Elektromanyetik alanla ilgili bildiklerimizi toparlarsak:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

olarak yazılabilen Maxwell denklemleri. Bunlara ek olarak, bir ortamdaki $\vec{D}, \vec{E}, \vec{B}, \vec{H}$, alanları ve $\vec{M}$ mıknatıslanma ve $\vec{P}$ kutuplaşma alanları arasındaki bağıntılar:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$$

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$$

Bu denklemleri ayrıca $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ ve $\vec{B} = \mu\vec{H}$ olarak da yazabiliriz. Burada ε ve μ genel olarak elektromanyetik alana bağlı tensörlerdir. ancak eşyönlü malzemelerde ve küçük alanlarda sabit olarak alınabilirler.

Belli bir ortamdaki yüklere etki eden kuvvet yoğunluğunu ise

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{J}\times\vec{B} = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{J}\times\vec{B}$$

olarak yazabiliriz. Bu denklem aynı zamanda mekanik ile elektromanyetik arasındaki bağıntıyı da oluşturur.

Bunlara ek olarak, Ohm yasasını da

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \quad .$$

olarak yazabiliriz. Burada ~~özellikle~~ σ ~~ma~~ iletkenin iletkenliğidir.

Örnek

Ohm yasasının basit bir uygulaması olarak, L uzunluğunda A kesit alanına sahip bir iletken silindir parçası düşünelim. Bu silindirin içinde $\vec{J}$ akımı $\vec{E}$ düzgün elektrik alanı etkisinde akıyor olsun.

L uzunluk boyunca potansiyel fark

$$\Delta\phi = L|\vec{E}|$$

olarak yazılabilir. Silindirden geçen toplam akım ise $\vec{I} = A|\vec{J}| = A\sigma|\vec{E}|$

olarak yazılabilir. İki ifadeyi taraf tarafa bölecek olur isek

$$\frac{\Delta\phi}{I} = \frac{L|\vec{E}|}{A\sigma|\vec{E}|} = \frac{L}{A\sigma} \equiv R$$

$$\Rightarrow \Delta\phi = IR$$

şeklinde de Ohm yasasını yazabiliriz. Bunada R silindirin direncidir.

~~Bundan sonra~~ Buraya kadar mümkün olduğunca gözlemsel verilere dayanarak ~~sf~~ sayfa 121'deki denklemleri elde ettik. Bundan sonra, sayfa 121'deki denklemleri kabul ederek, bu denklemlerin sonuçlarını elde etmeye çalışacağız.

Enerjinin korunumu

Daha önce elektrostatik ve manyetostatikte enerji yoğunluklarını sırasıyla

$$w_e = \frac{1}{8\pi} \vec{E} \cdot \vec{D} \quad \text{ve} \quad w_m = \frac{1}{8\pi} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

olarak elde etmiştik. Şimdi maxwell denklemlerinden yola çıkarak toplam enerjinin zamanla değişimini bulmaya çalışacağız. Zamana göre değişimleri içeren denklemleri yazarsak:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Birinci denklemi $\vec{E}$ ile ve ikinci denklemi $\vec{H}$ ile çarpıp taraf tarafa çıkarırsak

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{E} \cdot \vec{J} + \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H}$$

$$\Rightarrow \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \frac{4\pi}{c} \vec{E} \cdot \vec{J} + \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Sol tarafın bileşenleri cinsinden ~~bakacak~~ yazacak olursak

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

$$= E_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} H_k - H_k \varepsilon_{kji} \frac{\partial}{\partial x_j} E_i$$

$$= \varepsilon_{ijk} \left(E_i \frac{\partial H_k}{\partial x_j} + H_k \frac{\partial E_i}{\partial x_j} \right)$$

$$= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (E_i H_k)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{H} \times \vec{E})_i = \vec{\nabla} \cdot (\vec{H} \times \vec{E})$$

Böylece $\vec{\nabla}\cdot(\vec{H}\times\vec{E}) = \frac{4\pi}{c}\vec{E}\cdot\vec{J} + \frac{1}{c}\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \frac{1}{c}\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ ve $\vec{B} = \mu\vec{H}$ olduğunu varsayarsak,

$$\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial(\vec{E}\cdot\vec{D})}{\partial t} \quad \text{ve} \quad \vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right)$$

elde ederiz. Buradan

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{H}\times\vec{E}) = \frac{4\pi}{c}\vec{E}\cdot\vec{J} + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}(w_e + w_m)$$

