## Bir ortam içindeki elektrik alan

Şimdiye kadar elektrik alanının boşluktaki özelliklerini inceledik. Oysa gerçek hayattaki ilgilendiğimiz sistemlerin içi başka malzemelerle dolu olacaktır (en azından boşlukları hava dolduracaktır) ve bu malzemeler elektrik alanının özelliklerini değiştirecektir. Yük dağılımı cinsinden elektrik alanının ifadesine geri dönecek olursak:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3r' \, \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

burada $\rho(\vec{r}')$ bütün yüklerin dağılımıdır. Bu yük dağılımı, bütün elektron ve çekirdeklerin yüklerini de içerir. Bu yükler, sürekli hareket halinde olduğundan, ve yukarıdaki ifade hareketsiz yükler için geçerli olduğundan tam olarak doğru değildir.

Ayrıca yukarıdaki ifade, ihtiyacımız olduğundan daha çoğa bilgi içermektedir. Yüklerin sürekli hareketinden dolayı, elektrik alan zaman içinde sürekli salınımlar yapmaktadır. Ayrıca noktasal yüklerin arasındaki mesafe $\sim 10^{-10}$ m olduğu için, daha kısa mesafelerde çok hızlı değişmektedir. Oysa pek çok ölçüm aleti bu hızlı ve rastgele salınımları ölçmez, onun yerine ortalama değerini ölçer.

Herhangi bir malzemenin içindeki bir $\vec{r}$ noktasındaki ortalama alanı

$$\langle \vec{E}(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V d^3r' \, \vec{E}(\vec{r}')$$

olarak tanımlayalım. Buradaki V hacmi, $\vec{r}$ noktası etrafında, malzemenin boyutlarına oranla çok küçük, ancak atomik boyutlara oranla çok büyük bir hacimdir.

$\vec{E}(\vec{r})$ değerine, V hacminin içinden ve dışından gelen katkıları ayrı ayrı hesaplayalım. Öncelikle

$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{iç}(\vec{r}) + \vec{E}_{dış}(\vec{r})$ olarak

ikiye ayıralım. Böylece $\langle \vec{E} \rangle = \langle \vec{E}_{iç} \rangle + \langle \vec{E}_{dış} \rangle$ olur. $\langle \vec{E}_{iç} \rangle$'i hesaplayacak olursak:

$$\vec{E}_{iç}(\vec{r}) = \int_V d^3r'' \, \rho(\vec{r}'') \frac{(\vec{r} - \vec{r}'')}{|\vec{r} - \vec{r}''|^3}$$

dolayısıyla

$$\langle \vec{E}_{iç}(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V d^3r' \int_V d^3r'' \, \rho(\vec{r}'') \frac{(\vec{r}' - \vec{r}'')}{|\vec{r}' - \vec{r}''|^3}$$

$$= \frac{1}{V} \int_V d^3r'' \, \rho(\vec{r}'') \int_V d^3r' \frac{(\vec{r}' - \vec{r}'')}{|\vec{r}' - \vec{r}''|^3}$$

ikinci adımda r' ve r'' integrallerinin yerlerini değiştirdik.

$\vec{r}'$ integraline bakacak olursak, bu integrali

$$\int_V d^3r' \frac{(\vec{r}'-\vec{r}'')}{|\vec{r}'-\vec{r}''|^3} = -\int_V d^3r' \frac{(\vec{r}''-\vec{r}')}{|\vec{r}'-\vec{r}''|^3}$$

V hacmine düzgün olarak dağılmış bir yük dağılımının (yoğunluğu bir olan) $\vec{r}'' \in V$ noktasında yarattığı elektrik alan olarak yorumlayabiliriz.
İşlemleri basitleştirmek için V hacmini bir küre olarak düşünürsek

$$\int d^3r' \frac{(\vec{r}''-\vec{r}')}{|\vec{r}'-\vec{r}''|^3} = \hat{r}''\left(\frac{4}{3}\pi r''^3\right)(1)\ \frac{1}{r^2}$$

Buradaki $\hat{r}''$, elektrik alanının radyal yönde olduğunu belirtir. İkinci ~~pak~~ çarpan merkezle $\vec{r}''$ noktası arasında kalan hacim ile 1 çarpanı birim yoğunluğa karşılık gelir. Sadeleştirmelerden sonra

$$\int d^3r' \frac{(\vec{r}''-\vec{r}')}{|\vec{r}'-\vec{r}''|^3} = \frac{4}{3}\pi\vec{r}''$$

elde ederiz. Yerine yerleştirirsek

$$\langle \vec{E}_{ic}(\vec{r})\rangle = \frac{-1}{V}\int_V d^3r''\,\rho(\vec{r}'')\ \frac{4\pi}{3}\vec{r}'' = -\frac{4\pi}{3}\vec{P}(\vec{r})$$

olarak bulunur. Burada $\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{V}\int d^3r''\,\vec{r}''\rho(\vec{r}'')$ ortalama çift kutup yoğunluğunu vermektedir.

