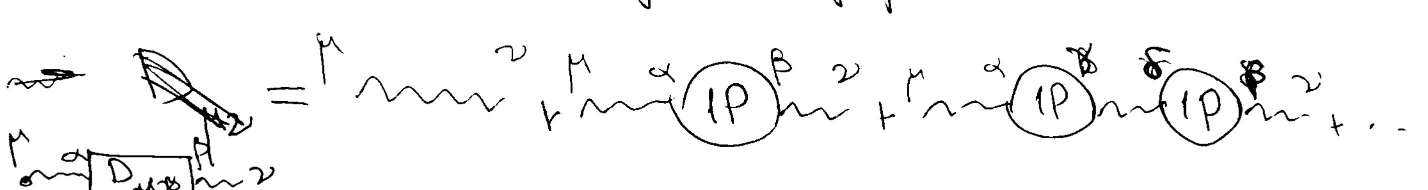
$$\Rightarrow B = -A q^2 \equiv -D(q^2)\, q^2$$

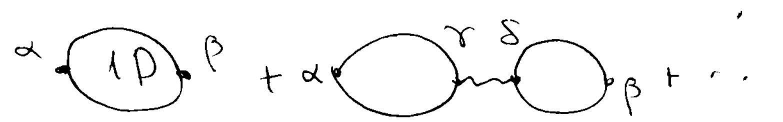
$D_{\mu\nu}(q)$'nun ifadesi

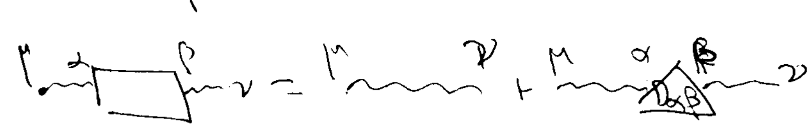
$D_{\mu\nu} = \left[q_\mu q_\nu - q^2 g^{\mu\nu} \right] D(q^2)$ olması lazım.

Tek parçacık indirgenemez diagramları göz önüne alalım.

Tek parçacık indirgenemez: tek bir çizgi kesilerek ikiye ayrılamayan diyagram.



$D_{\alpha\beta} =$ 



$$D_{\alpha\beta} = (q_\alpha q_\beta - q^2 g^{\alpha\beta}) D^{1P}(q^2) [D^{1P}(q^2)]^2 (q_\alpha q_\gamma - g_{\alpha\gamma} q^2)\left(\frac{-i g^{\gamma\delta}}{q^2}\right)(q_\delta q \dots$$

$$= (q_\alpha q_\beta - q^2 g^{\alpha\beta}) D^{1P}(q^2) + \frac{1}{q^2}(-i)(q_\alpha q^\delta - \delta_\alpha^\delta q^2)(q_\delta q_\beta - g_{\delta\beta} q^2) D^{(1P)}(q \dots$$

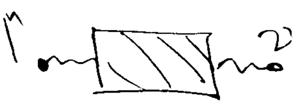
$$= (q_\alpha q_\beta - q^2 g^{\alpha\beta}) D^{1P}(q^2) + \frac{(-i)}{q^2}\left(\cancel{q_\alpha q_\beta q^2} - \cancel{q_\alpha q_\beta q^2} - q_\alpha q_\beta q^2 + g_{\alpha\beta} q^4\right) \dots$$

$$= (q_\alpha q_\beta - q^2 g^{\alpha\beta}) D^{1P}(q^2) + \frac{i}{\cancel{q^2}} \cancel{q^2} (q_\alpha q_\beta - g_{\alpha\beta} q^2)[D^{1P}(q^2)]^2 + \dots$$

$$= -i\left[(q_\alpha q_\beta - q^2 g^{\alpha\beta})\right]\left[(iD^{1P}(q^2)) + (iD^{1P}(q^2))^2 + (iD^{1P}(q^2))^3 + \dots\right]$$

$$= -i (q_\alpha q_\beta - q^2 g^{\alpha\beta}) \frac{iD^{1P}(q^2)}{1 - iD^{1P}(q^2)}$$

Dolayısıyla



$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} + \left(\frac{+i g_{\mu\alpha}}{q^2}\right)(-i)(q_\alpha q_\beta - q^2 g^{\alpha\beta}) \frac{iD^{1P}(q^2)}{1-iD^{1P}(q^2)}\left(\frac{-i g_{\beta\nu}}{q^2}\right)$$

$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{i}{q^4}(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \frac{iD^{1P}(q^2)}{1-iD^{1P}(q^2)}$$

$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2}\left[1 + \frac{iD^{1P}(q^2)}{1-iD^{1P}(q^2)}\right] + \frac{i q_\mu q_\nu}{q^4} \frac{iD^{1P}(q^2)}{1-iD^{1P}(q^2)}$$

$$= \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2[1-iD^{1P}(q^2)]}$$

Sayfa (41.5) de $\Delta D_{\mu\nu}$'yi ~~hesaplamış~~tık
~~Bu hesaptan~~ tek halka mertebesinde hesaplam

Buradan $D^{1P}(q^2)$ için

$$iD^{1P}(q^2) = -\frac{8\mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}}\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)\int \frac{du\, u\bar{u}}{(-\Delta^2)^{2-\frac{d}{2}}}$$

~~olarak~~ olduğu gösterilir.

Burada $\Delta^2 = q^2 u\bar{u}$ olmak üzere.

