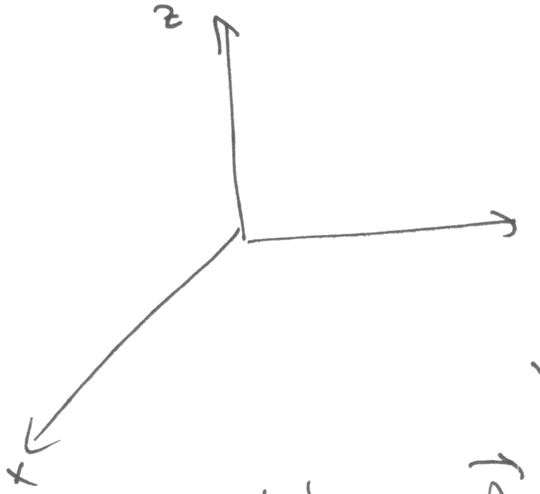
KLASİK ELEKTRODİNAMİK

2010 - 2011 Güz dönemi

W Greiner - "Classical Electrodynamics"

İndeks notasyonu ve Vektör işlemleri:



$$\vec{V}_1 \equiv (V_1^x, V_1^y, V_1^z)$$
$$\equiv V_1^x \hat{x} + V_1^y \hat{y} + V_2^z \hat{z}$$

Yukarıdaki iki notasyonda aynı vektörü gösterir.

iki vektör alalım $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ ve $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$

Bu iki vektörün skalar çarpımları

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \left(\equiv |\vec{A}| |\vec{B}| \cos\theta \right)$$

olarak tanımlanır. x, y, z yerine $1, 2, 3$ kullanırsak,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$
$$= \sum_{i=1}^{3} A_i B_i$$

olarak da gösterilir. Çoğunlukla toplama işareti gösterilmez, ve sadece

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i$$

olarak yazılır (aynı ~~iki~~ indeks bir terimde iki kere varsa o indeks herzaman toplanır. Tekrarlanan indekslere anlamsız indeks denir ve adını istediğiniz gibi değiştirebilirsiniz.

$$A_i B_i = A_j B_j$$

bir indeks iki defadan fazla varsa yanlış yapmışsınızdır.

$$(\vec{A}\cdot\vec{B})(\vec{C}\cdot\vec{D}) = (A_i B_i)(C_i D_i)$$

yazmak yanlıştır çünkü $\vec{A}\cdot\vec{B}$ skalar çarpımın daki toplam ile $(\vec{C}\cdot\vec{D})$ deki toplamın bir ilgisi yoktur. Daha doğru gösterim:

$$(\vec{A}\cdot\vec{B})(\vec{C}\cdot\vec{D}) = A_i B_i C_j D_j$$

burada ikinci toplam için farklı bir indeks kullanıldığına dikkat edin.

Vektörel çarpım:

İki vektörden bir başka vektör verir.

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y,\ A_z B_x - A_x B_z,\ A_x B_y - A_y B_x)$$

olarak tanımlanır. Bileşenleri cinsinden

$$(\vec{A}\times\vec{B})_x \equiv (\vec{A}\times\vec{B})_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})_y \equiv (\vec{A}\times\vec{B})_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})_z \equiv (\vec{A}\times\vec{B})_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1$$

Bunların hepsini birden

$$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$$

olarak da yazabiliriz.

Burada

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (ijk) \in \{(123), (231), (312)\} \\ -1 & (ijk) \in \{(321), (213), (132)\} \\ 0 & \text{eğer } (ijk)\text{'da herhangi ikisi birbirine eşit ise.} \end{cases}$$

~~İndeksler de~~

Örnek:

$$(\vec{A} \times \vec{B})_1 = \varepsilon_{1jk} A_j B_k$$
$$= \varepsilon_{123} A_2 B_3 + \varepsilon_{132} A_3 B_2$$
$$= (+1) A_2 B_3 + (-1) A_3 B_2$$
$$= A_2 B_3 - A_3 B_2$$

ε'a üç boyutlu Levi-Civita tensörü denir.

Kronecker Delta'yı da tanımlayalım

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{eğer } i = j \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } i \neq j \text{ ise.} \end{cases}$$

Levi-civitaların çarpımı:

en genel durumda

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \det\begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

olarak yazılabilir. Sık karşılaşılan bazı özel durumlar:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{lj}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijm} &= \delta_{lj}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} \\ &= \delta_{lj}(\delta_{lj}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) \\ &= \delta_{jj}\delta_{km} - \delta_{lm}\delta_{kl} \\ &= 3\delta_{km} - \delta_{km} \\ &= 2\delta_{km}\end{aligned}$$

Tekrarlanan indeksler üzerinden toplam olduğunu unutmayın. Dolayısıyla

$$\delta_{jj} = \sum_{j=1}^{3}\delta_{jj} = \sum_{j=1}^{3} 1 = 3$$ olur.