Şimdi $\langle \vec{E}_{dis}(\vec{r}) \rangle$ ortalamasını hesaplayalım.

$$\vec{E}_{dis}(\vec{r}) = \int_{\vec{r}' \notin V} d^3r'' \, \rho(\vec{r}'') \frac{(\vec{r} - \vec{r}'')}{|\vec{r} - \vec{r}''|^3}$$

ifadesinden

$$\langle \vec{E}_{dis}(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V d^3r' \int_{\vec{r}'' \notin V} d^3r'' \, \rho(\vec{r}'') \frac{(\vec{r}' - \vec{r}'')}{|\vec{r}' - \vec{r}''|^3}$$

$$= \frac{1}{V} \int_{\vec{r}'' \notin V} d^3r'' \, \rho(\vec{r}'') \int_{\vec{r}' \in V} d^3r' \frac{(\vec{r}' - \vec{r}'')}{|\vec{r}' - \vec{r}''|^3}$$

elde ederiz. $\vec{r}'$ integralini $\vec{r}'' \in V$ için incelemiştik. Aynı mantıkla $\vec{r}'' \notin V$ için

$$\int_{\vec{r}' \in V} d^3r' \frac{(\vec{r}' - \vec{r}'')}{|\vec{r}' - \vec{r}''|^3} = + V \frac{\vec{r} - \vec{r}''}{|\vec{r} - \vec{r}''|^3}$$

olarak yazılabilir (burada yine V hacmini bir küre olarak düşündük) Dolayısıyla

$$\langle \vec{E}_{dış}(\vec{r}) \rangle = \int_{\vec{r}'' \notin V} d^3r'' \, \rho(\vec{r}'') \frac{\vec{r} - \vec{r}''}{|\vec{r}'' - \vec{r}|^3}$$

olarak yazabiliriz. ~~$\vec{r}'' = \vec{r} + \vec{\delta}$ olarak yazarsak~~

$$\cancel{\langle \vec{E}_{dis}(\vec{r}) \rangle = \int d^3\delta \, \rho(\vec{r} + \vec{\delta}) \frac{\vec{\delta}}{|\vec{\delta}|^3}}$$

~~olarak yazabiliriz.~~

Yani, $\rho(\vec{r})$ yük dağılımının, V hacmi içinde yarattığı elektrik alanının ortalaması, V hacminin merkezinde yarattığı elektrik alanına eşittir.

Öncelikle küçük bir $\Delta V''$ hacminin ($\vec{r}''$ noktası etrafındaki) $\vec{r}$ noktasında yarattığı elektrik alanına bakalım.

$\Delta V''$ hacminin boyutu $|\vec{r}''-\vec{r}|$ mesafesine kıyasla çok küçüktür. ($\vec{r}'' \notin V$ olduğu için $|\vec{r}''-\vec{r}|$ en az V küresinin yarıçapıdır. $\Delta V''$ hacmi ise birkaç molekülün hacmi kadar seçilebilir.) Dolayısıyla $\Delta V''$ hacmindeki $\Delta q = \rho(\vec{r}'')\,\Delta V''$ yükünün yarattığı elektrik alanın çoklu kutup açılımını yapabiliriz:

$$\Delta\vec{E} = -\vec{\nabla}\left[\frac{\rho(\vec{r}'')\,\Delta V''}{|\vec{r}-\vec{r}''|} + \frac{\vec{P}(\vec{r}'')\,\Delta V''\cdot(\vec{r}-\vec{r}'')}{|\vec{r}-\vec{r}''|^3} + \cdots\right]$$

daha yüksek çok kutuplar ihmal edilmiştir. Burada $P(\vec{r}'')$ ortalama çift kutup yoğunluğu da yeniden kullanılmıştır. Bütün hacimler üzerinden toplayıp, süreklilik limitini aldığımızda