yazabiliriz. Bu ifadeyi belli bir V hacmi üzerinden integraller isek

$$\frac{4\pi}{c}\frac{d}{dt}\int_V (w_e + w_m)\,d^3r + \frac{4\pi}{c}\int_V \vec{E}\cdot\vec{J}\,d^3r = \oint_{\partial V}(\vec{H}\times\vec{E})\cdot d\vec{S}$$

veya

$$\frac{d}{dt}\int_V (w_e + w_m)\,d^3r = -\int_V \vec{E}\cdot\vec{J}\,d^3r - \frac{c}{4\pi}\oint(\vec{E}\times\vec{H})\cdot d\vec{S}$$

elde ederiz. Buradaki soldaki ifade elektromanyetik alandaki belli bir hacımdeki toplam enerjini zamanla nasıl azaldığının ifadesidir. Sağdaki ilk ifadeyi

$$\vec{E}\cdot\vec{J} = \rho\vec{E}\cdot\vec{v} = \rho\,\vec{E}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{(\rho\vec{E})\cdot d\vec{x}}{dt}$$

olarak yazarsak, bu ifadenin birim zamanda elektrik alanının yükler üzerine yaptığı iş olduğunu görürüz. Son terim ise biriz zamanda V hacminin yüzeyinden kaçan enerji olarak yorumlanabilir.

Eğer V hacmini bütün uzay olarak düşünürsek, bu yüzey integrali sıfır olacağından buradan enerjinin korunduğu çıkar: elektromanyetik alanın enerjisindeki azalma yükler üzerine yapılan mekanik işe, dolayısıyla enerjilerindeki artışa eşittir. Dolayısıyla elektromanyetik alanın enerjisi artı yüklerin mekanik enerjisi korunur.

~~Momen~~ $$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H}$$

vektörü Poynting vektörü olarak bilinir ve enerji akışını belirler.

Momentum korunumu

Belli bir bölgede elektrik yükleri ve elektromanyetik alan düşünelim. Yüklere etki eden toplam kuvvet

$$\vec{F} = \int\left(\rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B}\right)d^3r$$

olarak yazılabilir. Newton yasalarından, bu kuvvet, ~~sistemin~~ yüklerin momentumunun, $\vec{P}_{mekanik}$, zamanla değişimine de eşittir.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}_{mek}}{dt}$$

Maxwell denklemlerini kullanarak, kuvvet içadesindeki yük ve akım yoğunluklarından kurtulabiliriz:

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$$
$$\vec{J} = \frac{c}{4\pi} \left(\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

Yerine yerleştirirsek

$$\frac{d\vec{P}_{mek}}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int d^3r \left[\vec{E} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) + \left[(\vec{\nabla} \times \vec{H}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] \times \vec{B} \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int d^3r \left[\vec{E} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) + (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B} \right]$$

Zamana göre türevlerin tamamını sola toplamak için son terimi bir çarpımın türevi haline getirip, yeni gelen terimde de Maxwell denklemlerini kullanırsak

$$= \frac{1}{4\pi} \int d^3r \left[\vec{E} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) + (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \times \vec{B}) + \frac{1}{c} \vec{D} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right]$$

$$= \frac{-1}{4\pi c} \frac{d}{dt} \int d^3r \, \vec{D} \times \vec{B} + \frac{1}{4\pi} \int d^3r \left[\vec{E} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) + (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \times \vec{B} - \vec{D} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right]$$

elde ederiz.

Buradan

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{P}_{mek} + \int d^3r \, \frac{\vec{D}\times\vec{B}}{4\pi c}\right] = \frac{1}{4\pi}\int d^3r \left[\vec{E}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}) + (\vec{\nabla}\times\vec{H})\times\vec{B} \cancel{-\vec{D}\times\vec{E}} + (\vec{\nabla}\times\vec{E})\times\vec{D}\right]$$

olarak elde ederiz.

Hesapları kolaylaştırmak için, bu denkleme boşlukta inceleyelim:

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{P}_{mek} + \frac{1}{4\pi c}\int d^3r \, \vec{E}\times\vec{B}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int d^3r \left[(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E} + (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\vec{B} + (\vec{\nabla}\times\vec{E})\times\vec{E} + (\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B}\right]$$

Elektrik ve manyetik alanlar arasında bir simetri sağlanması için sağ tarafa

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\,\vec{B} = 0$$

eklenmiştir.

