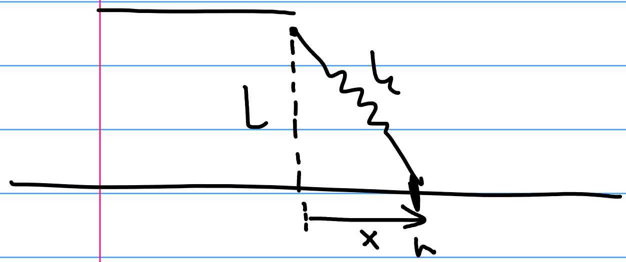
Örnek



m kütleli nesne bir doğru boyunca serbest bir şekilde hareket edebiliyor olsun. Şekilde gösterildiği gibi, yay sabiti k olan bir yaya bağlanmış ise, küçük salınımlar için için, Lagranj fonksiyonunu yazınız ve salınım frekansını bulun.

Çözüm

Genelleştirilmiş koordinatı x olarak şekilde gösterildiği şekilde seçersek, cismin kinetik enerjisi

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

olarak yazılır

Yayın serbest uzunluğu ihmal edilebilecek kadar küçük ise, Yayın potansiyel enerjisi

$$U = \frac{1}{2} k (L^2 + x^2) = \frac{1}{2} k x^2 + \dots$$

(sabit terim yazılmamıştır) olarak elde edilir.

Buradan Lagranj fonksiyonu

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \quad ; \quad w^2 = \frac{k}{m}$$

olarak bulunur. Yayın serbest uzunluğu d ise Yaydaki uzama miktarı

$$\Delta L = \sqrt{L^2 + x^2} - d$$

ve yayda depolanan potansiyel enerji

$$U = \frac{1}{2} k (\Delta L)^2 = \frac{1}{2} k \left(d^2 + L^2 + x^2 - 2d \sqrt{L^2 + x^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} k \left(d^2 + L^2 + x^2 - 2dL - \frac{d x^2}{L} \right) + O\left(\left(\frac{x}{L}\right)^4 \right)$$

$$= \frac{1}{2} k \left(1 - \frac{d}{L} \right) x^2 + \dots$$

olacaktır. Bu durumda Lagranj fonksiyonu

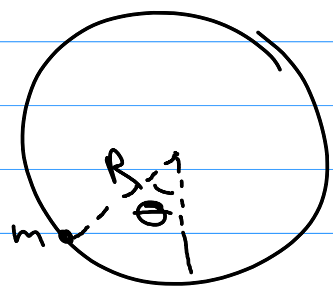
$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k\left(1-\frac{d}{L}\right)x^2$$

ve salınım frekansı

$$\omega^2 = \frac{k}{m}\left(1-\frac{d}{L}\right)$$

olarak bulunur. Eğer $d = L$ ise bu sıfırdır. Bunun anlamı $d = L$ durumunda, sistemin denge durumu etrafındaki hareketinin basit salınıcı hareketi olmadığıdır.

<u>Örnek</u>



m kütlesi bir çember üzerinde serbestçe hareket edebiliyor olsun. Yapacağı küçük salınımların frekansı nedir

<u>Çözüm</u> Sistemin Lagranj fonksiyonu

$$L = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - (-mgR\cos\theta)$$

olarak yazılabilir. Denge konumu $\theta = 0$ etrafında potansiyeli açacak olursak

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \dots$$

olacaktır. Buradan küçük salınımlar için Lagranj fonksiyonunu

$$L = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgR\theta^2$$

olarak yazabiliriz (sabit terim ihmal edildi).
Salınımların frekansı

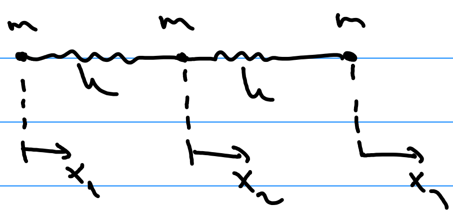
$$\omega^2 = \frac{mgR}{mR^2} = \frac{g}{R}$$

olarak bulunur.