$$\langle\vec{E}_{dış}(\vec{r})\rangle = \vec{E}_{dış}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\left\{\int_{\vec{r}''\notin V} d^3r''\,\frac{\rho(\vec{r}'')}{|\vec{r}-\vec{r}''|} + \int_{\vec{r}''\notin V} d^3r''\,\frac{\vec{P}(\vec{r}'')\cdot(\vec{r}-\vec{r}'')}{|\vec{r}-\vec{r}''|^3}\right\}$$

olarak buluruz. Buradaki $\rho(\vec{r})$ ve $\vec{P}(\vec{r}'')$ ifadelerinin sırasıyla <u>ortalama</u> yük yoğunluğu ve <u>ortalama</u> çift kutup yoğunluğu olduklarına dikkat ediniz.

Bu iki sonucu bir arada yazacak olursak, $\vec{r}$ noktasındaki ortalama (makroskopik) elektrik alanı

$$\vec{E}^*(\vec{r}) = \langle \vec{E}(\vec{r}) \rangle = -\frac{4\pi}{3}\vec{P}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\cdot\left\{\int_{\vec{r}''\notin V} d^3r'' \left[\frac{\rho(\vec{r}'')}{|\vec{r}-\vec{r}''|} + \frac{\vec{P}(\vec{r}'')\cdot(\vec{r}-\vec{r}'')}{|\vec{r}-\vec{r}''|^3}\right]\right\}$$

olarak yazabiliriz. İlk terimi diğer terime benzetebilmek için

$$\vec{\nabla}\int_{\vec{r}''\in V} d^3r'' \left[\frac{\rho(\vec{r}'')}{|\vec{r}-\vec{r}''|} + \frac{\vec{P}(\vec{r}'')\cdot(\vec{r}-\vec{r}'')}{|\vec{r}-\vec{r}''|^3}\right]$$

ifadesine bakalım. ($\vec{E}^*(\vec{r})$ ifadesindeki integralden farkı, $\vec{E}^*(\vec{r})$ ifadesindeki integral V hacmi <u>dışı</u> üzerinden bir integralken, bu ifade V hacmi <u>içi</u> üzerinden <u>bir</u> integraldir.)

$\rho(\vec{r})$ ve $\vec{P}(\vec{r})$ ortalama değerler olduğu ve V hacmi küçük olduğu için, $\rho(\vec{r})$ ve $\vec{P}(\vec{r})$, V hacmi içerisinde değişmez ve integralin dışarısına çıkarılabilirler. Yerlerine, V hacmi içindeki $\vec{r}$ noktasındaki değerlerini koyarsak

$$= \vec{\nabla}\left[\rho(\vec{r})\int_{\vec{r}''\in V} d^3r'' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}''|} + \vec{P}(\vec{r})\cdot\int_{\vec{r}''\in V} d^3r'' \frac{(\vec{r}-\vec{r}'')}{|\vec{r}-\vec{r}''|^3}\right]$$

İlk terime bakacak olursak, Bu terim, $\rho$ yük dağılımının, V hacmininin ortasında ($\vec{r}$ noktasında) yarattığı elektrik alandır. $\rho$ yük dağılımı V hacminin içinde neredeyse düzgün olduğu için, ve düzgün küresel bir yük dağılımının merkezinde yarattığı elektrik alan sıfır olduğundan, bu terim sıfırdır.

İkinci terime bakacak olursak,

$$-\vec{\nabla}^r \int_{\vec{r}''\in V(\vec{r})} d^3r'' \; \frac{\vec{E}(\vec{r}'')(\vec{r}-\vec{r}'')}{|\vec{r}-\vec{r}''|^3}$$

$$= +\vec{\nabla}^r \int_{\vec{\delta}\in V(\vec{0})} d^3\delta \; \frac{\vec{E}(\vec{r}+\vec{\delta})\cdot\vec{\delta}}{|\vec{\delta}|^3}$$

