MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

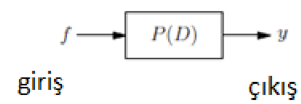
2009 Bahar

DERS 21. BASAMAK FONKSİYONLARI

Basamak ve impuls sinyalleri: Motivasyon.

$$P(D)y \coloneqq y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f$$

denkleminin analizinde diferansiyel denkleme aşağıdaki şekildeki gibi bir giriş-çıkış sistemi olarak bakabiliriz.



Sekil 21.1. Giriş-çıkış sistemi

$P(D)$ nin katsayıları, kütle-yay sistemindeki yay sabiti ya da devre analizindeki direnç sabiti gibi, sistemin parametreleridir. Gerçek hayatta, parametreleri önceden bilmiyoruz. Onun yerine sistemi, değişik giriş sinyallerine nasıl yanıt verdiğini izlemekle öğreniyoruz.

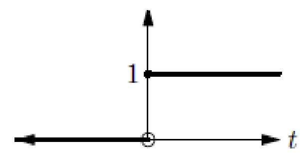
Giriş sinyali ne kadar basit olursa, sistem parametrelerinin izinin o kadar açık olmasını bekleriz ve sistemin daha karışık sinyallere nasıl tepki vereceğini o kadar kolay tahmin ederiz. En basit sinyal, homogen denkleme karşılık gelen, sıfır sinyaldir. Biz diğer basit ve standart iki sinyali (birim basamak ve birim impuls) inceleyeceğiz. Şimdi, birim basamak sinyalini çalışalım. Birim impuls sinyali ilerki derslerde tartışılacaktır.

Birim basamak sinyalleri. *Birim basamak fonksiyonu* ya da *Heaviside1 birim fonksiyonu*

(21.1)
$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır. $t = 0$ da sıçramalı süreksizliğe sahip $h(t)$ fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.

1 Heaviside (1850-1925) İngiliz mühendis, matematikçi ve fizikçisi



Şekil 21.2 $h(t)$ nin grafiği

Tanımı gereği,

$$h(t-c)=\begin{cases}0, & t<c\\ 1, & t\geq c\end{cases}$$

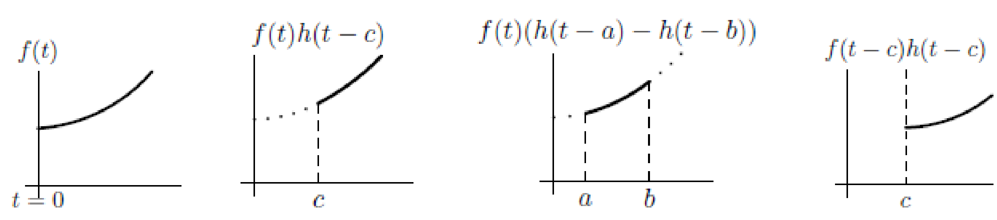
dır.

Aşikar olarak, $c\geq 0$ olmak üzere,

$$\mathcal{L}\{h(t-c)\}=\int_0^{\infty} e^{-st}h(t-c)dt=\int_c^{\infty} e^{-st}dt=\frac{e^{-sc}}{s}$$

dir.

Birim basamak fonksiyonu, değişik süreksiz girişleri tanımlamak için kullanılır. Eğer $f(t)$, $t\geq 0$ ve $c\geq 0$ için tanımlı ise, $f(t)h(t-c)$ fonksiyonu $t\geq c$ için $f(t)$ ile çakışır ve $t<c$ için 0 değerini alır. Eğer $0\leq a<b$ ise, $f(t)h(t-a)-f(t)h(t-b)$ fonksiyonu $[a,b)$ aralığında $f(t)$ ile çakışırken bu aralığın dışındaki noktalarda sıfırdır. Bu fonksiyon bir anahtarı $t=a$ anında kapama ve $t=b$ anında açma etkisini tanımlar. Daha kesin bir ifadeyle, eğer $g(t)=f(t-c)h(t-c)$ ise, $g(t)$ fonksiyonu $t\geq c$ için $f(t)$ fonksiyonuna ve $t<c$ için de sıfır fonksiyonuna eşittir. Bu fonksiyonlar aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 21.3 Süreksiz girişler

Birim basamak fonksiyonun esas kullanımlarından biri

$$\mathcal{L}\{f(t-c)\}=e^{-sc}F(s),\qquad c\geq 0$$

t-kaydırma özelliği ile olan ilişkisidir. Bu formül, $t < 0$ için $f(t) = 0$ koşulunu gerektirir. Birim basamak fonksiyonunu yardımıyla, alternatif olarak

$$\mathcal{L}\{f(t-c)h(t-c)\} = e^{-sc}F(s), \qquad c \geq 0 \tag{21.2}$$

yazabiliriz.

Örnek 21.1. Hangi fonksiyonun Laplace dönüşümü $\frac{e^{-s}}{s^2}$ dir.