Birden fazla serbestlik derecesi içeren sistemlerde
<u>küçük salınımlar</u>

Bu konuyu genelleştirmeden önce, basit bir örnekle başlayalım:

<u>Örnek</u>



üç özdeş kütle şekildeki gibi iki özdeş yayla bağlı olsun. x_i, $i=1,2,3$ cisimlerin ilk konumlarından sapmaları olsun.

$x_i = 0$ durumunda yaylar sıkışmamış olsun
Bu durumda sistemin Lagrange fonksiyonu

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right) - \frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(x_2 - x_3\right)^2$$

olarak yazılabilir. Hareket denklemlerini elde edersek

$$m\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0$$
$$m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_3) = 0$$
$$m\ddot{x}_3 + k(x_3 - x_2) = 0$$

olarak yazabiliriz. $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ olarak, ve X sütun matrisini de

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ olarak tanımlarsak, yukarıdaki denkleri

$$\ddot{X} + W^2 X = 0$$

olarak yazabiliriz. Buradaki W^2 matrisi

$$W^2 = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanmıştır. Tek serbestlik dereceli sistemlerde yaptığımız gibi

$$X = X_0 e^{i\alpha t}$$

şeklinde bir çözüm arayalım.
Bu durumda

$$(-\alpha^2 + W^2) X_0 = 0$$

elde ederiz. Bu ise W^2 matrisi için öz değer tanımından başka birşey değildir. $X_0 = 0$ yukarıdaki denkler için bir çözümdür ancak ilgilendiğimiz bir çözüm değildir. Sistemin hareket etmediği durumdur. Başka çözümlerin var olabilmesi için

$$\det(W^2 - \alpha^2) = 0$$

olmalıdır. Ya da $\alpha^2 = \omega_0^2 \lambda$ olarak tanımlarsak

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

olmalıdır. Yukarıdaki determinant

$$
\begin{aligned}
0 &= (1-\lambda)^2(2-\lambda) - 2(1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda) - 2\right] \\
&= (1-\lambda)(-3\lambda+\lambda^2) \\
&= (1-\lambda)\,\lambda\,(\lambda-3)
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanabilir. Olası üç çözüm

$\lambda = 0 \quad \lambda = 1$ ve $\lambda = 3$

çözümleridir.

Şimdi bu değerlere karşılık gelen özvektörleri bulalım. Bu öz vektörleri

$$X_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$ olarak gösterirsek

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 \\ -a_1 + a_2 - a_3 \\ -a_2 + a_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

denklemlerini sağlarlar.

<u>$\lambda = 0$'ın özvektörü</u>

$$\left.\begin{aligned} a_1 - a_2 &= 0 \\ -a_2 + a_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad a_1 = a_2 = a_3$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$'in öz vektörü

$$a_1 - a_2 = a_1 \Rightarrow a_2 = 0$$
$$-a_1 + 2a_2 - a_3 = a_2 \Rightarrow a_1 = -a_3$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 3$'ün öz vektörü

$$a_1 - a_2 = 3a_1 \Rightarrow a_2 = -2a_1$$
$$-a_2 + a_3 = 3a_3 \Rightarrow a_2 = -2a_3$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Yukarıdaki öz vektörlerin başlarındaki katsayılar

$$\Delta_i^T \Delta_j = \delta_{ij}$$

olacak şekilde seçilmiştir.

$\lambda_1 = 0$ olduğundan, Bu öz duruma karşılık gelen $X(t)$ çözümü

$\ddot{X} = 0$ denklemini sağlayacağından, çözüm

$$X(t) = (c_1 + c_2 t) X_1$$

olacaktır.

Diğer özdurumlarla beraber en genel çözüm

$$X(t) = (c_1 + c_2 t) X_1 + c_3 e^{i\omega_0 t} X_2 + c_4 e^{i\sqrt{3}\omega_0 t} X_3$$

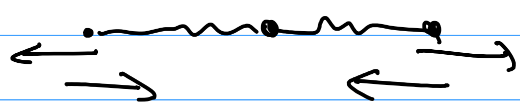
olarak yazılabilir. Buradaki c_i'ler başlangıç koşulları tarafından belirlenecek olan katsayılardır. (Yukarıdaki çözümün reel kısmının alınması gerektiği unutulmamalıdır).

