

Bundan sonra aksi belirtilmediği sürece ortalama elektrik alanı ile karşılaşacağız.

Bu yüzden \* işaretini kullanmayacağız.

Mikroskopik elektrik alanının hem  $\nabla \times \vec{E} = 0$  hem de  $\nabla \cdot \vec{E} = \text{usc}$  denklemlerini sağladığını biliyoruz. Makroskopik alanın  $\nabla \times \vec{E} = 0$  denklemini sağladığını gösterdik, şimdi

$$\nabla \cdot \vec{E} = ?$$

ifadesini hesaplayalım. Bunun için makroskopik alan için olan potansiyel ifadesine dönelim:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \int_V d^3r'' \left[ \frac{\rho(\vec{r}'')}{|\vec{r} - \vec{r}''|} + \vec{P}(\vec{r}'') \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}'')}{|\vec{r} - \vec{r}''|^3} \right] \\ &= \int_V d^3r'' \left[ \frac{\rho(\vec{r}'')}{|\vec{r} - \vec{r}''|} + \vec{P}(\vec{r}'') \cdot \vec{\nabla}'' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}''|} \right] \\ &= \int_V d^3r'' \left[ \frac{\rho(\vec{r}'')}{|\vec{r} - \vec{r}''|} - \frac{(\vec{\nabla}'' \cdot \vec{P}(\vec{r}''))}{|\vec{r} - \vec{r}''|} \right] + \int_{\partial V} d\vec{S} \frac{\vec{P}(\vec{r}'') \cdot \hat{n}(\vec{r}'')}{|\vec{r} - \vec{r}''|} (*) \end{aligned}$$

Bu ise hacimsel  $\rho(\vec{r}) - \nabla \cdot \vec{P}(\vec{r})$  yük yoğunluğu ile  $\vec{P}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r})$  yüzeysel yük ~~yoğunluğu~~ yoğunluğunun yarattığı potansiyeldir. Dönemin başındaki hesaplarımıza dönerseniz,  $\vec{E} = -\nabla \phi$  elektrostatik alanının hacim içinde  $\nabla \cdot \vec{E} = \text{usc}(\rho - \nabla \cdot \vec{P})$  (\*\*) denklemini sağladığını görürüz.

Polarizasyonu içeren kısmi sol tarafta taşırırsak

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} + 4\pi\vec{P}) = 4\pi\rho$$

elde ederiz. Burada  $\vec{E} + 4\pi\vec{P}$  ifadesi genelde  $\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi\vec{P}$  olarak tanımlanır ve "displacement" alanı olarak bilinir.

Not: 51. sayfadaki (\*) denkleminde  $V$  hacmi ~~alan~~ bütün yükleri ve polarizasyonu içine alan herhangi bir hacimdir.

Dolayısıyla bütün erren olarak da seçilebilir. Bu durumda  $\vec{P}$  matrisinin dışında sıfır olacaktır. Bu tercihi yaparsak, yüzeysel yük,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$  ifadesinde bir Dirac Delta olarak görünecektir (çünkü yüzeyin bir tarafında  $\vec{P} \neq 0$ , diğer tarafında  $\vec{P} = 0$ . Böylece yüzeyle dik türev, tam yüzey üzerinde bir Dirac Delta içerir)

Devam etmeden önce, polarizasyonun nasıl yaratıldığına ve niye yük gibi davranıldığına dönelim.

Çift kutup momentinin tanımına dönecek olursak

$$\vec{P} = \int d^3r \vec{r} \rho(\vec{r})$$

Burada, toplam yük yoğunluğunu pozitif ve negatif yüklerin yoğunlukları toplamı olarak yazabiliriz:

$$\rho(\vec{r}) = \rho_+(\vec{r}) + \rho_-(\vec{r})$$

Bilinen (gündelik hayatta) bütün maddeler "+" yüklü protonlar, "-" yüklü elektronlar ve yüksüz nötronlardan oluşur.

