MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

DERS 22. KONVOLUSYON

Motivasyon: Bir göldeki kirletici bir maddenin birikimi. Bir gölümüz olduğunu ve göle değişken $f(t)$ oranında bir kirletici maddenin boşaltıldığını kabul edelim. Kirletici zamanla üstel hızda ayrışsın. Eğer $t = 0$ da gölde hiç kirletici yoksa, $t > 0$ anında ne kadar kirletici olur?

Δt küçük olmak üzere, t_1 ve $t_1 + \Delta t$ zaman aralığında göle eklenen küçük kirletici damla miktarı $f(t_1)\Delta t$ dir. $a > 0$ ayrışma sabiti olmak üzere, $t > t_1$ zaman sonra damla $e^{-a(t-t_1)}f(t_1)\Delta t$ ye azalır. $t_1 = 0$ başlangıç zamanından başlayarak bu miktarları toplarsak

$$\int_0^t e^{-a(t-t_1)}f(t_1)dt_1 \tag{22.1}$$

elde ederiz. Bu tip bir integral *konvolusyon* olarak adlandırılır.

Bu problemi bir diferansiyel denklem kurarak çözebiliriz. Göldeki t anındaki kirletici madde miktarı $y(t)$ olsun. Bu durumda, göldeki $t + \Delta t$ andaki kimyasal madde miktarı, t anındaki miktardan ayrışan kısmı çıkarıp o andaki yeni miktarın eklenmesi ile elde edilir:

$$y(t + \Delta t) = y(t) - ay(t)\Delta t + f(t)\Delta t$$

dir. $\Delta t \to 0$ için limit alarak

$$y' + ay = f(t), \qquad y(0) = 0$$

elde ederiz. (22.1)'in yukarıdaki başlangıç değer probleminin çözümünü verdiği kolaylıkla görülür.

Konvolusyon integrali. f ve g nin konvolusyonu

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t_1)g(t - t_1)dt_1 \tag{22.2}$$

şeklinde tanımlanır. İntegral, sistemin t anındaki tepkisini $t_1 < t$ anlarında girdilerin ağırlıklı bir süperpozisyonu olarak verir. $g(t - t_1)$ ağırlığı, sistemi karakterize eder; $f(t)$ de girdinin geçmişini karakterize eder. Bundan böyle integralin varlığından emin olmak için $f, g \in E$ olduğunu varsayıyoruz.

Örnek 22.1. $B_1 \neq B_2$ sabitler olmak üzere, $f(t) = e^{B_1 t}$ ve $g(t) = e^{B_2 t}$ olsun. Bu durumda

$$(f * g)(t) = \int_0^t e^{B_1 t} \, e^{B_2(t-t_1)} \, dt_1 = \frac{e^{B_1 t} - e^{B_2 t}}{B_1 - B_2}$$

dir.

a herhangi bir sabit olmak üzere, $\mathcal{L}e^{at} = \frac{1}{s-a}$ olduğundan

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \frac{1}{B_1 - B_2}\left(\frac{1}{s - B_1} - \frac{1}{s - B_2}\right) = \frac{1}{s - B_1}\frac{1}{s - B_2} = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g)$$

elde ederiz. Bu bir raslantı olmaktan ziyade, aşağıda görüleceği gibi, konvolusyonun bir özelliğidir.

Konvolusyon operatörü adi çarpmadaki gibi davranır. Eğer f, g, h uygun fonksiyonlar ise, bu durumda, konvolusyon

(i) (dağılma) $f * (g + h) = f * g + f * h$

(ii) (değişme) $f * g = g * f$

(iii) (birleşme) $f * (g * h) = (f * g) * h$

özelliklerine sahiptir. Bununla birlikte konvolusyon operatörü, çarpma operatöründen farklıdır. Örneğin, genel olarak $f * 1 \neq f$ ve $f * f \neq f^2$ dir.

Alıştırma. $t^2 * 1 = \frac{1}{3}t^3$ ve $\cos t * \cos t = \frac{1}{2}(t \cos t + \sin t)$ olduğunu gösteriniz.

Diğer taraftan, konvolusyonun Laplace dönüşümü Laplace dönüşümlerinin çarpımıdır.

Teorem 22.2 (Konvolusyon Teoremi). *$f, g \in E$ ise, $f * g \in E$ ve $\mathcal{L}\{f * g\} = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g)$ dir.*

İspat. $f, g \in E$ olduğundan $f * g$ konvolusyonu $[0,\infty)$ aralığında süreklidir. $|f(t)| \leq A_1 e^{B_1 t}$ ve $|g(t)| \leq A_2 e^{B_2 t}$ kullanılırsa,

$$|(f * g)(t)| \leq \int_0^t A_1 e^{B_1 t} A_2 e^{B_2(t-t_1)} dt_1 = A_1 A_2 \frac{e^{B_1 t} - e^{B_2 t}}{B_1 - B_2}$$

olur. Bu nedenle $f * g \in E$ dir. Dahası $|f| * |g| \in E$ dir. Diğer bir ifadeyle, $\mathcal{L}\{f * g\}$, büyük s değerleri için, mutlak yakınsaktır.