X_1, X_2, X_3 öz vektörlerine sistemin normal kipleri denir.

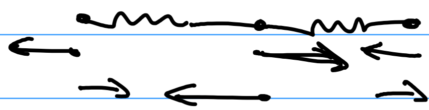
Birinci normal kipte $X_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ olduğundan. Bu kipta bütün kütleler aynı yönde aynı miktarda hareket ederler, bir başka deyişle sistem öteleme yapar, salınım yapmaz. $(\alpha = 0)$

İkinci kipte $X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

olduğundan ikinci kütle yerinde dururken, uçlardaki birinci ve üçüncü kütle zıt yönlerde eşit miktarlarda hareket ederek salınırlar $(\alpha = \omega_0)$



Üçüncü kipte, $X_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ olduğundan, uçtaki kütleler aynı yönde hareket ederken, ortadaki ikinci kütle zıt yönde iki katı hareket ederek salınır. ($\alpha = \sqrt{3}\,\omega_0$)



Bu örneği bitirmeden, son olarak, normal kipleri kullanarak yeni genelleştirilmiş koordinatlar tanımlayalım:

$$\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix} = \frac{Q_1}{\sqrt{m}}X_1 + \frac{Q_2}{\sqrt{m}}X_2 + \frac{Q_3}{\sqrt{m}}X_3$$

olsun. Bunu Lagrange fonksiyonumuza yerleştirelim.

$$L = \sum \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2\left[(x_2-x_1)^2 + (x_3-x_1)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}m\begin{pmatrix}\dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{q}_1\\\dot{q}_2\\\dot{q}_3\end{pmatrix} + \frac{\omega_0^2}{2}m\begin{pmatrix}q_1 & q_2 & q_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\-1 & 2 & -1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}m\begin{pmatrix}\dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{q}_1\\\dot{q}_2\\\dot{q}_3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}m\begin{pmatrix}q_1 & q_2 & q_3\end{pmatrix} W^2 \begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{Q}_1 & \dot{Q}_2 & \dot{Q}_3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}Q_1 & Q_2 & Q_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1^2 & & 0\\ & \omega_2^2 & \\ 0 & & \omega_3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\end{pmatrix}$$

$$= \sum_i \left(\frac{1}{2} \dot{Q}_i^2 + \frac{1}{2} w_i^2 Q_i^2 \right)$$

halini alır. Yukarıda $w_1^2 = 0$, $w_2^2 = w_0^2$ ve $w_3^2 = 2w_0^2$ olarak tanımladık.

Yukarıdaki örnekte elde ettiğimiz sonucu genelleştirebiliriz. s serbestlik derecemiz olsun. Küçük salınımlar için Lagranj fonksiyonumuzu

$$L = \sum \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \sum \frac{1}{2} k_{ij} q_i q_j$$

olarak yazabiliriz. Yukarıdaki a_{ij} ve k_{ij} matrisleri indeksleri cinsinden simetriktir:

$$a_{ij} = a_{ji} \quad ; \quad k_{ij} = k_{ji}$$

a_{ij} matrisinin simetrisini görelim:
toplama işaretindeki sembollerin isimlerini istediğimiz gibi değiştirebiliriz

$$\sum_{ij} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \overset{\substack{i \to k \\ j \to l}}{=\!=} \sum_{kl} a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l \overset{\substack{k \to j \\ l \to i}}{=\!=} \sum_{ji} a_{ji} \dot{q}_j \dot{q}_i$$

Dolayısıyla

$$\sum_{ij} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ji} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} (a_{ij} + a_{ji}) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

Bu sonucun bize söylediği, kinetik enerji teriminde

a_{ij} yerine $\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji})$ kullanabileceğimizdir. $\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji})$ ise indekslerinin yer değiştirmesine göre simetriktir. Bu sebeple en baştan, a_{ij}'yi simetrik olarak seçebiliriz. Aynı argümanları k_{ij} için de yapabiliriz. k_{ij}'yi de en baştan simetrik seçebiliriz.

