Örnek Soru Çözümleri

Soru 1: $y=0$'da $x>0$ yarı düzlemine yerleştirilmiş bir metalin elektrostatik potansiyel V_0 ise (sonsuzdaki elektrostatik potansiyel sıfır olarak tanımlanmıştır) uzayın herhangi bir yerindeki potansiyeli bulun.

Çözüm Problemin z-yönünde öteleme simetrisi vardır ve dolayısıyla elektrostatik potansiyel y'ye bağlı olamaz:

$$\phi = \phi(x, y)$$

ve ϕ

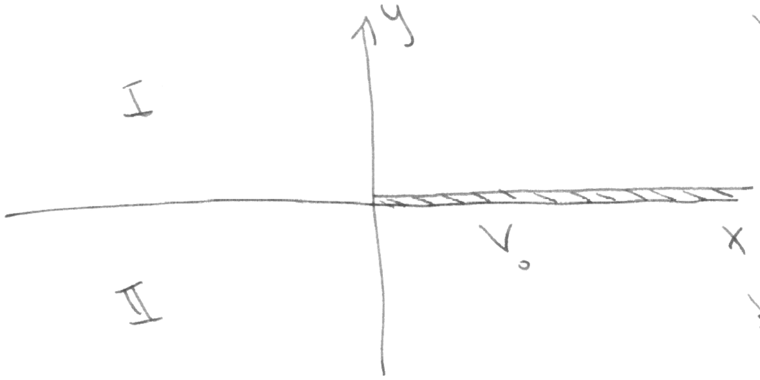
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

denklemini sağlamalıdır. Sınır koşulları:

$\phi = 0$ sonsuzda

$\phi = V_0$ $y=0$ ve $x>0$ ise

olarak yazılabilir.



~~uzayı, şekildeki gibi iki parçaya bölersek, her parçada elektrostatik potansiyeli bulup, $z=0$'da süreklilik ve sınır koşullarını seçebiliriz~~

Problemin çözümünü basitleştirmek için, öncelikle değişken değiştirelim:

$$x = R_0 e^{u} \cos v \qquad y = R_0 e^{u} \sin v$$

(R_0 herhangi bir uzunluk olmak üzere) (*)

Yeni değişkenler cinsinden, sınır koşulları

$$\phi = 0 \quad u \to \infty \text{ iken } (v \neq 0 \text{ ise})$$

$$\phi = V_0 \quad v = 0, \ -\infty \leq u < \infty \text{ iken.}$$

Yeni değişkenler cinsinden sınır koşulları basit bir hal alır. Yeni değişkenler cinsinden, ϕ'nin sağlaması gereken denklemi yazalım:

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$= x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial y} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} = \left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$= y^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2xy\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} = (x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

Dolayısıyla

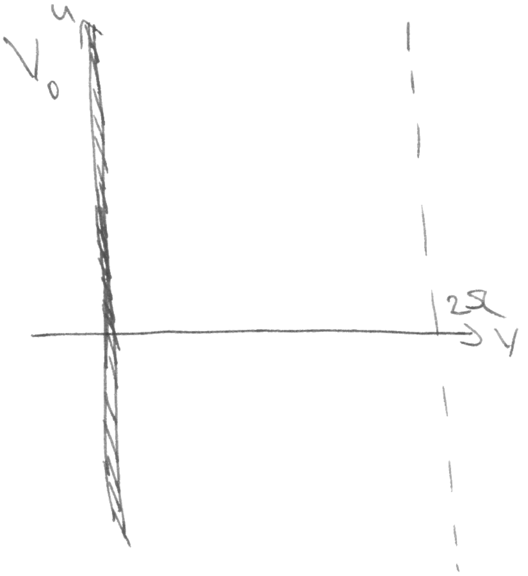
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} = (x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) = 0$$

---

* Bu ve benzeri dönüşümler için Kompleks Analiz dersinizi tekrar edin.

Yani, Φ, yeni koordinatlarda da Laplace denklemisi sağlar. Yeni koordinatlardan v'nin sadece belirli bir aralıkta değer alabildiğine dikkat edin. Bu aralığı

$0 \le v < 2\pi$ olarak seçersek



~~Laplace~~ ~~ide~~ (u,v) uzayında problemin u'ya göre öteleme simetrisi vardır. Dolayısıyla Φ, u'ya bağlı olamaz. Bu durumda Φ'nin sağlaması gereken denklem

$$\frac{d^2\Phi}{dv^2} = 0 \Rightarrow \Phi = \alpha v + \beta$$

olarak yazılabilir. $v=0$, ve $v \to 2\pi$ limiti aynı noktaya karşılık geldikleri için, Φ'nin sürekliliği $\Phi(0) = \Phi(v \to 2\pi)$ olmasını gerektirir. Ancak ~~lineer~~ ~~bir~~ doğrusal bir fonksiyon bu özelliği sağlayamaz.

