MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

BÖLÜM 3. YÜKSEK BASMAKTAN LİNEER DENKLEMLER

Bu bölümde, sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemler teorisini daha kapsamlı bir biçimde vereceğiz. Varlık ve tekliği göstermek için operatör hesabını kullanacağız. Homogen denklemin çözümlerinden homogen olmayan denklemin çözümünü bulmak için teknikler sunacağız. Ayrıca, asimptotik kararlılık üzerine kalitatif sonuçlar vereceğiz.

DERS 11. YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER DENKLEMLER

n' inci mertebeden sabit katsayılı bir lineer diferansiyel denklem

(11.1) $$Ly = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y' + p_n y = f(t)$$

biçimindedir. Burada $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dt^k}$, y'nin t ye göre k'yıncı mertebeden türevi, p_j ler reel ya da karmaşık sabitler ve $f(t)$, bir I aralığında sürekli fonksiyondur. L harfi, (homogen) diferensiyel operatörü temsil etmektedir. $C^k(I), I$ da k kez türevlenebilen fonksiyonların uzayı olmak üzere, $L: C^m(I) \to C(I)$ operatörünün lineer olduğu kolaylıkla görülebilir.

Bölüm 2 de incelenen ikinci mertebeden denklemlerde olduğu gibi *süperpozisyon kuralı ve tamamlayıcı çözüm kuralı*, (11.1) denklemi için de geçerlidir.

Süperpozisyon Kuralı. L, (11.1) de verilen operatör olmak üzere, $Lu = 0$ ve $Lv = 0$ ise herhangi c_1 ve c_2 sabitleri için $L(c_1 u + c_2 v) = 0$ dır.

Tamamlayıcı Çözüm Kuralı. L, (11.1) de verilen operatör olmak üzere u fonksiyonu $Lu = f$ nin bir özel çözümü ve v de $Lv = 0$ ın herhangi bir çözümü ise, bu durumda $L(u + v) = f$ dir ve $Ly = f$ denkleminin her çözümü bu şekilde elde edilebilir.

Böylece, (11.1)'in genel çözümü

$$y = y_p + y_h$$

olarak verilir. Burada y_p, (11.1)'in bir özel çözümü ve y_h da karşılık gelen

$$Ly = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y' + p_n y = 0 \tag{11.2}$$

homogen denklemin bir çözümüdür.

Karakteristik polinom. (11.2) homogen denklemin bir çözümü olarak $y(t) = e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{C}$ fonksiyonunu deneyelim. $\frac{d^k}{dt^k}(e^{\lambda t}) = \lambda^k e^{\lambda t}$ olduğundan, denklemde yerine konulursa

$$Le^{\lambda t} = (\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n)e^{\lambda t} = 0$$

elde edilir. Üstelik, $e^{\lambda t}$ hiçbir zaman sıfır olmadığından $Le^{\lambda t} = 0$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul λ nın L nin

$$P_L(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n \tag{11.3}$$

karakteristik polinomunun bir kökü olmasıdır.

Örnek 11.1. p ve q sabitler olmak üzere ikinci mertebeden

$$Ly = y'' + py + qy$$

denklemi için sonuçları hatırlayalım. Karakteristik polinomun kökleri

$$\lambda = \frac{-p \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \Delta = p^2 - 4q$$

dır. $p^2 > 4q$ ise bu λ değerleri için $y = e^{\lambda t}$, $Ly = 0$ denkleminin çözümleridir.

n'inci mertebeden (11.2) diferansiyel denklemini çözmek için $y = e^{\lambda t}$ değiştiriminin nasıl uygulanacağını göstereceğiz.

Operatör kalkulüs. Türev işlemi için $D = \frac{d}{dt}$ soyut simgesini kullanırsak, lineer denklemlerin incelenmesi daha kolay olur. Küçük bir uyarı: d sembolü diferansiyeller için kullanılır. Örneğin, $d(t^3) = 3t^2 dt$ fakat $D(t^3) = 3t^2$ dir.

D operatörü lineerdir. Yani, türevlenebilir u, v fonksiyonları ve herhangi bir c sabiti için

$$D(u+v) = Du + Dv, \quad D(cu) = cDu$$

sağlanır.