ÇÖZÜM. $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$ olduğunu biliyoruz. Böylece t-kaydırma özelliğinden, bu durumda,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^2}\right\} = (t-1)h(t-1)$$

elde edilir.

Bu sonuçları süreksiz bir giriş içeren diferansiyel denklemi çözmek için kullanırız.

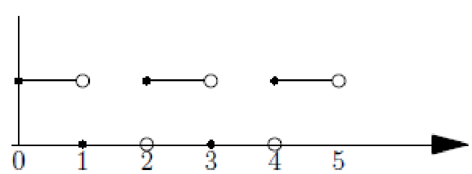
Örnek 21.2.

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1), [2,3), [4,5) \\ 0, & t \in [1,2), [3,4), [5,\infty) \end{cases}$$

olmak üzere,

$$y'' - 3y' + 2y = f(t), y(0) = 0, y'(0) = 0$$

başlangıç değer problemini çözünüz. $f(t)$ nin grafiği aşağıda verilmiştir.



Şekil 21.4 $f(t)$ nin grafiği

ÇÖZÜM. $Y(s) = \mathcal{L}y$ ve $F(s) = \mathcal{L}f$ olsun. Laplace dönüşümünü uygulayarak

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) = F(s), \quad Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 - 3s + 2}$$

bulunur.

$f(t)$ fonksiyonunu

$$f(t) = h(t) - h(t-1) + h(t-2) - h(t-3) + h(t-4) - h(t-5)$$

şeklinde yazarız. Buradan

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} + \frac{e^{-4s}}{s} - \frac{e^{-5s}}{s}$$

elde ederiz. Alternatif olarak,

$$F(s) = \int_0^1 e^{-st}dt + \int_2^3 e^{-st}dt + \int_4^5 e^{-st}dt$$

yazılabilir.

Böylece,

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-1)(s-2)}(1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + e^{-4s} - e^{-5s})$$

dır. Basit kesirlere ayırma işlemi uygulanırsa,

$$\frac{1}{s(s-1)(s-2)} = \frac{11}{2s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-2} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} - e^t + \frac{1}{2}e^{2t}\right\}$$

ve

$$y(t) = \sum_{k=0}^{5} y_0(t-k)h(t-k), \quad y_0(t) = \frac{1}{2} - e^t + \frac{1}{2}e^{2t}$$

bulunur.

Uyarı 21.3. $k = 1,2,\cdots,5$ için $y_0(k) = y_0'(k)$ olduğu kolaylıkla görülür. Bu, $t \in [0,\infty)$ için y ve y' nün sürekli olması anlamına gelmektedir. Fakat $t = k$ da y'' sürekli değildir. Diğer bir ifadeyle, y genelleştirilmiş bir çözümdür.

Periyodik Fonksiyonlar. $f \in E, p > 0$ periyodlu bir periyodik fonksiyon, yani her $t \in \mathbb{R}$ için $f(t+p) = f(t)$, olsun.

$$f_0(t) = f(t)h(t) - f(t)h(t-p) \tag{21.3}$$

fonksiyonu, $[0,p)$ aralığında $f(t)$ ile çakışırken bu aralığın dışında sıfırdır. Bu anlamda f_0, tek periyotta f fonksiyonunu temsil eder; f, f_0 in periyodik genişlemesidir.

f periyodik olduğundan, (21.3) deki ikinci $f(t)$ yi $f(t-p)$ ile değiştirebiliriz. Laplace dönüşümü alınırsa (21.3), $\mathcal{L}f_0 = \mathcal{L}f - e^{-ps}\mathcal{L}f$ ifadesini verir. Bu denklemi $\mathcal{L}f$ ye göre çözerek, $\mathcal{L}f_0 = \int_0^p e^{-st} f(t)dt$ olmak üzere,

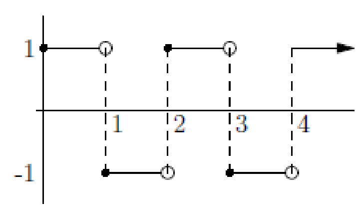
$$\mathcal{L}f = \frac{\mathcal{L}f_0}{1-e^{-ps}} \tag{21.4}$$

elde ederiz.

Örnek 21.4. $n \geq 0$ bir tamsayı olmak üzere, kare-dalga fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} 1, t \in [2n, 2n+1) \\ -1, t \in [2n-1, 2n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.



Şekil 21.5 Kare-dalga fonksiyonunun grafiği.

$f_0(t) = h(t) - 2h(t-1) + h(t-2) = \begin{cases} 1, t \in [0,1) \\ -1, t \in [1,2) \end{cases}$ olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{L}\{f_0(t)\}(s) = \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s} = \frac{(1-e^{-s})^2}{s}$$

dir. Bu nedenle, (21.4) den

$$\mathcal{L}f = \frac{1}{s}\frac{(1-e^{-s})^2}{1-2e^{-s}} = \frac{1}{s}\frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}}$$

elde edilir.