Buradaki problem, tek bir koordinat dönüşümüyle bütün (x,y) uzayını sürekli olarak tanımlayamamamızdan kaynaklanır. Bu yüzden (x,y) uzayımızı şekilde ~~gördüğü~~ gösterildiği gibi iki kısma böleceğiz.

<u>1. bölge</u> $y>0$ yarı uzayı. Bu uzayda

$$-\infty < u < \infty \qquad 0 \leq v \leq \pi$$

<u>2. bölge</u> $y<0$ yarı uzayı. Bu uzayda

$$-\infty < u < \infty \qquad \pi \leq v \leq 2\pi$$

1. bölgedeki çözüm:

$$\phi_1(v) = \alpha_1 v + V_0$$

2. bölgedeki çözüm:

$$\phi_2(v) = \alpha_2 (v - 2\pi) + V_0$$

Bu iki çözümü yazarken, 1. bölgede $\phi(v=0) = V_0$ ve 2. bölgede $\phi(v=2\pi) = V_0$ olduğunu kullandık. Bu iki çözüm, $v=\pi$'de sürekli olmalıdır. Dolayısıyla

$$\alpha_1 \pi + V_0 = \alpha_2(-\pi) + V_0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2$$

$$\Rightarrow \phi_1(v) = \alpha_1 v + V_0 = \alpha_1 (v-\pi) + \alpha_1 \pi + V_0$$

$$\phi_2(v) = -\alpha_1 (v - 2\pi) + V_0 = -\alpha_1 (v-\pi) + \alpha_1 \pi + V_0$$

İki çözümü de genel olarak

$$\phi(v) = -\alpha_1 |v - \pi| + \alpha_1 \pi + V_0$$

olarak yazabiliriz. Bu çözüm $0 \leq v \leq 2\pi$ bölgesinde geçerlidir ve $\phi(0) = \phi(2\pi)$ süreklilik koşulunu sağlar, Bu çözüm $-x$ ekseni üzerinde $(v=\pi)$

$$\Phi(v) = \alpha_1 \pi + V_0$$

değerini alır.

(Bu problemde konformal değişmezlik vardır, yani ~~potansiyel~~ eğer bütün uzunlukları ölçeklendirirsek ~~hiç~~ birşey değişmez. Dolayısıyla potansiyelin de bu özelliği olması gerekir. Bu değişmezliğe konformal değişmezlik denir. Elektrostatik potansiyelin bu özelliğe sahip olabilmesi için, sadece yöne bağlı olması gerekir. Yönü belirleyen v olduğu için, potansiyelin sadece v'ye bağlı olması konformal simetri denen bu simetriden kaynaklanır.)

Toplarsak, herhangi bir (x,y) noktasındaki potansiyel

$$\Phi(x,y) = -\alpha_1 |v-\pi| + \alpha_1 \pi + V_0$$

$$\cos v = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad ; \quad \sin v = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad 0 \leq v \leq 2\pi$$

olarak verilir. Potansiyel sadece yöne bağlı olduğu için sonsuzda sıfıra gidemez. Dolayısıyla yeterli sınır koşulu verilmediği için α_1 belirlenemez. Eğer

$$\Phi(x<0, y\neq 0) = 0 \quad \text{seçersek,}$$

$$\Phi(v=\pi) = \alpha_1 \pi + V_0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{V_0}{\pi} \quad \text{olur}$$

$$\Rightarrow \Phi(x,y) = \frac{V_0}{\pi} |v-\pi| \quad \text{olarak buluruz.}$$

$y>0$ bölgesinde $(0\leq \nu \leq \Omega)$
elektrik alanı bulmak istersek

$$\phi(x, y>0) = \frac{V_0}{\Omega}(\Omega - \nu)$$

$$\phi(x,y>0) = \frac{V_0}{\Omega}\left(\Omega - \tan^{-1}\frac{y}{x}\right) \quad 0\leq \tan^{-1} \leq \Omega$$

ifadesinin gradyanını almamız lazım.

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{V_0}{\Omega}\frac{+1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(+\frac{y}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{V_0}{\Omega}\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{V_0}{\Omega}\frac{y}{\rho^2}$$

$$E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = +\frac{V_0}{\Omega}\frac{+1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x}$$

$$= \frac{V_0}{\Omega}\frac{x}{\rho^2}$$

$$\vec{E} = \frac{V_0}{\Omega}\frac{1}{\rho^2}\left(-y\hat{x} + x\hat{y}\right) = \frac{V_0}{\Omega}\frac{1}{\rho}\hat{\theta}$$

olarak yazabiliriz. $\rho\to 0$'a giderken (düzlemin sivri ucuna yaklaşırken) Elektrik alanın şiddetlendiğine dikkat ediniz.