Hareket denklemlerini elde edelim:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} L = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (\dot{q}_i \dot{q}_j)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij} (\delta_{ik} \dot{q}_j + \delta_{kj} \dot{q}_i)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_j a_{kj} \dot{q}_j + \sum_i a_{ik} \dot{q}_i \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_j a_{kj} \dot{q}_j + \sum_j a_{jk} \dot{q}_j \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_j (a_{kj} + a_{jk}) q_j$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} L = \sum_j a_{kj} \dot{q}_j$$

Benzer şekilde

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = -\sum_j k_{kj} \dot{q}_j$$

elde ederiz. Buradan da hareket denklemleri

$$\sum a_{kj}\ddot{q}_j + \sum k_{kj} q_j = 0$$

olarak elde edilir. Önceki örnekte yaptığımız gibi

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_s \end{pmatrix}$$

sütun matrisini ve

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{ss} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{ss} \end{pmatrix}$$

kare matrislerini tanımlarsak, hareket denklemlerini

$$A\ddot{Q} + KQ = 0$$

olarak elde ederiz.

$$Q = \begin{pmatrix} q_{10} \\ \vdots \\ q_{s0} \end{pmatrix} e^{i\alpha t} \equiv Q_0 e^{i\alpha t}$$

şeklinde bir çözüm arayalım. Hareket denklemlerine yerleştirdiğimizde

$$(-\alpha^2 A + K) Q_0 e^{i\alpha t} = 0 \Rightarrow (-\alpha^2 A + K) Q_0 = 0$$

elde ederiz. Bu denklemin $Q_0 = 0$ dışında çözümleri olabilmesi için $\det(-\alpha^2 A + K) = 0$ olması lazım.

$\det(-\alpha^2 A + K) = 0$ denkleminin çözümlerini
$\alpha^2 = w_i^2$, $i = 1, 2, \ldots, s$, olarak gösterelim. Her w_i^2 çözümüne karşılık gelen Q_0 öz durumunu da Δ_i ile gösterelim:

$$(-w_i^2 A + K)\Delta_i = 0$$

olacaktır. Önceki örnekte olduğu gibi Δ_i'leri

$$\Delta_i^T A \Delta_j = \delta_{ij}$$

olacak şekilde seçebiliriz. w_i^2'lerin hepsi birbirinden farklı olmayabilir. Farzedelim ki $w_{i_0}^2 = w_{i_1}^2$. $(i_0 \neq i_1)$
Bu durumda her c_{i_0} ve c_{i_1} için

$$(-w_{i_0}^2 A + K)(c_{i_0}\Delta_{i_0} + c_{i_1}\Delta_{i_1}) = 0$$

olacaktır. Δ_{i_0} ve Δ_{i_1} birbirlerine dik olmak zorunda da değildir. Bu durumda yeni $\tilde{\Delta}_{i_0}$ ve $\tilde{\Delta}_{i_1}$ öz vektörleri

$$\tilde{\Delta}_{i_0} = \Delta_{i_0}$$
$$\tilde{\Delta}_{i_1} = \left[\Delta_{i_1} - (\Delta_{i_0}^T A \Delta_{i_1})\,\Delta_{i_0}\right]\frac{1}{N}$$

olarak seçilebilir. Buradaki N, $\tilde{\Delta}_{i_1}^T A \Delta_{i_1} = 1$ olmasını sağlayacak şekilde seçilmiş bir boylamlandırma sabitidir.

Özetle w_i^2'ler birbirlerine eşit olsa da her zaman için

$$\Delta_i^T A \Delta_j = \delta_{ij}$$

olacak şekilde öz vektörler bulunabilir.

Normal kiplerimizi

$$q(t) = \sum_i Q_i(t)\Delta_i$$

olacak şekilde tanımlayalım.
Lagranj fonksiyonumuza dönecek olursak.

