MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

DERS 13. HOMOGEN OLMAYAN DENKLEMLER

Homogen olmayan lineer diferansiyel denklemleri çözmek için değişik teknikleri tartışacağız.

Parametrelerin değişimi: Lagrange yöntemi. Değişken katsayılı ikinci mertebeden

(13.1) $$Ly = y'' + p(t)y' + q(t)y$$

lineer diferansiyel operatörünü göz önüne alalım.

Eğer bir $Ly = 0$ homogen denklemin aşikar olmayan bir çözümü biliniyorsa, karşılık gelen $Ly = f$ homogen olmayan denklemi, genel olarak iki integral işlemiyle çözülür. Eğer $Ly = 0$ denkleminin iki lineer bağımsız çözümü biliniyorsa, $Ly = f$ denkleminin *tek* integral işlemi ile çözülebileceği Lagrange tarafından bulunmuştur.

$Ly = 0$ denkleminin lineer bağımsız bir çözüm çifti u,v olsun.

(13.2) $$y = au + bv$$

ifadesini göz önüne alalım. Eğer a ve b keyfi sabitler ise y, $Ly = 0$ ın genel çözümünü temsil eder. Homogen olmayan $Ly = f$ denkleminin bir çözümünü, a ve b sabitten ziyade t nin fonksiyonları olmak üzere, bu biçimde bir deneme çözüm seçerek elde edeceğiz. Metod, *parametrelerin değişimi* yöntemi olarak adlandırılır.

a ve b, t nin türevlenebilir fonksiyonları olsun. Türev alarak

$$y' = (au' + bv') + (a'u + b'v)$$

elde edilir. $y' = au' + bv'$ olması için

(13.3) $$a'u + b'v = 0$$

denkleminin sağlanmasını talep ediyoruz. Bu zorlama ikinci mertebeden türev hesabını basitleştirir, ve

$$y'' = (au'' + bv'') + (a'u' + b'v')$$

olur. Böylece,

$$Ly = y'' + py' + qy = aLu + bLv + a'u' + b'v' = a'u' + b'v'$$

elde edilir. İkinci eşitlikte $Lu = Lv = 0$ kullanılmıştır.

$Ly = f$ denklemini (13.2) deki biçimde çözmek, a' ve b' bilinmeyenlerine göre,

$$a'u + b'v = 0$$

$$a'u' + b'v' = f$$

lineer sistemi çözmeye indirgenir. Bu sistem matris formunda

$$\begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

olarak yazılabilir.

Sistemi Kramer kuralına göre çözeriz, ve

$$a' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & v \\ f & v' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}}, \qquad b' = \frac{\begin{vmatrix} u & 0 \\ u' & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}}$$

elde ederiz. Burada, $|\cdot|$ notasyonu matrisin determinantını göstermektedir. Paydalar $W(u, v)$ wronskiyenidir, dolayısıyla yukarıdaki ifadeleri

$$a' = \frac{-fv}{W(u, v)}, \qquad b' = \frac{fu}{W(u, v)}$$

olarak yazabiliriz.

Nihayet, (tek) integral işlemi uygularsak

$$y(t) = u(t) \int \frac{-fv}{W(u, v)} dt + v(t) \int \frac{fu}{W(u, v)} dt \tag{13.4}$$

Lagrange formülünü elde ederiz.

Lagrange yöntemi n-yinci mertebeden denklemlere genişletilebilir ve bu diferansiyel denklemler teorisinde önemli bir gelişmeyi temsil eder.

Benzer bir fikir daha önce görülmüştü. Örneğin, birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemler incelenirken, v bir fonksiyon olmak üzere, homogen denklemin ce^P çözümünü ve^P ile değiştirmiştik.

Örnek 13.1. $' = \frac{d}{dx}$ olmak üzere,

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 f(x), \qquad x > 0 \tag{13.5}$$

Euler denklemini göz önüne alalım.

Önceki bölümde tartışılan teknik yardımıyla,

$$u = x, \qquad v = x^2, \qquad W(u,v) = x^2$$

elde ederiz. $x > 0$ için (13.5) denklemini

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = f(x)$$

biçiminde yazalım. Bu durumda (13.4) Lagrange formülü

$$y(x) = -x\int f(x)dx + x^2\int \frac{f(x)}{x}dx$$

çözümünü verir.

Alıştırma. Yukarıdaki örnekte, m bir sabit olmak üzere, $f(x) = x^m$ ise, (13.5) in bir özel çözümünün

$$y_p(x) = \begin{cases} -x\log x\,, & m = -1 \text{ ise} \\ x^2\log x\,, & m = 0 \quad \text{ise} \\ \dfrac{x^{m+2}}{m(m+1)}, & \mathrm{m} \neq -1{,}0 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğunu gösteriniz. (13.5) in genel çözümü $y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + y_P(x)$ dir.