Soru

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta',\phi') Y_{lm}(\theta,\phi)$$

olduğunu gösterin.

Çözüm: $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$'ı $\vec{r}$'nin bir fonksiyonu olarak düşünürsek,

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,') \qquad (*)$$

denklemini sağlar. Aynı zamanda $|\vec{r}|\to\infty$ giderken

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \xrightarrow{|\vec{r}|\to\infty} 0$$

sınır koşulunu da sağlar. $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$, $\vec{r}\,'$ noktasındaki birim yükün $\vec{r}$'de yarattığı elektrostatik potansiyeldir, ve sınır koşul olarak $|\vec{r}|\to\infty$ giderken, sıfıra gider. Teklik koşulundan dolayı, aynı denklemi ve aynı sınır koşulunu sağlayan başka ifade bulursak, bu ifade $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ ile aynı olmalıdır. eşitliğin sağı $|\vec{r}|\to\infty$, $r_> = |\vec{r}|\to\infty$ ve dolayısıyla sağ taraf $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ ile aynı sınır koşulunu sağlar. Eğer $(*)$ denklemine yerleştirirsek, $(*)$ denklemini sağladığını da gösterebiliriz. Ancak bazı teknikleri göstermek amacıyla, burada farklı bir yöntemle çözeceğiz.

Öncelikle
$\nabla^2 F(\vec{r}) = 0$ denkleminin küresel koordinatlarda en genel çözümünü ~~yazar~~ bulalım. Bunun için, değişkenleri ayırma yöntemini kullanacağız.

$$F(\vec{r}) = R(r)\, \Theta(\theta)\, \Phi(\phi)$$

olacak şekilde bir çözüm arayalım. Küresel koordinatlarda Laplace denklemini

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial F(\vec{r})}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial F(\vec{r})}{\partial \theta}\right)$$
$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 F(\vec{r})}{\partial \phi^2} = 0$$

şeklinde yazabiliriz. $F(\vec{r})$'nin yukarıdaki açılımını yerleştirip $\frac{r^2 \sin^2\theta}{F(\vec{r})}$ ile çarparsak

$$\frac{\sin^2\theta}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = 0$$

elde ederiz. Son terim, sadece ϕ değişkenine bağlıdır. Herhangi bir (r,θ) değeri için bu denklemin bütün ϕ'lerde sağlanması için, bu son terimin sabit olması gerekir.

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m^2$$

olarak seçersek $\Phi(\phi) = A e^{im\phi} + B e^{-im\phi}$ olarak buluruz. ϕ ve $\phi + 2\pi$ koordinatları aynı noktaya karşılık geldiği için, $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$ olması gerekir, ki bu bize m'nin tam sayı olması gerektiğini söyler.

m'nin negatif değer almasına izin verirsek

$$\Phi(\phi) = Ae^{im\phi}$$

olarak seçebiliriz. Yerine yerleştirip, denklemi $\sin^2\theta$ ile bölersek

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = 0$$

Buluruz. Son iki terim, sadece θ'ya bağlıdır, ilk terim ise sadece r'ye bağlıdır.
Bu durumda ilk terim ve son iki terimin toplamının sabit olması gerekir.

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = -l(l+1)$$

olarak seçersek, $0 \leq \theta \leq \pi$ aralığında sonlu olan çözümleri Legendre polinomlarıdır, ve

$$\Theta = P_l^m(\cos\theta)$$

ile gösterilebilir. Burada $l = 0, 1, \ldots$ ve $-l \leq m \leq l$ olmalıdır (aksi taktirde bütün $0 \leq \theta \leq \pi$ aralığında sonsuz olmaz.

Dolayısıyla

$\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ çarpımı $Y_{lm}(\theta, \phi)$ ile orantılıdır.

R'nin sağladığı denklem

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - l(l+1) = 0$$

denklemini sağlar. $R(r) = r^\nu$ gibi bir çözüm denersek

$$\nu(\nu+1) - l(l+1) = 0$$

$$(\nu - l)(\nu + l + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \nu = l \quad \text{veya} \quad \nu = -l-1$$

Bu durumda

$$\vec{F}(\vec{r}) = \left(a_{lm}\, r^{l} + b_{lm}\, \frac{1}{r^{l+1}}\right) Y_{lm}(\theta,\phi)$$

olarak yazılabilir. Bütün olası l ve m değerleri için Laplace denklemini sağlayacağı için, en genel çözüm bütün olası değerlerin toplamı olacaktır:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(a_{lm}\, r^{l} + b_{lm}\, \frac{1}{r^{l+1}}\right) Y_{lm}(\theta,\phi)$$