Denklemin sol tarafındaki ikinci terimi

$$\frac{1}{4\pi c}\int d^3r \, (\vec{E}\times\vec{B}) = \int d^3r \, \frac{\vec{S}}{c^2}$$

elektromanyetik alanın momentumu olarak ~~yazabi~~ yorumlayabiliriz. Sağ taraftaki ifadeye gelirsek, bu ifadeyi de bir yüzey integrali olarak yazabiliriz. Bunu görmek için bu ifadenin "i" bileşenine bakalım:

$$\left[(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E} + (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\vec{B} + (\vec{\nabla}\times\vec{E})\times\vec{E} + (\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B}\right]_i$$

$$= \frac{\partial E_j}{\partial x_j} E_i + \frac{\partial B_j}{\partial x_j} B_i + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}\frac{\partial E_m}{\partial x_l} E_k + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}\frac{\partial B_m}{\partial x_l} B_k$$

$$= \frac{\partial E_j}{\partial x_j} E_i + \frac{\partial B_j}{\partial x_j} B_i + \left(-\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}\right)\frac{\partial E_m}{\partial x_l} E_k$$

$$+ \left(-\delta_{il}\delta_{kn} + \delta_{in}\delta_{kl}\right)\frac{\partial B_n}{\partial x_l} B_k$$

$$= \frac{\partial E_j}{\partial x_j} E_i + \frac{\partial E_i}{\partial x_k} E_k - \frac{\partial E_k}{\partial x_i} E_k$$

$$+ \frac{\partial B_j}{\partial x_j} B_i + \frac{\partial B_i}{\partial x_k} B_k - \frac{\partial B_k}{\partial x_i} B_k$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\left[E_i E_j - \frac{\delta_{ij}}{2} E_k^2 + B_i B_j - \frac{\delta_{ij}}{2} B_k B_k\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}$$

Burada $T_{ij} = E_i E_j + B_i B_j - \frac{\delta_{ij}}{2}\left(E_k^2 + B_k^2\right)$

olarak tanımlandı.

Böylece

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{P}_{mek} + \int d^3r \frac{\vec{S}}{c^2}\right]_i = \int d^3r \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \oint dS_j T_{ij}$$

son yüzey integralindeki dS_j, yüzey elemanının "j" bileşenidir.

Sol taraf yüklerin ve elektromanyetik alanın toplam momentumlarının değişim hızıdır, sağ taraf ise incelenen hacmin yüzeyinden kaçan momentum olarak ~~düşünü~~ yorumlanabilir.

eğer hacim integrallerini yine bütün uzay üzerinden alacak olursak, yüzey integrali katkı vermez ve

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_{mek} + \vec{P}_{e.m.}\right) = 0$$

buluruz; buradan $\vec{P}_{em} = \int d^3r \, \frac{\vec{S}}{c^2}$ olmak üzere.
Böylece toplam momentumun, elektromanyetik alan ve yüklerin momentumlarının toplamı, korunduğunu görmüş oluruz.

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left(E_i E_j + B_i B_j\right) - \delta_{ij}\left(w_e + w_m\right)$$

tanımlanan tensör "Maxwell stress tensörü" olarak bilinir.

$$\oint_{\partial V} ds_j \, T_{ij}$$

ifadesinin V hacmindeki toplam momentumun "i" bileşeninin yüzeyden kaçma hızını belirlediğini söylemiştik. Dolayısıyla T_{ij}'yi momentumun i' bileşeninin birim yüzeyde J yönünde kaçmasını tasvir eder.
Dolayısıyla, herhangi bir $\Delta\vec{a} = \Delta a \, \hat{n}$ yüzeyi düşünürsek, bu yüzeyden bu yüzeye dik birim zamanda geçen toplam momentum

$$T_{ij} \, n_i \, n_j \, \Delta a$$

olarak yazılabilir. Eğer bu yüzeyde elektromanyetik dalgaları emen bir madde varsa, birim yüzey başına yüzeye dik birim zamanda emilen momentum, yani basınç

$$P = T_{ij} \, n_i \, n_j$$ olarak yazılabilir.

Bu basınç, mesela, kuyruklu yıldızların kuyruklarından sorumludur. Bu kuyruk sürekli güneşten uzağa doğrudur. Ayrıca gelecekte bu basınçtan faydalanan yelkenler ile güneş sisteminde seyahat edilmesi, en azından uydular yollanması, planlanmaktadır.