Green fonksiyonu: başlangıç değer problemleri. (13.4) formülünün önemli bir uygulaması olarak, L, (13.1) de verilen operatör olmak üzere, $Ly = f$ denklemine ilişkin başlangıç değer probleminin bir integral gösterimini bulabiliriz.

t_0, I aralığında bir nokta olsun. (13.4) den

$$y(t) = u(t)\int_{t_0}^{t} \frac{-f(t')v(t')}{W(t')}dt' + v(t)\int_{t_0}^{t} \frac{f(t')u(t')}{W(t')}dt'$$

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{u(t')v(t) - u(t)v(t')}{u(t')v(t') - u'(t')v(t')} f(t')dt'$$

olur. Bu fonksiyon

$$y(t_0) = 0, \;\; y'(t_0) = 0$$

koşullarını sağlar. Gerçekten,

$$a(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{-f(t')v(t')}{W(t')} dt', \quad b(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{f(t')u(t')}{W(t')} dt'$$

olmak üzere $y(t) = a(t)u(t) + b(t)v(t)$ ve $y'(t) = a(t)u'(t) + b(t)v'(t)$ dır.

Özetlersek,

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} G(t, t')f(t')dt', \qquad G(t, t') = \frac{u(t')v(t) - u(t)v(t')}{u(t')v'(t') - u'(t')v(t')}$$

fonksiyonu

$$Ly = f, \qquad y(t_0) = 0, \qquad y'(t_0) = 0$$

başlangıç değer probleminin çözümüdür. $G(t, t')$ fonksiyonu, *Green fonksiyonu* olarak adlandırılır.

Örnek 13.2. Bir $x_0 > 0$ için $y(x_0) = 0, \;\; y'(x_0) = 0$ başlangıç koşullu (13.5) Euler denklemini incelemeye devam ediyoruz. Çözüm,

$$y(x) = x \int_{x_0}^{x} (x - t) \frac{f(t)}{t} dt$$

integral gösterimine sahiptir.

Örneğin $f(x) = x \sin x$ ise

$$y(x) = x \int_{x_0}^{x} (x - t) \sin t dt = x(x - x_0) \cos x_0 - x(\sin x - \sin x_0)$$

elde edilir.

<u>Alıştırma.</u> (Green Fonksiyonu: sınır değer problemi).

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t), \qquad t \in (t_1, t_2), \qquad y(t_1) = y(t_2) = 0$$

sınır değer problemini göz önüne alalım. Eğer u ve v, $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ homogen denkleminin iki lineer bağımsız çözümü ise,

$$G(t',t) = \begin{cases} \dfrac{u(t')v(t)}{W(t')} & \text{eğer } t_1 \leq t' \leq t \text{ ise} \\ \dfrac{u(t)v(t')}{W(t')} & \text{eğer } t \leq t' \leq t_2 \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere, sınır değer probleminin çözümünün

$$y(t) = \int_{t_1}^{t_2} G(t',t)f(t')dt'$$

ile verildiğini gösteriniz.

Yoketme (Sıfırlama) Yöntemi. Sabit katsayılı homogen olmayan lineer bir denklemin bir özel çözümünün bulunması için başka bir yöntem vereceğiz. p_j ler reel sabitler olmak üzere,

$$Ly = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y' + p_n y$$

olsun. f,

$$t^r e^{\lambda t}, \qquad t^r e^{\mu t} \sin \nu t\,, \qquad t^r e^{\mu t} \cos \nu t$$

biçimindeki fonksiyonların bir toplamı olmak üzere, $Ly = f$ diferansiyel denklemini çalışalım. Yukarıdaki fonksiyonların sabit katsayılı lineer homogen denklemlerin çözümlerinin bir bazı olarak ortaya çıktığını belirtelim. $Af = 0$ denklemini sağlayan bir A diferensiyel operatörü bulursak, $Ly = f$ denklemini çözmeyi, $LAf = 0$ homogen denklemini çözmeye indirgeriz. Bu tip bir A operatörü, f nin bir *yok edicisi* olarak adlandırılır.

Bir örnekle açıklayalım.

Örnek 13.3.

$$y'' - 5y' - 6y = te^t \tag{13.6}$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. $L = D^2 - 5D - 6 = (D-2)(D-3)$ olsun. Bu durumda, (13.6) denklemi $Ly = te^t$ olarak yazılır.

D için üstel kaydırma kuralı gereğince, te^t nin $(D-1)^2 y = 0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü olduğunu görürüz. Diğer bir ifadeyle, $(D-1)^2$, te^t nin bir yok edicisidir . (13.6) da $(D-1)^2$ operatörünü uygularsak

$$(D-2)(D-3)(D-1)^2 y = 0$$

homogen diferansiyel denklemini elde ederiz. Yukarıdaki denklemin çözümlerinin bir bazının e^t, te^t, e^{2t}, e^{3t} olduğu kolaylıkla görülebilir. Buradan, (13.6) nın bir çözümünü

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 te^t + c_3 e^{2t} + c_4 e^{3t}$$

biçiminde kurarız ve c_j sabitlerini belirleriz.

$Le^{2t} = 0$ ve $Le^{3t} = 0$ olduğundan, $c_3 = c_4 = 0$ alabiliriz. Buradan

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 te^t$$

olur.

$$Ly = (D^2 - 5D - 6)(c_1 e^t + c_2 te^t) = (2c_1 - 3c_2)e^t + 2c_2 te^t = te^t$$

eşitliğinden $c_1 = 3/4$ ve $c_2 = 1/2$ bulunur. Böylece,

$$y(t) = \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{2}te^t$$

(13.6) nın bir özel çözümüdür.