$\rho_+$  : protonların sayı yoğunluğu

$\rho_-$  : elektronların sayı yoğunluğu

$e = -e$  elektronların yükü

$e_+ = e$  protonların yükü

Yerine yerleştirir isek

$$\vec{P} = e N_p \frac{1}{N_p} \int d^3r \vec{r} \rho_+ - e N_e \frac{1}{N_e} \int d^3r \vec{r} \rho_-$$

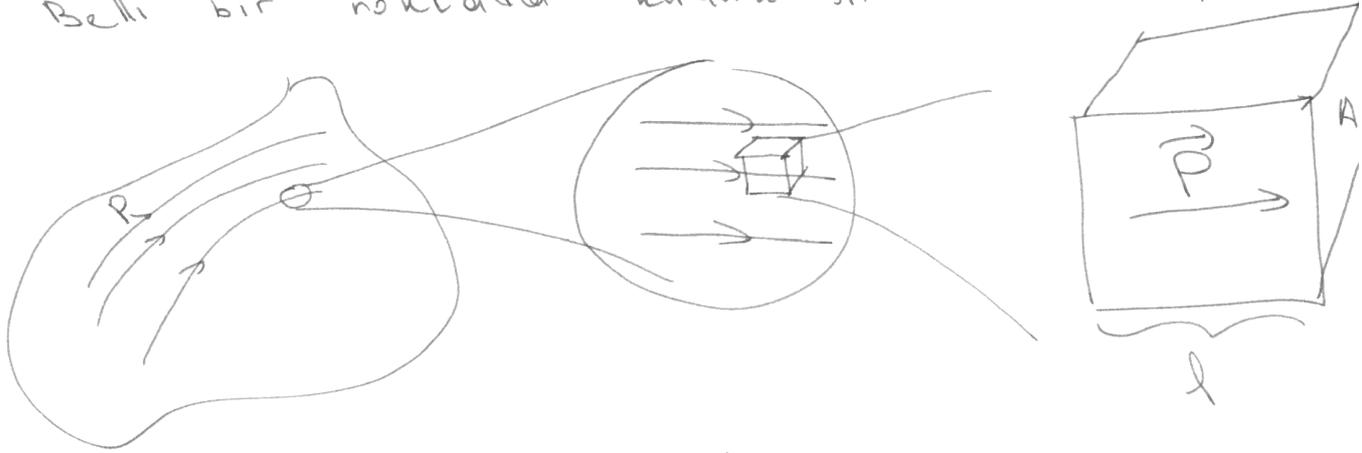
$$\vec{P} = e N_p \vec{r}_+ - e N_e \vec{r}_-$$

Burada yüklerin ortalama ~~yer~~ konumları,  $\vec{r}_+$  ve  $\vec{r}_-$  ve toplam sayıları ( $N_p$  ve  $N_e$ ) tanımlanmıştır. ~~Her~~ Net yükü sıfır olan bir bölgede,  $N_p = N_e = N$  olacağı için

$$\vec{P} = e N (\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$$

olarak bulunur. Bu da bize polarizasyonun, bir yük dağılımındaki pozitif yüklerin ortalama konumu ile negatif yüklerin ortalama konumu arasındaki farktan kaynaklanıyor, gösterir. Yani bir bölge polarize olduyorsa, o bölgedeki pozitif ve negatif yükler birbirlerine göre kaymışlardır.

Polarize olmuş bir malzeme düşünelim.  
Belli bir noktada küçük bir hacim alalım



Bu hacmin toplam polarizasyonu

$$|\Delta \vec{p}| = |\vec{P} \Delta V| = |\vec{P}| l A \quad (*)$$

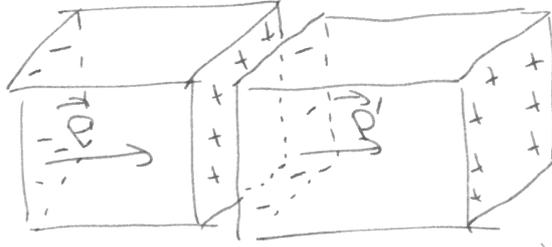
olarak verilir. Bu polarizasyonu polarizasyon yönüne dik olan yüzeyler yaratmış olarak düşünürsek

$$|\Delta \vec{p}| = (\sigma A) l$$

olarak buluruz ( $\sigma A$  yüzeylerdeki toplam yükür. dolayısıyla yüzey yükü

$\sigma = |\vec{P}|$  olarak bulunur (Buradaki yüzeyin  $\vec{P}$ 'ye dik olduğuna dikkat ediniz. eğer dik olmasaydı (\*) denkleminde yüzeye dik birlesenini kullanmamız gerekirdi)

bu hacme hemen bitişik hacmi de göz önüne alalım.