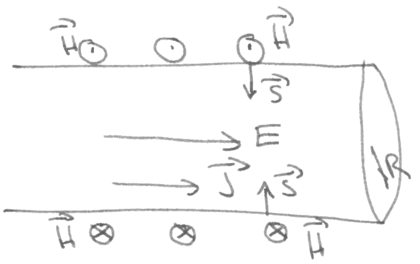
Örnek

Yine L uzunluğunda A kesit alanına sahip, iletkenliği σ olan bir silindir düşünelim. Bu silindirde Joule ısınmasından dolayı kaybolan ~~kuvvet~~ güç

$$I^2R = (Aj)^2\frac{L}{A\sigma} = \frac{Aj^2L}{\sigma}$$

veya birim uzunluk başına kayıp güç $j^2\frac{A}{\sigma}$

olarak bulunur. Şimdi bu kayıp gücün nereden geldiğini hesaplayalım:



Yüzeyindeki $\vec H$ alanı silindirin etrafına dolanır. Dolayısıyla $\vec S = \frac{c}{4\pi}\vec E\times\vec H$

vektörü silindirin içine doğrudur.

$$|\vec S| = \frac{c}{4\pi}EH = \text{sabit}$$

Dolayısıyla

$$\int_{\substack{\text{yan}\\ \text{yüzey}}} \vec S\cdot d\vec a = \frac{c}{4\pi}EH(2\pi R)L = \frac{c}{4\pi}EL\oint\vec H\cdot d\vec l$$

$$= \frac{c}{4\pi}EL\frac{4\pi}{c}I$$

$$= \left(\frac{J}{\sigma}\right)(JA)L = \frac{J^2A}{\sigma}$$

Dolayısıyla Joule ısınması ile kaybedilen enerji, Poynting vektörü ile silindirin içine aktarılan ısıdır.

Elektrik Devreleri

Pek çok elektrik devresi, devreye güç sağlayan bir batarya, ~~direnç~~ direnç, kapasitör ve indüktörden oluşur.

Batarya: iki ucu arasında sabit Φ potansiyel farkı yaratır. Akım "−" ucundan bataryaya girip "+" ucundan çıkar.
Eğer bataryadan I akımı geçiyorsa, bataryanın gücü, yani birim zamanda yaptığı iş
$P = \Phi I$
olur.

Direnç Joule ısınması ile enerji kaybına yol açar.
kayıp olan güç $P = I^2 R$
olarak yazılabilir. Daha önce de gösterildiği gibi, bu güç, dirence, batarya tarafından yaratılan elektromanyetik alanla taşınır.

Kapasitör: En basit örneği iki paralel plakadır. Plakalar arasındaki ~~enerji~~ elektrik alan enerji depolar. Bu enerjiyi
$$W = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$
olarak yazılabilir.

<u>indüktör</u> en basit örneği bir selenoiddir. L uzunluğunda, N sarım içeren bir selenoid düşünelim. Bu selenoidin içinde yarattığı manyetik alan düzgün ve şiddeti

$$B = \frac{4\pi}{c} n I$$

kadardır. Burada $n = \frac{N}{L}$ sarım yoğunluğudur.

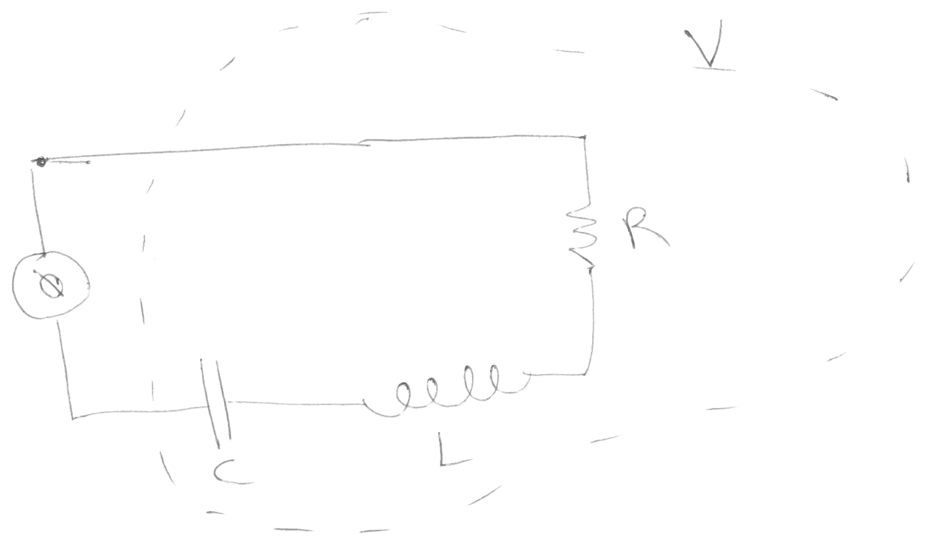
Dolayısıyla selenoidde depolanan toplam manyetik alanın enerjisi

$$W = V \frac{1}{8\pi} B^2 = \frac{1}{2} L I^2$$

Burada $L = \cancel{2} \frac{V}{4\pi 8\pi} \left(\frac{4\pi}{c} n \right)^2 = \frac{4\pi n}{c^2} V$

olarak tanımlanmıştır.