(üst indeks, neye göre türev alındığını gösterir)

burada $\vec{r}''=\vec{r}+\vec{\delta}$ değişken değişimini yaptık. bu ifadenin "i" bileşenini alırsak

$$= \partial_i^r \int_{\vec{\delta}\in V(0)} d^3\delta \; E_j(\vec{r}+\vec{\delta})\cdot \frac{\delta_j}{|\vec{\delta}|^3}$$

$$= \int d^3\delta \; \partial_i^r E_j(\vec{r}+\vec{\delta}) \frac{\delta_j}{|\vec{\delta}|^3}$$

$$= \int d^3\delta \; \partial_i^\delta E_j(\vec{r}+\vec{\delta}) \frac{\delta_j}{|\vec{\delta}|^3}$$

$$= \int d^3\delta \; \partial_i^\delta \left[E_j(\vec{r}+\vec{\delta}) \frac{\delta_j}{|\vec{\delta}|^3}\right] - \int d^3\delta \; E_j(\vec{r}+\vec{\delta}) \partial_i^\delta \frac{\delta_j}{|\vec{\delta}|^3}$$

$$= \int dS_i \; E_j(\vec{r}+\vec{\delta}) \frac{\delta_j}{|\vec{\delta}|^3} - \int d^3\delta \; E_j(\vec{r}+\vec{\delta}) \partial_i^\delta \frac{\delta_j}{|\vec{\delta}|^3}$$

Şimdi, $P'$ nin V hacmi içinde yaklaşık olarak sabit olduğunu kullanıp integralin dışına çıkarırsak

$$= P_j(\vec{r}+\vec{\delta}) \int dS_i \frac{\delta_j}{|\vec{\delta}|^3} - \int d^3\delta \, \partial_i^{\delta} \frac{\delta_j}{|\vec{\delta}|^3} P_j(\vec{r}) \quad (*)$$

elde ederiz. Birinci integral, integrali alınan ifade $\vec{\delta}'$ nın tek fonksiyonu olduğu ve integral simetrik bir alan üzerinden olduğu için sıfırdır. İkinci integral de $i \neq j$ için sıfır değerini alır. (simetrik bir hacimde tek bir fonksiyonun integraline indirgenebileceği için)

Dolayısıyla

$$\int d^3\delta \, \partial_i^{\delta} \frac{\delta_j}{|\vec{\delta}|^3} = \delta_{ij} A$$

olarak yazabiliriz (sağdaki $\delta_{ij}$, Kronecker Delta'dır. A'nın değerini bulmak için iki tarafı da $\delta_{ij}$ ile çarparsak

$$A \delta_{ij} \delta_{ij} = 3A = \int d^3\delta \, \partial_i^{\delta} \frac{\delta_j}{|\vec{\delta}|^3} = \int d^3\delta \, \vec{\nabla}^{\delta} \cdot \frac{\vec{\delta}}{|\vec{\delta}|^3}$$

$$= \int d^3\delta \left( +4\pi \delta^3(\vec{\delta}) \right) = +4\pi$$

dolayısıyla, $A = +\frac{4\pi}{3}$ olarak bulunur ve yukarıdaki (*) ifadesine yerleştirilir ise

$$= -\frac{4\pi}{3} P_j(\vec{r})$$

elde edilir.

Bu sonuçları toplarsak

$$-\vec{\nabla} \int_{\vec{r}'' \in V} d^3r'' \left[ \frac{\rho(\vec{r}'')}{|\vec{r}-\vec{r}''|} + \frac{\vec{P}(\vec{r}'')\cdot(\vec{r}-\vec{r}'')}{|\vec{r}-\vec{r}''|^3} \right] = -\frac{4\pi}{3}\vec{P}(\vec{r})$$

olarak bulunur. Dolayısıyla, $\vec{r}$ noktasındaki ortalama elektrik alanı

$$\vec{E}^*(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \int d^3r'' \left[ \frac{\rho(\vec{r}'')}{|\vec{r}-\vec{r}''|} + \frac{\vec{P}(\vec{r}'')\cdot(\vec{r}-\vec{r}'')}{|\vec{r}-\vec{r}''|^3} \right]$$

olarak yazılabilir. Buradaki integralde herhangi bir sınırlama yoktur.

Bu sonuçtan, ortalama elektrik alanının da

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}^*(\vec{r}) = 0$$

denklemini sağlaması gerektiğini görürüz. Çünkü ortalama (makroskopik) elektik alan da

$$\phi^*(\vec{r}) = \int d^3r'' \left[ \frac{\rho(\vec{r}'')}{|\vec{r}-\vec{r}''|} + \frac{\vec{P}(\vec{r}'')\cdot(\vec{r}-\vec{r}'')}{|\vec{r}-\vec{r}''|^3} \right]$$

olarak verilen bir potansiyelin gradyanı olarak yazılabilir:

$$\vec{E}^* = -\vec{\nabla}\phi^*$$