Benzer şekilde

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 3! = 6.$$

Bunları kullanarak vektörel eşitlikleri kolayca ispatlayabiliriz:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = A_i(\vec{B}\times\vec{C})_i$$
$$= A_i\,\varepsilon_{ijk}B_jC_k$$
$$= \varepsilon_{ijk}A_iB_jC_k$$
$$= \varepsilon_{jki}B_jC_kA_i$$
$$= B_j\,\varepsilon_{jki}C_kA_i$$
$$= B_j(\vec{C}\times\vec{A})_j$$
$$= \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$$

$$\left[\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\right]_i = \varepsilon_{ijk}A_j(\vec{B}\times\vec{C})_k$$
$$= \varepsilon_{ijk}A_j\,\varepsilon_{klm}B_lC_m$$
$$= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}A_jB_lC_m$$
$$= (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})A_jB_lC_m$$
$$= A_mB_iC_m - A_jB_jC_i$$
$$= B_i(\vec{A}\cdot\vec{C}) - C_i(\vec{A}\cdot\vec{B})$$
$$= \left[\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})\right]_i$$

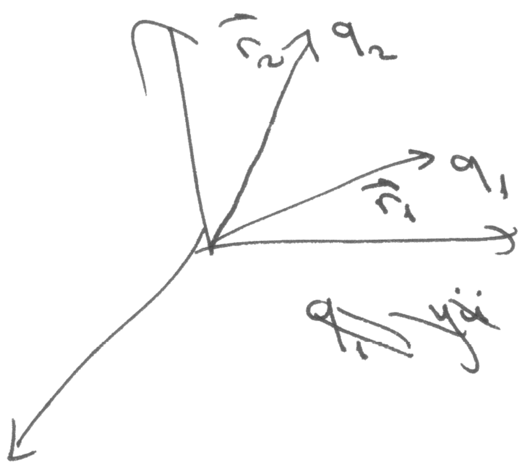
İki vektörün bütün bileşenleri eşitse, vektörler eşittir:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

ε tensörünün herhangi iki indeksi yer değiştirdiğinde işaret değiştirdiğine dikkat edin.

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = \varepsilon_{jki} = \dots$$

——— o ———



$\vec{r}_1$ ve $\vec{r}_2$ konumlarında q_1 ve q_2 yükleri olsun.

q_1 yüküne q_2 yükünün uyguladığı elektrostatik kuvvet

$$\vec{F}_{12} = k\, q_1 q_2 \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

olarak verilir.

k, kullanılan birim sistemine göre değişir.

SI'da $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$'dır ve yüklerin birimi Coulomb'dur.

Gauss birimlerinde $k = 1$'dir ve yükün birimi $[q] = N^{1/2}\, m$ olur.

Bu derste Gauss birimlerini kullanacağız.

Bu ifade, uzaktan etkiyi çağrıştırır; q_2 yükü "uzaktan" q_1 yükünü etkiler.

<u>Elektrik alanı</u>

Herhangi bir $\vec{r}$ noktasındaki elektrik alanı, oraya çok küçük bir test yüküne, dq, etki eden $d\vec{F}$ kuvveti ölçülerek

$$\vec{E} = \frac{d\vec{F}}{dq}$$

($d\vec{F}$ kuvveti, o noktadaki elektrik alandan kaynaklan

ifadesinden elde edilebilir.

Kuvvet ifadesinden, noktasal bir q yükünün ($\vec{r}=0$ noktasına yerleştirilmiş) $\vec{r}$ $(\neq 0)$ noktasında yaratacağı elektrik alan

$$\vec{E} = \frac{q\,\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

olarak bulunur. Kuvvet üst üste ekleme (süperposition) prensibine uyduğu için electric alanı da uyar. Dolayısıyla $\vec{r}_i$ noktalarına yerleştirilmiş q_i yüklerinin $\vec{r}$ noktasında yaratacağı elektrik alan her birinin ~~yükleri~~ yarattığı alanların toplamıdır:

$$\vec{E}_T(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i = \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

Eğer noktasal yükler yerine $\rho(\vec{r})$ yük yoğunluğu ile verilen sürekli yükler var ise

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \rho(\vec{r}\,')\, d^3r' \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

olarak bulunur.

tanım: bir fonksiyonun gradyanı/diverjansı

$$\text{div}\,\phi(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}$$

olarak tanımlanır.

integralin içindeki ifadeye daha yakından bakalım:

$$\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right)_i = \frac{r_i - r_i'}{\left[(r_j - r_j')^2\right]^{3/2}}$$

$$\left[(r_j - r_j')^2 = (r_j - r_j')(r_j - r_j') = \sum_{j=1}^{3} (r_j - r_j')^2 \right.$$
olduğuna dikkat edin $\Big]$

$$= -\frac{\partial}{\partial r_i} \left[(r_j - r_j')^2\right]^{-1/2}$$

$$= \left[-\text{div} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \right]_i$$

dolayısıyla

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \int \rho(\vec{r}\,')\left(-\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) d^3r'$$

$$= -\vec{\nabla}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3r'$$

$$\equiv -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$$

Buradan $\phi(\vec{r})$ elektrostatik potansiyelini, yük dağılımı cinsinden

$$\phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3r'$$

olarak tanımladık.