Bu elemanların hepsinin bulunduğu bir devre düşünelim:



burada V hacmi, batarya dışındaki bütün ~~hacı~~ devre elemanlarını kapsasın.

Bu durumda, belli bir anda V hacmi içindeki toplam elektromanyetik enerji

$$W = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2} L I^2$$

olacaktır. Bu enerjinin zamanla değişimi

$$\frac{dW}{dt} = \frac{Q}{C}\dot{Q} + L I \dot{I}$$
$$= \frac{1}{C} I \int_{t_0}^{t} I(t')\,dt' + L I \dot{I}$$

olacaktır. ~~Burada şöyle bir varsayımda~~ ~~bu~~ Akımın tel boyunca aynı değere sabit olduğunu varsaydık. Bu akımın zamanla değişimi yeterince yavaşça, doğru bir yaklaşıklıktır. İleride ayrıca akım yoğunluğunun

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}(\vec{r})\,g(t)$$

olarak yazılabileceğini de kullanacağız. Bu durumda herhangi bir kapalı ~~eğri~~ yüzey üzerinden

$$\oint \vec{j}\,d\vec{a} = 0$$

olduğundan, $\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$'dır. Böyle sistemlere "sanki statik" sistemler diyeceğiz.

Elektromanyetik alandaki enerjinin ~~azalması,~~ değişimi Joule ısınmasından ve sisteme aktarılan enerjiden kaynaklanır. Eğer V hacminin yüzeyini devre elemanlarından uzak seçersek, bu durumda ~~elekt~~ yüzeyde elektrik ve manyetik alan olmayacaktır ve dolayısıyla

Poynting vektörü sıfır olacaktır. Yüzeyden geçen enerji sadece bataryadan sağlanan enerji olacaktır. Bu iki kaynağı da göz önüne alırsak

$$\frac{dW}{dt} = -I^2 R + \Phi(t) I$$

olur. Buradan

$$\frac{1}{C} I \int_{t_0}^{t} I(t')dt' + L I \dot{I} = -I^2 R + \Phi(t) I$$

iki tarafı I ile bölüp, t'ye göre türev alırsak,

$$\boxed{\frac{1}{C} I(t) + L \ddot{I} + \dot{I} R = \dot{\Phi}(t)}$$

elde ederiz.

Bu denklemin bazı özel durumlarda çözümünü incelemeden önce, bu yaptığımız çıkarımları biraz daha genelleştirelim.

Tek bir devre yerine, birden fazla devreden oluşan bir gurup düşünelim ~~(tek bir devrenin farklı parçaları da olabilir)~~. Her bir devreden geçen akım I_k olsun. Bu devrenin kapsadığı alandan geçen toplam manyetik akı Φ_k olarak gösterilsin. ~~Devreye etki eden~~

~~bir~~

Devrenin alanını a_k ile gösterirsek

$$\Phi_k = \int_{a_k} \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

$$= \int_{a_k} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{a} = \int_{\partial a_k} \vec{A} \cdot d\vec{s}_k$$

$\vec{A}$ vektör potansiyeli için, daha önceden bulduğumuz

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

sonucunu, bir gurup telden akan akım için genelleştirirsek,

$$\Phi_k = \sum_i \oint_{\partial a_k} \frac{1}{c} \int \frac{d\vec{s}_k \cdot \sum I_i \, d\vec{s}_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}$$

$$= \frac{1}{c} \sum_i \left(\oint\oint \frac{d\vec{s}_i \cdot d\vec{s}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \right) I_i$$

$$= \sum_i c L_{ki} I_i$$

Burada $L_{ki} = \frac{1}{c^2} \oint\oint \frac{d\vec{s}_i \cdot d\vec{s}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}$

endüklenme katsayıları olarak tanımlanmıştır. Eğer devre, μ manyetik katsayısı olan bir ortamdaysa, bu durumda

$$L_{ki} = \frac{\mu}{c^2} \oint\oint \frac{d\vec{s}_i \cdot d\vec{s}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}$$

olur. Açıkça $L_{ki} = L_{ik}$ dir.

eğer k devresinde sadece V_k ~~varsa~~ ve bir direnç varsa, bu durumda I_k akımı

$$RI_k = V_k - \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$= V_k - \sum_i L_{ki} \dot{I}_i$$

$$\Rightarrow \boxed{RI_k + \sum_i L_{ki}\dot{I}_i = V_k}$$

denklemini sağlar. Burada devrelerin birbirlerine göre konumlarının değişmediğini (eğilip bükülmediklerini), dolayısıyla L_{ik} endüklenme katsayılarının sabit olduklarını varsaydık.