iki küp de  $\Delta V$  hacminde

Bu hacimler arasındaki boşluk yoktur, ancak gösterim kolaylığı için böyle gösterilmiştir. Küplerin sol yüzeylerinde "-" yük varmış gibi, sağ yüzeylerinde ise "+" yük varmış gibi davranır. Küplerin birbirlerine dedikleri yüzeydeki yüklerin toplamı:

$$\Delta Q = +PA + (-P'A) = (P - P')A$$

Eğer iki küpün de ortasından geçen ve kesit alanı tamamen kapsayan bir  $\Delta V$  hacmi düşünürsek, içindeki yük  $\Delta Q$  kadardır ve o bölgedeki yük yoğunluğu

$$\rho_p = \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{P - P'}{l} = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{l} = -\frac{\partial P}{\partial l}$$

çünkü  $l$  mesafede, polarizasyon  $P$ 'den  $P'$ 'ne değişmiştir. Bu  $l$ 'yönü polarizasyonun doğrultuğu yöndür. Eğer  $l$ 'ye dik iki Kartezyen koordinat daha seçersek,

$$\vec{P} = P \hat{l}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \frac{\partial P}{\partial l} \quad \text{yazabiliriz. Buradan da}$$

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

olarak çıkar.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi q$$

ifadesindeki  $q$ 'dan farklı olarak,

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

polarizasyondan kaynaklı yüklerdir  
(veya polarizasyonu yaratan yükler  
olarak da bakabiliriz)

Pek çok maddede, polarizasyon<sup>sadece</sup> dışardan  
uygulanan elektrik alanına bağlıdır ve  
hariç bir alan yoksa, polarizasyon  
da sıfırdır. Dolayısıyla polarizasyon  
yoğunluğunun "i" bileşenini Taylor  
dizisi olarak açarsak

$$P_i(\vec{E}) = a_i + b_{ij} E_j + \dots$$

$P_i(\vec{E}=0) = 0$  olması gerektiği için  $a_i = 0$   
olmalıdır. Yeterince düşük elektrik alanlarda,  
sonraki terimler ihmal edilebilir.

Genel olarak, cisim belli yönlerde polarize  
etmek diğer yönlerde polarize etmekten  
daha kolay olabilir. Böyle durumlarda,  
elektrik alanının "kolay yöndeki" bileşeni  
büyük bir polarizasyon vektörü bileşeni  
yaratırken "zor yöndeki" bileşeni küçük  
bir polarizasyon vektörü bileşeni yaratacaktır

Böyle eşyönlü durumlarda polarizasyon vektörü, elektrik alan vektörüyle aynı doğrultuda olmak zorunda değildir.

$E$  yönü malzemelerde ise  $\epsilon_{ij}$  sabitleri

$$\epsilon_{ij} = \chi \delta_{ij}$$

olarak yazılabilir ve

$$\vec{P} = \chi \vec{E}$$

dur.  $\chi$ , malzemenin dielektrik alınganlığı olarak bilinir.  $\vec{D}$  alanı

$$\vec{D} = \vec{E} + \vec{P} = (1 + \chi) \vec{E} \equiv \epsilon \vec{E}$$

olarak yazılabilir.  $\epsilon$ , dielektriğin elektriksel geçirgenliği olarak bilinir.

$\vec{E}$  ve  $\vec{D}$  alanlarının sağladığı denklemlerde yazarsak:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = 4\pi \rho$$

eğer, elektrik geçirgenliğinin düzgün olduğu bir bölgedeysek

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho$$

olarak yazabiliriz.

Şimdiye kadar polarizasyonu, moleküler özelliklerle ilişkilendirmeye çalışacağız.