Şimdi D nin bazı özelliklerini sıralayalım. Tanım olarak,

$$D^0 = id \text{ ve } D^k = \frac{d^k}{dt^k}, k = 1,2,\ldots$$

Bunun yanında,

(11.5) $$D^j D^k = D^{j+k}, \qquad \left(D^j\right)^k = D^{jk}, \qquad j,k = 1,2,\ldots$$

dır. İspat ödev olarak bırakılmıştır.

(11.2) deki diferansiyel operatörü, D notasyonuyla

$$Ly = (D^n + p_1 D^{n-1} + \cdots p_{n-1} D + p_n) y$$

biçiminde yazabiliriz. Bu durumda, ikinci yandaki birinci çarpanın $P_L(D)$ olduğu görülür. Burada P_L parakteristik polinomunun D deki değeri biçimsel olarak hesaplanmaktadır. Bu anlamda $L = P_L(D)$ deriz.

Sabit katsayılı lineer operatörler aşağıdaki anlamda yer değiştirirler.

Lemma 11.2. *a_j ve b_k sabitler olmak üzere, $p(D) = \sum a_j D_i$ ve $q(D) = \sum b_k D^k$ iki lineer diferensiyel operatör ise,*

$$p(D)q(D) = q(D)p(D) = \sum a_j b_k D^{j+k}$$

dir.

İspat (11.5) kullanılarak yapılır. Ödev olarak bırakılmıştır.

Uyarı 11.3. Yukarıdaki Lemma, değişken katsayılı lineer operatörler için doğru değildir. Örneğin, f, t ye göre türevlenebilir fonksiyon olmak üzere

$$D(tf) = (tf)' = tf' + f = (tD + id)f$$

dir. Diğer bir ifadeyle $Dt = tD + id$ dir.

Pek çok uygulamada, $\lambda \in \mathbb{C}$ ve u belli dereceden düzgün bir fonksiyon olmak üzere, deneme çözümler $e^{\lambda t} u$ biçiminde alınmaktadır. Bu nedenle, bu tip bir fonksiyonun D operatörü ile nasıl işleme girdiğini bilmek faydalıdır.

Lemma 11.4 (Üstel kaydırma kuralları). p bir polinom ve λ bir sabit ise,

$$p(D)\left(e^{\lambda t} f\right) = e^{\lambda t} p(D + \lambda) f$$

dir.

İspat. Türev kuralına göre,

$$D\left(e^{\lambda t} f\right) = e^{\lambda t} Df + \lambda e^{\lambda t} f = e^{\lambda t}(D+\lambda) f$$

olur. Buradan a herhangi bir sabit ise

$$(D-a)\left(e^{\lambda t} f\right) = e^{\lambda t}(D-a+\lambda) f$$

dir. Tümevarım yöntemi kullanılırsa

$$(D-a)^k\left(e^{\lambda t} f\right) = e^{\lambda t}(D-a+\lambda)^k f$$

elde edilir.

Nihayet, kalkulüsün temel teoremine göre, bir p polinomu

$$p(D) = (D-a_1)^{k_1}(D-a_2)^{k_2} \dots (D-a_m)^{k_m}$$

şeklinde çarpanlarına ayrılabilir. Burada $a_j \in \mathbb{C}$ polinomun kökü ve $k_j \geq 1$ de karşılık gelen kat (tekrarlanma) sayısıdır. İstenilen sonuç, Lemma 11.2 ve (11.6) den elde edilir.

Özel olarak, üstelik,

$$(D-\lambda)\left(e^{\lambda t} f\right) = e^{\lambda t} Df \text{ ve } (D-\lambda)^k\left(e^{\lambda t} f\right) = e^{\lambda t} D^k f$$

elde ederiz.

<u>Alıştırma.</u> Eğer a, p polinomunun bir kökü değilse, $b(t) = \frac{e^{at}}{p(a)}$ nın $p(D)y = e^{at}$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümü olduğunu gösteriniz.

Şimdi temel sonucumuzu ifade edelim.