Bu ifadede, $i=k$ terimi için

$$L_{kk} = \frac{\mu}{c^2}\iint \frac{d\vec{s}_k \cdot d\vec{s}_k'}{|\vec{r}_k - \vec{r}_k'|}$$

katkısına ihtiyaç vardır. Bu terim hesaplanırken, $\vec{r}_k = \vec{r}_k'$ noktasını düzgün hesaplayabilmek için tellerin kalınlıkları da göz önüne alınmalıdır.

Manyetik alanın toplam enerjisini hesaplamak istersek

$$W_m = \frac{1}{8\pi}\int \vec{B}\cdot\vec{H}\, d^3r$$

ifadesinden başlayabiliriz.

$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ olduğunu kullanırsak

$$\vec{B}\cdot\vec{H} = (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\vec{H} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{H}) + \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H})$$

olur. İlk terimin bütün uzay üzerinden integrali sıfır olacaktır.

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

~~eşitliğini~~ denklemini kullanırsak (sistemimizin yarı statik olduğunu unutmayın)

$$W_m = \frac{1}{8\pi}\int \frac{4\pi}{c}\vec{A}\cdot\vec{J}\, d^3r$$

$$= \frac{1}{2c}\int (\vec{A}\cdot\vec{J})\, d^3r$$

elde ederiz. $\vec{J}$ ~~gib~~ akım~~ın~~ yoğunluğunun, tellerden geçen akımların toplamında oluştuğunu kullanırsak

$$W_m = \frac{1}{2c}\sum_k I_k \int \vec{A}\cdot d\vec{S}_k = \frac{1}{2c}\sum_k I_k \Phi_k$$

elde ederiz. $\Phi_k = c\sum_i L_{ki} I_i$ sonucunu buraya yerleştirir isek

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}\sum_{ik} L_{ik} I_i I_k}$$

olarak buluruz.

Sistemin toplam enerjisinin zamanla değişimine bakalım.

Devrelerde dirençler varsa, Joule ısınmasından dolayı ~~en~~ enerji azalacaktır.

$$\frac{\partial W_m}{\partial t} = -\sum_k I_k^2 R_k + \cdots$$

~~Sist~~ Devrelerde bataryalar varsa, bataryalardan sisteme enerji aktarılacaktır.

$$\frac{\partial W_m}{\partial t} = -\sum_k I_k^2 R_k + \sum_k V_k I_k + \cdots$$

Sistemin parçaları hareket ediyor ise, parçalar üzerine iş yapılacaktır.

$$\frac{\partial W_m}{\partial t} = -\sum_k I_k^2 R_k + \sum_k V_k I_k - \frac{\partial A}{\partial t}$$

Sistemin parçalarının hareket etmediği en basit durumda

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{ik} L_{ik} I_i I_k$$

ifadesinden ve $L_{ik} = L_{ki}$ olduğunu kullanırsak,

$$\frac{\partial W_m}{\partial t} = \sum_{ik} L_{ik} I_i \dot{I}_k$$

elde ederiz, buradan da

$$\sum_{ik} L_{ik} I_i \dot{I}_k + \sum_k I_k^2 R_k = \sum_k V_k I_k$$

elde edilir.

Veya bu denklemi

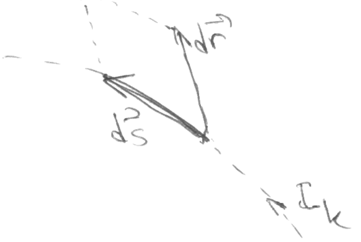
$$\sum_k I_k\left[\sum_i L_{ik}\dot{I}_i + I_k R_k - V_k\right]=0$$

olarak da yazabiliriz. Bu denklemi daha önce elde ettiğimiz

$$R_k I_k + \sum_i L_{ki}\dot{I}_i = V_k$$

denkleminden de elde edebileceğimize dikkat edin.

Şimdi, eğer devreler hareket ediyorsa ne olacağına bakalım. Devrenin küçük bir parçasına bakalım



Bulunduğu bölgedeki manyetik alan $\vec{B}$ olsun. Üzerine etki eden manyetik kuvvet

$$d\vec{F} = \frac{1}{c} I_k\, d\vec{s}\times\vec{B}$$

olacaktır. Bu parça $d\vec{r}$ kadar hareket etsin, Bu kuvvetin yaptığı iş

$$dA = \frac{1}{c} d\vec{F}\cdot d\vec{r} = I_k\,(d\vec{s}\times\vec{B})\cdot d\vec{r}$$

$$dA = \frac{1}{c} I_k\,\vec{B}\cdot(d\vec{r}\times d\vec{s})$$

$d\vec{r}\times d\vec{s}$ ise bu telin taradığı alan kadar olacaktır. Dolayısıyla

$$dA = \frac{1}{c} I_k\,\vec{B}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{c} I_k\, d\Phi_k$$