Polarizasyonu

$$P(\vec{r}) = \frac{1}{V} \int_V d\vec{r}' \vec{r}' \rho(\vec{r}')$$

olarak tanımlenmişti. Burada  $V$  moleküler boyutlara oranla büyük ancak makroemin boyutlarına oranla küçük bir hacimdir.  $\rho(\vec{r})$  yük yoğunluğunu moleküllerin (atomların) yük yoğunlukları cinsinden

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{\text{mol}} \rho_{\text{mol}}(\vec{r})$$

olarak yazarsak

$$\vec{P}(\vec{r}) = \sum_{\text{mol}} \frac{1}{N_{\text{mol}}} \frac{1}{V} \int d\vec{r}' \vec{r}' \rho_{\text{mol}}(\vec{r}')$$

olarak yazabiliriz. Burada  $N_{\text{mol}}$ ,  $V$  hacmindeki molekül sayısıdır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \vec{P}(\vec{r}) &= \frac{N_{\text{mol}}}{V} \frac{1}{N_{\text{mol}}} \sum_{\text{mol}} \hat{P}_{\text{mol}} \\ &= n_{\text{mol}} \langle \hat{P}_{\text{mol}} \rangle \end{aligned}$$

Burada  $\langle \hat{P}_{\text{mol}} \rangle$  moleküllerin ortalaması polarizasyonu,  $n_{\text{mol}}$  ise moleküllerin sayı yoğunluğudur.

normal şartlarda moleküllerin ortalama ~~çift kutup~~ momentleri sıfırdır. (dışarıdan bir alan uygulanmadığı takdirde).

Dışarıdan bir elektrik alan uygulandığında, iki farklı mekanizmayla ~~elektrik~~ çift kutup momenti yaratılabilir:

- i) herhangi bir anda molekülün çift kutup momentki yoktur ( $O_2$ ,  $CO_2$  gibi), ancak uygulanan elektrik alanının etkisiyle çekirdek ve elektronlar zıt yönlerde kayarak bir polarizasyon yaratırlar
- ii) Molekülün çift kutup momentki vardır ( $H_2O$  gibi), ancak moleküller sürekli döndükleri ve herhangi bir anda farklı moleküllerin çift kutupları farklı yönlerde olduğu için ortalaması sıfırdır. Ancak harici bir elektrik alanı uygulandığında, çift kutuplar elektrik alana doğru dönerler.

Bunların her birini daha detaylı incelemeden önce, bir molekülü polarize eden alanın, bizim şimdiye kadar incelediğimiz ortalama alan değil, o noktadaki yerel alan olduğuna dikkat ediniz.

Yerel  $\vec{E}_{\text{yer.}}$  elektrik alanını şöyle hesaplayacağız:  
 öncelikle molekülün etrafındaki bir  $V$   
 hacmindeki maddeleri çıkaralım.  
 Madde polarize ise, çıkarılan boşluğun  
 yüzeyinde, yüzey yükleri vardır. moleküle etki  
 eden toplam elektrik alan

$$\vec{E}_{\text{yer.}} = \vec{E} + \vec{E}_{\sigma} + \vec{E}_{\text{ic}}$$

olarak ayırabiliriz.  $\vec{E}$  o maddedeki ortalama  
 alan,  $\vec{E}_{\sigma}$ , çıkarılan yüzeyin iç kısımlarının  
 yarattığı elektrik alan,  $\vec{E}_{\text{ic}}$  ise çıkarılan  
 hacmin içindeki yükleri yarattığı elektrik  
 alanıdır. Bunları teker teker hesaplayalım:

Öncelikle  $\vec{E}_{\sigma}$ 'den başlayalım.  $\vec{P}$  polarizasyonunun  
 yaratacağı yük dağılımı

$$\sigma = \vec{P} \cdot \hat{n} = \vec{P} \cdot (-\hat{r}) = (-\vec{P}) \cdot \hat{r}$$

İkinci eşitlikte,  $\hat{n} = -\hat{r}$  olduğunu  
 kullandık bunun sebebi, ~~yüze~~ ~~hacmin~~  
 "dışarı"nın, olduğumuz kovuk olması, dolayısıyla  $\hat{n}$ 'in  
 olduğumuz hacmin ~~dışına~~ <sup>merkezine</sup> doğru olması.

(61)

Şimdi, bu yük dağılımının yaratacağı elektrik alanını hesaplayalım:



$$d\Phi = -\vec{P} \cdot \hat{n} = -P \cos\theta$$

$$\vec{E}_\sigma = \int dS \sigma \frac{(\vec{0} - \vec{r})}{|\vec{0} - \vec{r}|^3}$$

$$= \int R^2 d\theta d(\cos\theta) (-P \cos\theta) \frac{(-\vec{r})}{|\vec{r}|^3}$$

$$= +2\pi R^2 \int d(\cos\theta) P \cos\theta \frac{(\vec{r})}{R^3}$$

Yük dağılımının simetrisinden dolayı, sadece ~~Due to sym~~

$(\vec{E}_\sigma)_z$  bileşeni sıfırdan farklıdır.