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^T A \dot{q} - \frac{1}{2} q^T K q$$

$$= \sum_{ij} \frac{1}{2}\dot{Q}_i \dot{Q}_j \Delta_i^T A \Delta_j - \frac{1}{2}\sum_{ij} Q_i Q_j \Delta_i^T K \Delta_j$$

$$= \sum_{ij} \frac{1}{2}\dot{Q}_i \dot{Q}_j \delta_{ij} - \frac{1}{2}\sum_{ij} Q_i Q_j \Delta_i^T (+\omega_j^2 A)\Delta_j$$

$$= \sum_i \frac{1}{2}\dot{Q}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{ij} Q_i Q_j \omega_j^2 \delta_{ij}$$

$$= \sum_i \left(\frac{1}{2}\dot{Q}_i - \frac{1}{2}\omega_i^2 Q_i^2\right)$$

olarak yazabiliriz. Buradan da göründüğü gibi yeni koordinatlarımızı kullanarak, Lagranj fonksiyonumuzu birbirinden bağımsız harmonik salınıcılar olarak yazabiliriz.

Sistemimizi süren harici bir kuvvet olsun.
Bu durumda Lagranj fonksiyonumuza

$$L_F = \sum_i F_i(t) q_i = F(t)^T q$$

şeklinde bunu ekleyebiliriz. Normal kip koordinatlarımıza geçecek olursak, bu terimi

$$L_F = F(t)^T \sum_i Q_i(t) \Delta_i$$

$$= \sum Q_i(t) F(t)^T \Delta_i$$

$$= \sum Q_i f_j(t)$$

olarak yazabiliriz. Burada normal koordinatları süren kuvvetleri

$$f_j(t) = \sum_i F_i \Delta_{ij}$$

olarak tanımladık.

Son olarak sürtünmelere bakalım. Sürtünmeleri hareket denklemlerimize

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_i -\gamma_{ij}\dot{q}_j$$

olarak ekleyebiliriz. Buradaki γ_{ij}'lerin indekslerine göre simetrisini göremeyiz. Ama istatistiksel mekanik yöntemleri kullanılara $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ olduğu gösterilebilinir. Bu durumda, kayıp fonksiyonumuzu

$$F = \frac{1}{2} \sum \gamma_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

olarak tanımlarsak, tek serbestlik derecesi durumunda olduğu gibi

$$\frac{dE}{dt} = -2F$$

olduğu gösterilebilinir. Normal kip koordinatlarına geçersek

$$F = \frac{1}{2} \sum \tilde{\gamma}_i \dot{Q}_i \dot{Q}_i$$

halini alır. Buradaki

$$\tilde{\gamma}_{ij} = \gamma_{kl} \Delta_{ki} \Delta_{li}$$

olarak tanımlanmıştır. (Buradaki normal kipler, sürtünme göz önüne alınarak hesaplanmış kiplerdir)
Normal kiplere geçtikten sonra problem, bağımsız tek serbestlik derecesine sahip salınıcılara indirgenmiş olur.

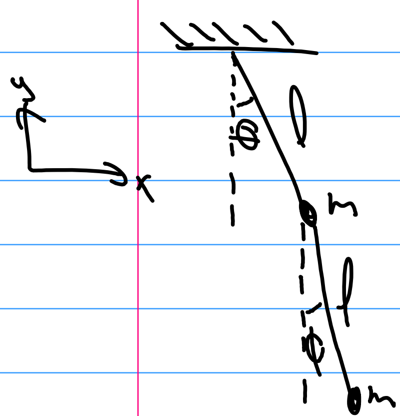
Moleküllerde Salınımlar

N atomdan oluşan bir molekül düşünelim. 3N serbestlik derecesine sahiptir.
Bu molekülün 3 öteleme kipi ve 3 dönme kipi olacaktır (doğrusal moleküllerde eksení etrafında dönemeyeceği için 2 dönme kipi olur)
Dolayısıyla 3N-6 (doğrusal moleküller için için 3N-5) salınım kipi vardır.