Buradan $(\vec{\nabla}\times\vec{E})_i = -(\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi))_i \cancel{= 0}$ ~~olur~~

$$\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial r_j} \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$= -\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\phi$$

j ve k isimlerini değiştirirsek $= -\varepsilon_{ikj}\partial_k\partial_j\phi$

ε'da k ve j'nin yerlerini değiştirirsek $= \varepsilon_{ijk}\partial_k\partial_j\phi$

$\partial_k\partial_j = \partial_j\partial_k$'i kullanırsak $= \varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\phi = (\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi))_i$

$$= -\vec{\nabla}\times\vec{E}$$

$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$ olarak buluruz

Gauss Yasası

Elektrik alanın bir yüzey üzerinden integrali, o yüzeyden geçen elektrik alan akısını verir

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S (\vec{E} \cdot \hat{n})\, dS$$

$\hat{n}$: yüzeye dik birim vektör (yüzeyin "dışına" doğru)

Noktasal q yükü etrafında kapalı bir yüzey düşünelim. Bu yüzeyde da büyüklüğünde küçük bir alan alalım.

$$\vec{E} \cdot \hat{n}\, da = (E \cos\theta)\, da = E\,(da \cos\theta)$$

$$= \frac{q}{r^2}(da \cos\theta)$$

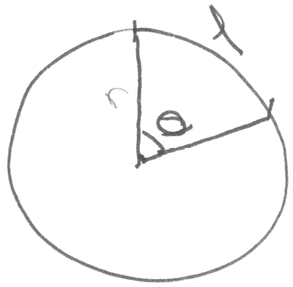
$da \cos\theta$, radyal yöne dik alanın büyüklüğü, r ise bu alanın merkeze (yükün merkezde olduğunu varsaydık) olan uzaklığıdır.

$$\frac{da \cos\theta}{r^2} = d\Omega$$

$$\frac{da \cos\theta}{r^2} = d\Omega$$

bu alanın gördüğü katı açıdır.

Tanım: katı açı düzlemde tanımlanan açının, üç boyuta genelleştirilmiş halidir. Bir çember üzerinde bir ~~[illegible]~~ parça alalım. Bu parçanın gördüğü açı



$$\theta = \frac{l}{r}$$

olarak tanımlanır (radyan olan

3 boyutta, çember yerini küre alır, parçanın uzunluğu yerini ~~alan~~ parçanın alanı alır, ve birimsiz yapmak için yarıçapın karesine bölünür

$$\Omega = \frac{A}{r^2}$$

Kürenin toplam alanı $4\pi r^2$ olduğu için, toplam katı açı 4π'dir.

Dolayısıyla bu parçadan geçen akı

$$d\Phi = \vec{E}\cdot\hat{n}\,da = q\,d\Omega$$

olur. Bütün alanlar üzerinden toplarsak

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,da = 4\pi q$$

Eğer birden fazla yük varsa

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint \sum_i \vec{E}_i\cdot d\vec{S} = \sum_i \oint \vec{E}_i\, d\vec{S}$$

$$= \sum_i 4\pi q_i = 4\pi Q$$

Burada $\vec{E}_i$, i yükünün yarattığı elektrik alan olarak tanımlanmıştır.

Eğer $\rho(\vec{r})$ yük dağılımı varsa

$$Q = \int \rho(\vec{r})\, d^3\vec{r}$$ olarak yazabiliriz.

Dolayısıyla seçilen herhangi bir <u>matematiksel</u> kapalı yüzey için

$$4\pi Q = 4\pi \int_V \rho(\vec{r})\, d^3\vec{r} = \oint_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$
$$= \int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\, d^3\vec{r}$$

$$\Rightarrow \int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - 4\pi\rho\right) d^3\vec{r} = 0$$

Burada ∂V seçilen kapalı yüzey, ve V bu yüzeyin kapsadığı hacimdir.

Yukarıdaki integral, her V hacmi için sıfır olduğu için

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho}$$

olmalıdır.

Daha önceden bulduğumuz sonuçla beraber

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0}$$

elektrostatik alanı belirlerler.