$$\vec{E}_\sigma(\vec{0}) = +\frac{2\pi P}{R} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \cos\theta R \cos\theta \hat{z}$$

$$= +2\pi P \frac{\cos^3\theta}{3} \Big|_{\cos\theta=-1}^1$$

$$= +\frac{4\pi}{3} P \hat{z}$$

$$\vec{E}_\sigma = \frac{4\pi}{3} \vec{P}$$

Şimdi  $\vec{E}_{ia}$ 'i hesaplayalım. Herhangi bir molekülün dipol momentini  $\vec{p}_{mol}$  ile gösterirsek, yaratacağı elektrik alanı daha önce hesaplamıştık

$$\vec{E}_{ia} = \frac{3(\vec{p}_{mol} \cdot \vec{r})\vec{r} - p r^2}{r^5}$$

Uygulanan alan z yönünde olduğu için,  $\vec{p}_{mol}$ 'de z yönünde olacaktır:

$$\vec{p}_{mol} = p \hat{z}$$

Bütün moleküllerin yaratacağı toplam elektrik alan

$$\vec{E}_{ia} = \sum_{mol} \frac{3(p z_{mol})\vec{r}_{mol} - p r_{mol}^2 \hat{z}}{r_{mol}^5}$$

malzeme ortalama olarak düzgün ise (x, y, z) noktasında bir molekül var ise (-x, -y, z) noktasında da bir molekül olacaktır. Bu ikisinin katkısını topladığımızda x, y ve ~~z~~ noktada bileşenleri birbirini götürülecektir. ~~Şa~~  $\vec{E}_{ia}$ 'in sadece z bileşeni kalacaktır.

Dolayısıyla

$$\vec{E}_{ia} = \sum_{mol} \frac{3p z_{mol}^2 \hat{z} - p r_{mol}^2 \hat{z}}{r_{mol}^5}$$

$$= \sum_{mol} \left( 3z_{mol}^2 - r_{mol}^2 \right) \frac{\hat{z}}{r_{mol}^5}$$

Yine, yeterince düzgün bir maddede, moleküllerin konumu için x, y ve z yönleri özdeşdir. Dolayısıyla

$$\sum_{mol} \frac{x_{mol}^2}{r_{mol}^5} = \sum_{mol} \frac{y_{mol}^2}{r_{mol}^5} = \sum_{mol} \frac{z_{mol}^2}{r_{mol}^5}$$

olmasını bekleriz. Buradan da

$$\vec{E}_{ca} = 0$$

olarak buluruz. Sonuç olarak

$$\vec{E}_{yer} = \vec{E} + \frac{4\pi}{3} \vec{P}$$

elde ederiz.

Molekülün polarize edilebilirliğini (elektriksel alınganlığını)  $\gamma_M$  ile gösterirsek

$$\begin{aligned} \vec{P}(\vec{r}) &= n_{mol} \langle \vec{P}_{mol} \rangle \\ &= n_{mol} \gamma_M \vec{E}_{yer} \\ &= n_{mol} \gamma_M \left( \vec{E} + \frac{4\pi}{3} \vec{P} \right) \end{aligned}$$

$$\left( 1 - \frac{4\pi}{3} n_{mol} \gamma_M \right) \vec{P} = n_{mol} \gamma_M \vec{E}$$

elde ederiz. Dolayısıyla

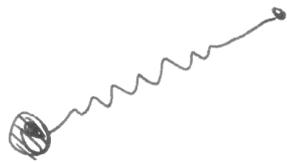
$$\chi = \frac{n_{mol} \gamma_M}{1 - \frac{4\pi}{3} n_{mol} \gamma_M}$$

olarak buluruz.

Böylece malzemenin alinganlığı, moleküllerin polarize edilebilirliği açısından ifade etmiş olduk. moleküllerin iki türlü polarize edilebilirliğinden bahsetmiştik. Şimdi bunları hesaplamak için bir model inceleyeceğiz.

i) Önce atomdaki yüklerin elektrik alanında kaymalarından kaynaklı polarizasyonlarına bakalım. Pek çok malzemede, çekirdekler yerlerini fazla değiştiremezler, ancak elektronlar kolayca hareket edebilir.