Theorem 11.5. *Eğer λ_*, sabit katsayılı $p(D)$ lineer diferensiyel operatörüne ait $p(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n$ karakteristik polinomunun k katlı bir (karmaşık) kökü ise, bu durumda, $r = 0,1,\dots,k-1$ olmak üzere, $t^r e^{\lambda_* t}$ fonksiyonları $p(D)y = 0$ denkleminin çözümleridir.*

İspat. Üstel kaydırma kuralından, $r = 0,1, \dots, k-1$ için

$$(D-\lambda_*)^k\left(t^r e^{\lambda_* t}\right) = e^{\lambda_* t} D^k t^r = 0$$

olduğu elde edilir.

Öte yandan, $p(\lambda)$, $(\lambda - \lambda_*)^k$ çarpanını içermelidir ve bu nedenle

$$p(D) = (D-\lambda_*)^k q(D), \qquad q(D) = \prod_{\lambda_j \neq \lambda} \left(D - \lambda_j\right)^{k_j}$$

olur. Son olarak, Lemma 11.2 kullanılırsa

$$p(D)\left(t^r e^{\lambda_* t}\right) = q(D)(D-\lambda_*)^k\left(t^r e^{\lambda_* t}\right) = 0$$

bulunur. Bu ispatı tamamlar. □

Sonuç 11.6. *Eğer*

$$p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda-\lambda_m)^{k_m}$$

ise, $r = 0,1,2, \dots, \lambda_{j-1}$ *ve* $j = 1,2, \dots, m$ *olmak üzere,* $t^r e^{\lambda_j t}$ *fonksiyonları* $p(D)y = 0$ *diferensiyel denkleminin çözümleridir.*

Karmaşık çözümler. Operatör kalkulüs yoluyla analiz etmenin ilginç bir özelliği, katsayılar reel olduğu zaman bile, (11.4) deki $p^2 < 4q$ durumu gibi, çoğu problemin karmaşık değerli fonksiyonlar kullanılarak en iyi biçimde çözülmesidir.

$p(D)y = 0$ denklemindeki p_j katsayıları reel veya karmaşık olsun olamasın Teorem 11.5 geçerlidir. Gerçekten, t reel olarak yorumlanmasına rağmen (özel olarak, kararlılık tartışmasında), operatör kalkulüs ve onunla elde edilen çözümler karmaşık değerli fonksiyonlara eşit derecede iyi uygulanır. Fakat p_j katsayıları reel olduğu zaman, daha kuvvetli bir sonuç elde edebiliriz.

$\mu, \nu \in \mathbb{R}$ olmak üzere, bir polinomun karmaşık köklerinin $\mu \pm i\nu$ çifti biçiminde olduğunu ve ayrıca, $e^{\mu \pm i\nu} = e^{\mu}(\cos\nu + i\sin\nu)$ eşitliğini hatırlayalım.

Lemma 11.7 (Reel kısımları eşitleme kuralı). *u ve v reel değerli fonksiyonlar olmak üzere, karmaşık değerli $y(t) = u(t) + iv(t)$ fonksiyonu, reel katsayılı (11.2) diferansiyel denkleminin bir çözümü ise, bu durumda $u(t)$ ve $v(t)$, yani y nin reel ve sanal kısımları, (11.2) denkleminin çözümleridir.*

İspat. $Ly = L(u + iv) = 0$ olsun. L nin katsayıları reel olduğundan, karmaşık eşlenik alınırsa $\overline{Ly} = L(u - iv) = 0$ elde edilir. Bu durumda, lineerlikten

$$u = \frac{y+\overline{y}}{2} \text{ ve } v = \frac{y-\overline{y}}{2i}$$

(11.2) yi sağlar.

Lemma 11.7, reel değişken katsayılı diferansiyel denklemler için de geçerlidir.

Sonuç 11.8. *p polinomunun k katlı her $\mu \pm iv$, $\mu, v \in \mathbb{R}$ karmaşık kök çifti, $r = 0,1, \ldots, k-1$ olmak üzere, $p(D)y = 0$ diferansiyel denkleminin $t^r e^{\mu t} \cos vt$, $t^r e^{\mu t} \sin vt$ reel çözümlerini verir.*