~~Buradan da~~

$$\cancel{\frac{\partial A}{\partial t} = \sum_k \frac{1}{c} I_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial t}}$$

Burada hesapladığımız k devresinin bir parçasının hareketi sırasında yapılan iştir. Ve bu hareket sırasında akımlar değişmemiştir. Dolayısıyla $d\Phi_k = c \sum_i (dL_{ki})_k I_i$

yazabiliriz. Burada $(dL_{ki})_k$ L_{ki}'nin k'nın hareketinden kaynaklı değişimidir. Bütün devreler üzerinden toplarsak

$$dA = \frac{1}{c} \sum_{ki} (dL_{ki})_k I_i I_k$$

olarak yazabiliriz. k ve i isimlerini değiştirirsek

$$dA = \frac{1}{c} \sum_{ki} (dL_{ik})_i I_k I_i$$

olarak da yazabiliriz. Taraf tarafa toplayıp ikiye böler ~~çıkarır~~ isek

$$dA = \frac{1}{2} \sum_{ki} \left[(dL_{ik})_i + (dL_{ki})_k \right] I_i I_k$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ki} dL_{ik} I_i I_k$$

elde ederiz. Burada $L_{ki} = L_{ik}$ olduğunu kullandık ve dL_{ik}, L_{ik}'deki i veya k devresinin hareketinden kaynaklı değişimi gösterir. Buradan

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{ki} \frac{\partial L_{ik}}{\partial t} I_i I_k$$

elde ederiz.

Dikkat edecek olursanız bu manyetik alanda depolanan enerjinin değişim hızına eşitti (sabit akımlarda) çünkü akım sabit ise

$$\frac{\partial W_m}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial L_{ik}}{\partial t} I_i I_k$$

olacaktır.

~~Ak~~ Devreler hareket ederse, yaratılacak olan elektromotif kuvvete rağmen, ~~devre~~ akımları sabit tutmak için V_k'ların arttırılması gerekecek, dolayısıyla bataryalardan daha çok güç çekilecektir. Çekilen bu güç, devrelerin hareketi sırasında yapılan iş olarak kullanılacaktır.

Buradan şöyle bir sonuca ta çıkarabiliriz: sistemi kendi başına bıraktığımızda, sistemin denge durumu manyetik alandaki enerjinin maximum olduğu durumdur.

Daha önce elde ettiğimiz

$$\frac{1}{C}\cancel{I}\int_{t_0}^{t} I(t')dt' + L\cancel{I}\dot{I} + I^2R = \Phi(t)\cancel{I}$$

denklemine geri dönersek, sık karşılaşılan bazı devreleri inceleyelim:

Direnç ve Endüktans Devresi

Kapasitör yoksa, ilk terim gelmez. Bu durumda

$$L\dot{I} + IR = \Phi(t)$$

olur. Eğer sistemde bir ~~batarya~~ güç kaynağı yoksa

$$L\dot{I} + IR = 0 \Rightarrow I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

elde edilir. I_0 sistemin $t=0$ anındaki akımıdır. Bir şekilde devrede bir akım başlatılıp devre kendi haline bırakılırsa, o akım zamanla azalır. L eğer R'ye oranla çok büyükse, devreden uzun bir süre akım akar. Bu durumda Joule ısınması ile daha çok enerji kaybedilir, oysa L çok büyükse, manyetik alanda da çok fazla enerji depolanmıştır. Bu durumda bir çelişki yoktur.

Eğer devreye sabit bir güç kaynağı bağlandıysa devreden geçen akım

$$L\dot{I} + IR = \Phi$$

denklemini sağlar. Bu denklemin çözümü ($\cancel{I(t=0)} = 0$ alınırsa)

$$I(t) = \frac{\Phi}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Yani akım birden bire Ohm yasasının verdiği değere ulaşmaz, yavaş yavaş o değere gelir.