Basit bir modelde, elektronu bir yayla çekirdeğe bağlanmış olarak düşünebiliriz:



Elektrik alanı uygulandığında, bu elektronun sağladığı hareket denklemi

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\omega_0^2\vec{r} - e\vec{E}$$

olarak yazılabilir. Bu denklemin çözümü

$$\vec{r} = \vec{r}_0 e^{i\omega_0 t} - \frac{e}{m\omega_0^2}\vec{E}$$

olarak bulunur.

ortalama polarizasyonun tanımından

$$\vec{p} = \langle (-e)\vec{r} \rangle = \frac{e^2}{m\omega_0^2} \vec{E}$$

elde edilir. Dolayısıyla tek bir elektronun molekülün alınganlığına katkısı

$$\chi_i = \frac{e_i^2}{m_i \omega_0^2}$$

olarak bulunur. Bütün elektronlar üzerinden toplarsak, molekülün polarize edilebilirliğini

$$\chi_M = \sum_i \frac{e_i^2}{m_i \omega_0^2}$$

olarak hesaplayabiliriz.

ii) Yönelimden kaynaklı polarizasyon.

Molekülün kendi sabit polarizasyonu varsa, harici bir elektrik alanındaki enerjisi

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

olarak hesaplanabilir. Fiziksel bütün sistemler, enerjilerinin en düşük seviyeye getirecek şekilde davranırlar. Dolayısıyla, bir elektrik alanında, bütün dipollerin elektrik alanı ile aynı doğrultuda olmalarını beklerdik. ancak sıcaklıktan dolayı, rastgele termal hareketler bunun olmasını engeller.

Termal fizik, bize T sıcaklığındaki bir sistemin  $\epsilon$  enerjisinde bulunma olasılığının  $\exp(-\frac{\epsilon}{k_B T})$  olduğunu söyler.

Burada  $k_B$  Boltzmann sabiti olarak bilinir.

Dolayısıyla, sistemin polarizasyonunun  $\hat{n}$  birim vektörü yönünde olma olasılığı, yani  $\vec{p} = p_0 \hat{n}$  olma olasılığı,  $\exp\left\{\frac{p_0 E \cos\theta}{k_B T}\right\}$

ile orantılıdır. Burada  $p_0$  sistemin <sup>çift kutup</sup> momentinin büyüklüğü,  $\theta$  açısı ise <sup>tipik</sup> çift kutup momenti ile elektrik alanı arasındaki açıdır.

~~Üstel~~ Üsteldeki ifadenin tipik büyüklüklerini hesaplamak için şu değerleri kullanabiliriz:

$$p_0 \sim e d \sim 10^{-10} \text{ em} \quad (\text{d'yi yaklaşık atomik boyut olarak aldık})$$

$$\frac{1}{k_B T} \sim \frac{1}{40 \text{ eV}} \quad (\text{oda sıcaklığında})$$

$$E \sim 10^6 \text{ V m}^{-1}$$

Bu durumda

$$\frac{p_0 E}{k_B T} \sim \frac{(10^{-10} \text{ em})(10^6 \text{ V m}^{-1})}{40 \text{ eV}} = 40 \times 10^{-4} = 4 \times 10^{-3} \ll 1$$

Dolayısıyla, tipik bir durumda  $\frac{p_0 E}{k_B T} \ll 1$

olacaktır.  $\langle \vec{p} \rangle$  ifadesini hesaplamak istersek

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{\int d\Omega \vec{p} \exp\left\{\frac{p_0 E}{k_B T} \cos\theta\right\}}{\int d\Omega \exp\left\{\frac{p_0 E}{k_B T} \cos\theta\right\}}$$

Yazabiliriz. Problemin simetrisinden dolayı, sadece Elektrik alanı yönündeki polarizasyonun bileşeni katkı verecektir. Bu yönü  $\hat{z}$  yönü olarak seçersek

$$\langle \vec{p} \rangle = \langle p \rangle \hat{z} = p_0 \hat{z} \langle \cos \theta \rangle$$

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{\int_{-1}^1 d(\cos \theta) \cos \theta \exp\left\{\frac{p_0 E}{k_B T} \cos \theta\right\}}{\int_{-1}^1 d(\cos \theta) \exp\left\{\frac{p_0 E}{k_B T} \cos \theta\right\}}$$

$\frac{p_0 E}{k_B T}$ 'nin birden çok küçük olduğunu

kullanıp, Taylor açılımı yaparsak, integralleri hesapladığımızda

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{\frac{p_0 E}{k_B T} \frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3} \frac{p_0 E}{k_B T}$$

buluruz. Buradan da ortalama polarizasyon

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{p_0^2 E}{3k_B T} \hat{z} \Rightarrow \langle \vec{p} \rangle = \frac{p_0^2}{3k_B T} \vec{E}$$

olarak bulunur.