Şimdi, bu sonucu

$$\nabla^2 \vec{F}(\vec{r}) = -4\pi\, \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

denkleminin çözümü için kullanalım. Öncelikle uzayı $|\vec{r}| < |\vec{r}\,'|$ ve $|\vec{r}| > |\vec{r}\,'|$ olmak üzere iki bölgeye ayıralım. Her iki bölgede de

$$\nabla^2 F(\vec{r}) = 0$$

olmalıdır, dolayısıyla her iki bölgede de $F(\vec{r})$, Laplace denkleminin genel çözümü şeklinde olmalıdır. $F(\vec{r})$'nin $|\vec{r}|=0$'da ~~$|\vec{r}|=\infty$'da~~ sonlu olması koşulunu kullanırsak, $|\vec{r}|<|\vec{r}\,'|$'daki en genel çözüm

$$F_<(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm}\, r^{l}\, Y_{lm}(\theta,\phi)$$

olur. $|\vec{r}|\to\infty$ iken $F(\vec{r})=0$ olması koşulunu sağlayan en genel çözüm ise

$$F_>(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} b_{lm}\, \frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r^{l+1}}$$

olarak yazılır.

Bu iki çözüm, $|\vec{r}|=|\vec{r}'|$ iken sürekli olmalıdır. Dolayısıyla

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm}\, r'^{l}\, Y_{lm}(\theta,\phi)$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} b_{lm}\,\frac{1}{r'^{l+1}}\, Y_{lm}(\theta,\phi)$$

olması gerekir. İki tarafı $Y^{*}_{l'm'}(\theta,\phi)$ ile çarpıp, θ ve ϕ üzerinden integrallerini alıp

$$\int d\Omega\, Y^{*}_{l'm'}(\theta,\phi)\, Y_{lm}(\theta,\phi) = \delta_{l'l}\,\delta_{m'm}$$

sonucunu kullanırsak

$$\boxed{a_{lm}\, r'^{l} = b_{lm}\,\frac{1}{r'^{l+1}}}$$

buluruz.

Elektrostatik potansiyel $|\vec{r}|=|\vec{r}'|$ küresinin üzerinde, türevinin süreksizliği yüzey yük dağılımı ile orantılıdır. Yüzey yük dağılımını

$$\sigma(\theta,\phi) = \frac{1}{r'^2}\,\delta(\phi-\phi')\,\delta(\cos\theta-\cos\theta')$$

ön çarpan, $\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\, \sigma(\theta,\phi) = 1$

olacak şekilde seçilmiştir (birim yük olduğu için). Yüzeye dik yön, radyal yöndür. Dolayısıyla

$$\left(-\frac{\partial \phi_>}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=r'} - \left(-\frac{\partial \phi_<}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=r'} = \frac{4\pi}{r'^2}\,\delta(\phi-\phi')\,\delta(\cos\theta-\cos\theta')$$

$(\phi = F)$

$\Phi_>$ ve $\Phi_<$ çözümlerini yerleştirirsek,

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\phi)\left(+\frac{b_{lm}(l+1)}{r'^{l+2}} + l\, a_{lm} r'^{l-1}\right)$$

$$= \delta(\phi-\phi')\,\delta(\cos\theta-\cos\theta')\frac{4\pi}{r'^2}$$

İki tarafı da $Y^*_{l'm'}(\theta,\phi)$ ile çarpıp, Y_{lm}'lerin diklikleri kullanırsak

$$+\frac{b_{lm}(l+1)}{r'^{l+2}} + l\, a_{lm} r'^{l-1} = \frac{4\pi}{r'^2} Y^*_{lm}(\theta',\phi')$$

Daha önce bulduğumuz

$a_{lm} = b_{lm}\dfrac{1}{r'^{2l+1}}$ çözümünü kullanırsak

$$+\frac{b_{lm}(l+1)}{r'^{l+2}} + \frac{l\, b_{lm}}{r'^{l+2}} = \frac{4\pi}{r'^2} Y^*_{lm}(\theta',\phi')$$

$$\Rightarrow \boxed{b_{lm} = +\frac{r'^{l}\,4\pi}{2l+1} Y^*_{lm}(\theta',\phi')}$$

ve

$$a_{lm} = +\frac{4\pi}{2l+1}\frac{1}{r'^{l+1}} Y^*_{lm}(\theta',\phi')$$

Yerlerine yerleştirirsek

$$\Phi_< = +\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r^l}{r'^{l+1}} Y^*_{lm}(\theta',\phi')\,Y_{lm}(\theta,\phi)$$

$$\Phi_> = +\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r'^l}{r^{l+1}} Y^*_{lm}(\theta',\phi')\,Y_{lm}(\theta,\phi)$$

$$r_> = \max(r, r')$$
$$r_< = \min(r, r')$$

olarak tanımlarsak,

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y^*_{lm}(\theta',\phi') Y_{lm}(\theta,\phi)$$

olarak bulunur (burada ikinci eşitliği yazarken, çözümün tekliği kullanılmıştır)