Ancak renormalize teoride yeni katkılar da vardır.

~~$D^{1P}(q)$~~

$$D^{1P}_{\alpha\beta}(q^2) = -i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\delta_3 = [q_\mu q_\nu - q^2 g^{\mu\nu}]\, D^{1P}(q^2)$$

$$D^{1P}(q^2) = i\delta_3$$

dolayısı ile toplam

$$iD^{1P}(q^2) = \frac{-8\mu^{4-d}e^2}{(4\pi)^{d/2}}\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)\int du\, \frac{u\bar{u}}{(-\Delta^2)^{2-\frac{d}{2}}} - \delta_3$$

olarak bulunur.

δ_3'ün açık ifadesini bulmak için integrali hesaplamamız lazım. $d=4$'de birinci terim sonsuzdur. bu sebeple $d=4-2\varepsilon$ yazalım bu durumda

$$iD^{1P}(q^2) = \frac{-8e^2\mu^{2\varepsilon}(4\pi)^{\varepsilon}}{(4\pi)^2 \cancel{(4\pi)^{\varepsilon}}}\Gamma(\varepsilon)\int \frac{du\, u\bar{u}}{(-\Delta^2)^{\varepsilon}} - \delta_3$$

$$= \frac{-2\alpha}{\pi}\int du\, u\bar{u}\left(\frac{4\pi\mu^2}{-\Delta^2}\right)^{\varepsilon}\Gamma(\varepsilon) - \delta_3$$

$\varepsilon \to 0$'a giderken, $x^{\varepsilon} \simeq e^{\varepsilon \ln x} \simeq 1 + \varepsilon \ln x + O(\varepsilon^2)$

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + O(\varepsilon)$$

$$= -\frac{2\alpha}{\pi}\int du\, u\bar{u}\left[1 + \varepsilon\ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{-\Delta^2}\right) + O(\varepsilon^2)\right]\left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + O(\varepsilon)\right] - \delta_3$$

$$= -\frac{2\alpha}{\pi}\int du\, u\bar{u}\left[\frac{1}{\varepsilon} + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{-\Delta^2}\right) - \gamma_E + O(\varepsilon)\right] - \delta_3$$

$$\xrightarrow{\varepsilon\to 0} -\frac{2\alpha}{\pi}\int du\, u\bar{u}\left[\frac{1}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma_E\right] - \delta_3 + \frac{2\alpha}{\pi^2}\int du\, u\bar{u}\ln\left(\frac{-q^2 u\bar{u}}{\Lambda^2}\right)$$

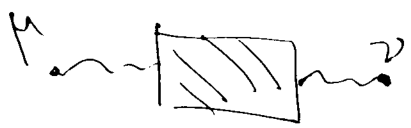
$$\delta_3 = \frac{-2\alpha}{\varepsilon\pi}\int_0^1 du\, u\bar{u} = \frac{-2\alpha}{\varepsilon\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{\alpha}{3\pi\varepsilon} \quad : MS$$

$$\delta_3 = \frac{-2\alpha}{\pi}\int du\, u\bar{u}\left[\frac{1}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma_E\right] = -\frac{\alpha}{3\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma_E\right) : \overline{MS}$$

$\overline{MS}$'ı kullanırsak

$$i\Pi'^{P}(q^2) = -\frac{\alpha}{3\pi^2}\ln\left(\frac{-q^2}{\Lambda^2}\right) \dots$$

Ve sonuç olarak



$$= -\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2}\,\frac{\alpha}{1-\frac{\alpha}{3\pi^2}\ln\left(\frac{-q^2}{\Lambda^2}\right)}$$

$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$'nin değeri nasıl ölçülür?
2 elektron saçılması ölçülebilir ama bu durumda asıl ölçülen

olacaktır. Belli bir $q^2 = -\mu_R^2$'deki değeri

$$\underline{\underline{q^2=-\mu_R^2}}\ \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\right)\alpha_s(\mu_R^2)$$ olsun.

μ_R^2'yi keyfi belirleyebiliriz. Başka bir μ_R' ~~seçti~~ seçebiliriz. Ancak deneysel ölçümlerin tutarlı olması için,

$\alpha_s(\mu_R'^2)$ ile $\alpha_s(\mu_R^2)$ arasında belirli bir ilişki olması lazım.

$$\alpha_s(\mu_R^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi}\ln\left(\frac{\mu_R^2}{\Lambda^2}\right)} + \cancel{O(\alpha)}$$

$$\alpha_s(\mu_R'^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi}\ln\left(\frac{\mu_R'^2}{\Lambda^2}\right)}$$

$$\frac{d}{d\mu_R^2}\alpha_s(\mu_R^2) = \frac{\alpha^2}{3\pi}\frac{1}{\mu_R^2}\frac{1}{\left[1 - \frac{\alpha}{3\pi}\ln\left(\frac{\mu_R^2}{\Lambda^2}\right)\right]^2}$$

$$\mu_R^2 \frac{d}{d\mu_R^2}\alpha(\mu_R^2) = \frac{1}{3\pi}\alpha(\mu_R^2)^2$$

$$= \frac{\left[\alpha(\mu_R^2)\right]^2}{3\pi} + \cdots$$

$$\frac{\mu_R^2}{\cancel{\mu_R}}\frac{d\alpha(\mu_R^2)}{d\mu_R^2} = \frac{\alpha(\mu_R^2)^2}{3\pi}$$