Doğrusal bir molekül düşünelim. 3N-5 salınım kipi vardır. Sadece molekül boyunca hareketlerini düşünecek olursak, bir koordinat, bu doğrultuda ötelemeye karşılık gelir ve bu doğru içinde kalan N-1 salınım kipi vardır. Dolayısıyla bu molekülün 3N-5 salınım kipinden, N-1 tanesi molekülün doğrusallığını değiştirmezken, 2N-4 tanesi doğrusallığını bozacaktır. Moleküle dik iki dik eksen simetrik olduğundan, bu $2N-4$ salınım kipi en fazla $N-2$ farklı frekansa karşılık gelecektir.

Bir düzlem molekül düşünürsek, toplam $3N-6$ salınım kipine sahip olacaktır. Sadece düzlemdeki hareketlerine bakarsak 2 öteleme kipi, 1 dönme kipi ve $2N-3$ tane de salınım kipine karşılık gelir. Dolayısıyla, $3N-6$ salınım kipinden $2N-3$ tanesi molekülün düzlemselliğini değiştirmezken, $N-3$ tanesi düzlemsellikten çıkaracaktır.

<u>Örnek</u>



Şekildeki kütleler düzlem içinde hareket edebilmektedirler. Salınıcının normal kiplerini ve bu kiplerin frekanslarını bulun. $t=0$ anında

$$\Theta(0) = \Theta_0 \qquad \dot{\Theta} = \dot{\phi} = 0$$
$$\Theta(0) = 0$$

ise $\Theta(t)$ ve $\phi(t)$ nedir?

<u>Çözüm</u> $\vec{r}_1 = l(\sin\Theta\,\hat{x} - \cos\Theta\,\hat{y})$ ve
$\vec{r}_2 = l(\sin\phi\,\hat{x} - \cos\phi\,\hat{y})$ olsun.

Lagrang fonksiyonunu

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m(\dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{r}}_2)^2 - mg(-l\cos\Theta - l\cos\phi)$$

$$= \frac{1}{2}ml^2\dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2}m\left[l^2\dot{\Theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 2l^2\dot{\Theta}\dot{\phi}\cos(\Theta-\phi)\right]$$
$$+ mgl(\cos\Theta + \cos\phi)$$

olarak yazabiliriz. Küçük salınımlar için (sabit terimleri atarsak) bu Lagranj fonksiyonu

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \left(2\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\right) - \frac{1}{2} m g l \left(\theta^2 + \phi^2\right)$$

olarak yazılabilir. Buradan da

$$A = ml^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad K = mgl \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Öz değer denklemi

$$0 = \det\left(-\alpha^2 A + K\right) = \det \begin{pmatrix} -2ml^2\alpha^2 + mgl & -ml^2\alpha^2 \\ -ml^2\alpha^2 & -ml^2\alpha^2 + mgl \end{pmatrix}$$

$$= \left(-2ml^2\alpha^2 + mgl\right)\left(-ml^2\alpha^2 + mgl\right) - m^2 l^4 \alpha^4$$

$$= m^2 l^4 \left[\left(-2\alpha^2 + \frac{g}{l}\right)\left(-\alpha^2 + \frac{g}{l}\right) - \alpha^4\right] = 0$$

olarak elde edilir. $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ olarak tanımlarsak

$$(\alpha^2)^2 - 3\omega_0^2(\alpha^2) + \omega_0^4 = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{3\omega_0^2 \mp \sqrt{5\omega_0^4}}{2} = \omega_0^2 \left(\frac{3 \mp \sqrt{5}}{2}\right) = \omega_0^2 \left(\frac{2}{3 \pm \sqrt{5}}\right)$$

olarak öz değerleri buluruz.

öz vektörleri $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ olarak gösterirsek

$$\begin{pmatrix} -2\alpha^2 + \omega_0^2 & -\alpha^2 \\ -\alpha^2 & -\alpha^2 + \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2} \omega_0^2$$

$$\Rightarrow (-2\alpha^2 + \omega_0^2) a - \alpha^2 b = 0$$

$$\left[\omega_0^2 - (3 \mp \sqrt{5})\omega_0^2\right] a = \omega_0^2 \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2} b$$

$$2(-2 \pm \sqrt{5}) a = (3 \mp \sqrt{5}) b$$

Buradan da

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{\mp} = \begin{pmatrix} 3 \mp \sqrt{5} \\ 2(-2 \pm \sqrt{5}) \end{pmatrix} \frac{1}{(50 \mp 14\sqrt{5})^{1/2}}$$

$$(a \;\; b)_+ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_- = \frac{1}{(50^2 - 20)^{1/2}} \left[4 + 4(-1) \right] = 0$$

olacağından bu iki öz vektör (olması gerektiği gibi birbirine diktir.