Daha ilginç bir devre, eğer ~~karma~~

$$\Phi = \Phi_0 \cos(\omega t)$$

~~ise olur. $\dot{\Phi}$~~
olduğu durumdur.

$$\Phi = \Phi_0 \cos(\omega t) = \mathrm{Re}\, \Phi_0 e^{i\omega t}$$

alırsak, devreden geçen akım

$$L\dot{I} + IR = \Phi_0 e^{i\omega t}$$

denkleminin çözümünün reel kısmıdır. Bu denklemin ~~çö~~ $I(t) = Ae^{i\omega t}$ şeklinde bir çözümünü ararsak

$$i\omega LA + RA = \Phi_0 \Rightarrow A = \frac{\Phi_0}{i\omega L + R} = \frac{\Phi_0}{R}\frac{1}{1 + i\omega\frac{L}{R}}$$

olarak bulunur. Böylece

$$I(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \mathrm{Re}\,\frac{\Phi_0}{R}\frac{1}{1+i\omega\frac{L}{R}}e^{i\omega t}$$

olarak elde edilir. İlk terim zamanla azalan bir katkı verecektir. Eğer

$$\frac{1}{1+i\omega\frac{L}{R}} = \frac{1-i\omega\frac{L}{R}}{\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}\right)^2} \equiv \frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2\left(\frac{L}{R}\right)^2}}\, e^{-i\delta}$$

$$\tan\delta = \frac{\omega L}{R}$$ olacak şekilde tanımlarsak

$$I(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\Phi_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos(\omega t-\delta)$$

olarak elde edilir. Buradan da görüleceği üzere, yeterince bekledikten sonra (ilk terimi ihmal edersek) akım da voltajla aynı frekansta salınır ancak fazı δ kadar farklıdır.

Güç kaynağından aktarılan gücün bir periyod boyunca ortalamasına bakacak olursak

$$\overline{V(t)\,I(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)\,I(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \Phi_0\cos(\omega t)\,\frac{\Phi_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\left(\cos\omega t\cos\delta + \sin\omega t\sin\delta\right)$$

$$= \frac{\Phi_0^2}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\left[\overline{\cos^2\omega t}\cos\delta + \overline{\cos\omega t\sin\omega t}\,\sin\delta\right]$$

$$\overline{P} = \frac{\Phi_0^2}{2\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos\delta$$

$$\overline{\Phi} = \overline{VI} = \frac{\Phi_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos\delta$$

olarak bulunur. Burada $\frac{\Phi_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{\overline{\Phi^2}}$

ve $\frac{I_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{\overline{I^2}}$ etkin elektromotiv kuvvet ve

etkin akım olarak bilinir.

~~Kapasitans~~
Kapasitör, İndüktor ve Direnç içeren devreler:
RLC devreleri

Bu durumda devreden geçen akım

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C} I = \dot{\Phi}$$

denklemini sağlar.
Öncelikle homojen denklemin ($\dot{\Phi} = 0$)
$I = Ae^{\delta t}$ şeklinde bir çözümüne bakalım.
Denkleme yerleştirir isek

$$L\delta^2 + R\delta + \frac{1}{C} = 0 \Rightarrow \delta_{\pm} = \frac{-R \mp \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}}{2L}$$

$$\delta_{\pm} = -\frac{R}{2L} \mp \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

olarak iki çözümünü buluruz.

Eğer $\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ise $\delta_t < 0$ olur. Eğer, $t=0$ anında kapasitörü yükler ve ~~devrey~~ akım geçmeyen devreye bağlar isek yani $I(t=0)=0$ ise

$$I(t) = C\left(e^{-|\delta_-|t} - e^{-|\delta_+|t}\right)$$

olur. Devreden geçen akım önce artsa da sonra üstel olarak sıfıra gider.

$\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ise ve $w_0^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2$

olarak tanımlarsak,

$$I(t) = C\, e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(w_0 t)$$

olarak değişir. (yine $I(t=0)=0$ olduğunu varsaydık)

Bu durumda, devrede akım salınım yapsa da bir süre sonra sıfıra gidecektir, yani sönümlü bir salınım yapacaktır.

Şimdi $Q = Re(Q_0 e^{iwt})$ olduğu duruma bakalım. Yine denklemin $I = Re(A e^{iwt})$ olan bir çözümünü varsayacak olursak

$$A\left(-Lw^2 + iwR + \frac{1}{C}\right) = Q_0 iw$$

$$A = \frac{iwQ_0}{iwR + \frac{1}{C} - Lw^2} = \frac{Q_0}{R - i\left(\frac{1}{wC} - wL\right)}$$

elde ederiz.

Dolayısıyla akımın zamanla değişimi

$$I(t) = Re \frac{\mathcal{E}_0}{R - i\left(\frac{1}{wC} - wL\right)} e^{iwt}$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{wC} - wL\right)^2}} \cos(wt - \delta)$$

olarak bulunur. Burada

$$\tan\delta = \frac{wL - \frac{1}{wC}}{R}$$

olarak tanımlanmıştır. Akımın en fazla genlik kazanacağı w değeri

$$w = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ 'dir ve

Rezonans frekansı olarak bilinir.