Bu iki sonucu toplarsak, molekülün polarize edilebilirliği (alınanlığı)

$$\chi_M = \sum_i \frac{\epsilon_i^2}{m_i \omega_i^2} + \frac{p_0^2}{3k_B T}$$

olarak bulunulur.

Fiziksel olarak ilgileneceğimiz sistemlerin hepsi, sonlu bir malzemenin içine konmuş yüklerle ilgili olacaktır. Dolayısıyla elektrik alanın malzemenin sınırının bir tarafından diğer tarafına nasıl değiştiğini bilmemiz lazım. Bunun için ilgili denklemlere bakalım:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho \quad (i)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (ii)$$

Birinci denklem, ~~hava~~ boşluktaki elektrik alanının sağladığı denkleme,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$ , benzer. Boşluktaki elektrik alanının, bir yüzeyde nasıl değiştiğini incelediğimiz örneğe benzer yöntemle, buradan da  $\vec{D}$  alanının yüzeye dik bileşenindeki süreksizliğin

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma$$

olduğunu buluruz. Buradaki  $\sigma$  serbest yüklerin (polarizasyondan kaynaklı yüklerin değil) yüzey yoğunluğudur.

(ii). denklem de bize, önceden olduğu gibi,  $\vec{E}$  alanının yüzeye paralel bileşeninin süreksiz olmadığını söyler

$$\vec{E}_{1\parallel} = \vec{E}_{2\parallel}$$

İki doğrusal dielektrik malzemenin temas ettiği noktayı düşünelim.

Dielektrik sabitleri  $\epsilon_1$  ve  $\epsilon_2$  olsun.



Yüzeyde yük olmayacağından dolayı, yüzeyde  $\vec{D}$  alanının dik bileşeni ile  $\vec{E}$  alanının yatay bileşenleri sürekli olacaktır. Doğrusal bir dielektrik olduğundan dolayı  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  alırsak

$$\epsilon_1 E_{1\perp} = \epsilon_2 E_{2\perp}$$

ve

$$E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$$

olarak yazabiliriz. İki taraftaki elektrik alanlarının şiddetlerini  $E_1$  ve  $E_2$  ile, yüzeye dik doğrultu ile yaptıkları açıyı da  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  ile gösterirsek

$$\epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2$$

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$$

elde ederiz. Taraftan tarafta böldüğümüzde iki bölgede yüzeye dik doğrultuyla yaptığı açıların ~~itaj~~ itajı

$$\frac{\tan \theta_1}{\epsilon_1} = \frac{\tan \theta_2}{\epsilon_2}$$

denklemini sağladığını görürüz.  
 Bu denklemden, eğer elektrik alan, dielektrik sabiti büyük olan bir bölgeye geçerse, <sup>( $\epsilon_1 > \epsilon_2$ )</sup> dik doğrultuyla yaptığı açı artacağını çıkarabiliriz.

İletkenleri, sonsuz dielektrik sabitine sahip ortamlar olarak düşünebiliriz.

$\epsilon_1 \rightarrow \infty$  alırsak, bu denklemden  $\theta_2 = 0$  olması gerektiğini çıkarabiliriz.

Bu da bize metallerin yüzeyindeki elektrik alanın yüzeye dik olması gerektiğini söyler.

Ayrıca, bu limitte

$$\epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2 = \epsilon_2 E_2$$

denkleminin anlamlı olabilmesi için

$$E_1 \cos \theta_1 = 0 \text{ olmalıdır.}$$

Diğer denklemden  $E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2 = 0$  olmasını gerektirdiğinden, bu iki denklemin tek çözümü

$$E_1 = 0 \text{ 'dır.}$$

Dolayısıyla buradan da bir metalin içindeki elektrik alanın sıfır olması gerektiği çıkarılabilir.