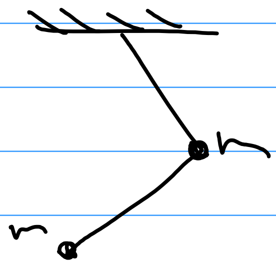
Bu iki öz duruma sayısal olarak bakacak olursak

$$\alpha^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \omega_0^2 \simeq 2.6\, \omega_0^2$$

frekansında salınan öz durum

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_+ = \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{5} \\ 2(-2 - \sqrt{5}) \end{pmatrix} \frac{1}{(50 + 22\sqrt{5})^{1/2}} \simeq \begin{pmatrix} 5.2 \\ -8.5 \end{pmatrix} \frac{1}{10.0}$$

Bu tipte salınırken, sarkaçlar



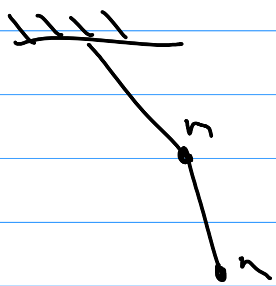
şeklindedir.

$$\alpha^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\,\omega_0^2 \simeq 0.4\,\omega_0^2$$

frekansındaki tip ise

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_- = \begin{pmatrix} 3-\sqrt{5} \\ 2(-2+\sqrt{5}) \end{pmatrix} \frac{1}{(50-22\sqrt{5})^{1/2}} \simeq \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{0.9}$$

Bu tipteki salınıcılar ise



şeklinde salınır

$$M = \begin{pmatrix} a_+ & a_- \\ b_+ & b_- \end{pmatrix}$$ matrisinin tersi $$M^{-1} = M^T = \begin{pmatrix} a_+ & b_+ \\ a_- & b_- \end{pmatrix}$$

matrisidir

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+ \\ b_+ \end{pmatrix} \varphi_+ + \begin{pmatrix} a_- \\ b_- \end{pmatrix} \varphi_- \equiv M \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix}$$

olarak yazarsak

$$\begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix} = M^T \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix}$$

olarak elde ederiz. $t=0$ anında

$$\begin{pmatrix} Q_+(0) \\ Q_-(0) \end{pmatrix} = M^T \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+ & b_+ \\ a_- & b_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+ \theta_0 \\ a_- \theta_0 \end{pmatrix}$$

ve

$$\begin{pmatrix} \dot{Q}_+(0) \\ \dot{Q}_-(0) \end{pmatrix} = M^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

olarak normal kipler için başlangıç koşulları elde edilir. Bu başlangıç koşulları için çözümler

$$Q_+(t) = a_+ \theta_0 \cos(\omega_+ t)$$
$$Q_-(t) = a_- \theta_0 \cos(\omega_- t)$$

olarak bulunur

$$\begin{pmatrix} \theta(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+ & a_- \\ b_+ & b_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_+ \\ Q_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+ & a_- \\ b_+ & b_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ \theta_0 \cos(\omega_+ t) \\ a_- \theta_0 \cos(\omega_- t) \end{pmatrix}$$

eşitliğinden

$$\theta(t) = a_+^2 \cos(\omega_+ t)\, \theta_0 + a_-^2 \cos(\omega_- t)$$
$$\phi(t) = a_+ b_+ \cos(\omega_+ t)\, \theta_0 + b_- a_- \cos(\omega_- t)$$

olarak elde edilir.

Her ne kadar her bir kipte sistem periyodik olsada, genel hareketi periyodik değildir (yukarıdaki çözüm periyodik bir harekete karşılık gelmez.)