Kolaylık açısından $t < 0$ için $f(t) = 0$ ve $g(t) = 0$ olsun. Buna göre,

$\mathcal{L}f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)dt$, $\mathcal{L}g = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} g(t)dt$ ve $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1)g(t - t_1)dt_1$ yazılabilir. Gerçekten, $t_1 < 0$ için $f(t_1) = 0$ olduğundan $f * g$ nin integralinin alt limiti $-\infty$ ile değiştirilebilir ve $t - t_1$ için $g(t - t_1) = 0$ olduğundan üst limit ∞ ile değiştirebilir. Bu durumda,

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1)\, g(t - t_1)dt_1 dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} g(t - t_1)dt \right) f(t_1)dt_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s(t_1+t_2)} g(t_2)dt_2 \right) f(t_1)dt_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st_1} \mathcal{L}g(s) f(t_1)dt_1 = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g)$$

elde edilir. □

Konvolusyon, s bölgesinden t bölgesine kolay bir geçişi sağlar ve homogen olmayan genel bir $f(t)$ terimi için açık çözümler verir.

Örnek 22.3. w^2 sabit ve $f \in E$ olmak üzere,

$$y'' + w^2 y = w^2 f(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

başlangıç değer problemini çözünüz.

ÇÖZÜM. Laplace dönüşümü alınırsa

$$(s^2 + w^2)\mathcal{L}y = w^2 \mathcal{L}f, \quad \mathcal{L}y = \mathcal{L}f \frac{w^2}{s^2 + w^2}$$

bulunur.

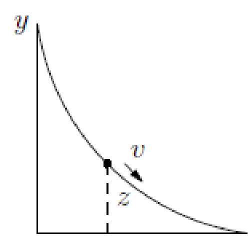
$\mathcal{L}\{\sin wt\} = \frac{w}{s^2+w^2}$ olduğundan, $\mathcal{L}y = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}w \sin wt)$ bulunur. Konvolusyon teoremi ve teklikten,

$$y(t) = f * (w \sin wt) = w \int_0^t f(t_1) \sin w(t - t_1)\, dt_1$$

elde edilir.

Keyfi bir f fonksiyonuna karşılık gelen durağan çözüm için bir formüle sahip olduğumuzu belirtelim.

Eş zaman eğrisi. m kütleli bir parçacık denge durumundan başlayarak aşağıdaki şekildeki gibi yer çekiminin etkisiyle sürtünmesiz bir eğri üzerinde kayarak yol almaktadır.



Şekil 22.1 Eş zaman eğrisi.

Amaç, iniş zamanının başlangıç noktasından bağımsız olacağı bir eğrinin şeklini belirlemektir. Bu tip bir eğriye *eşzaman eğrisi* denir. Bu terim Yunancada "eş" anlamına gelen "tauto" ve "zaman" anlamına gelen "chrone" kelimelerinin birleşiminden meydana gelmiştir. Bu problem, 1673 yılında Hollandalı matematikçi Christian Huygens tarafında onun sarkaçlı saatler teorisinin bir parçası olarak çözülmüştür.

Parçacığın harekete başladığı yükseklik y, ve z yüksekliğindeki hızı v olsun. z yükseklikteki parçacığın $\frac{1}{2}mv^2$ kinetik enerjisindeki değişim potansiyel enerjisindeki değişime eşittir. Bu, g yer çekimi ivmesi olmak üzere,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(y - z), \qquad v = \sqrt{2g}\sqrt{y - z} \tag{22.3}$$

anlamına gelir. $\sigma = \sigma(y)$, durağan halden en aşağıdaki noktaya uzanan yay uzunluğu olsun. İniş zamanı

$$\int_0^{\sigma(y)} \frac{d\sigma}{v} = \int_0^{y} \frac{1}{v}\frac{d\sigma}{dz}dz = \int_0^{y} \frac{1}{v}\phi(z)dz$$

dir. Burada $\phi(z) = \left.\frac{d\sigma}{dy}\right|_{y=z}$ olacak şekilde $\phi(y) = \frac{d\sigma}{dy}$ dir. İniş zamanı sabit olduğundan, c_1 sabit olmak üzere, problem, (22.3) yardımıyla,

$$\int_0^y \phi(z)(y-z)^{-1/2}dz = c_1$$

problemine indirgenir. İntegral, ϕ ile $y^{-1/2}$ nin konvolusyonudur. Laplace dönüşümü alınırsa

$$\mathcal{L}\{\phi * y^{-1/2}\} = (\mathcal{L}\phi)(\mathcal{L}y^{-1/2}) = \mathcal{L}c_1 = \frac{c_1}{s}$$

olur. Birinci eşitlik konvolusyon teoreminin sonucudur.

$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\pi}s^{-1/2}$ olduğundan[1], c ve c_2 sabitler olmak üzere,

$$\mathcal{L}\{\phi\} = c_2 s^{-1/2}, \quad \phi(y) = cy^{-1/2}$$

elde ederiz. $\phi(y) = \frac{d\phi}{dy}$ kullanılırsa, eğrinin denklemi

$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{c^2}{y} \quad \text{veya} \quad dx = \sqrt{\frac{c^2}{y} - 1}\,dy$$

denklemine indirgenir.

<u>Alıştırma.</u> $y = c^2 \sin^2\theta$ eğrisini parametrize ederek, eğrinin

$$x = \frac{c^2}{2}(2\theta + \sin 2\theta), \quad y = \frac{c^2}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

şeklinde verilen bir sikloid olduğunu gösteriniz.

Bir parçacık sürtünmesiz bir eğriden aşağı kayıyorsa, buna ait bir soru inme süresini minimum yapan yolun bulunması problemidir. Zamanı minimum yapan eğriye "eş zaman eğrisi" denir. Çözümünün yine sikloid eğrisi olması ilginçtir (düz bir doğru değil).

---

1 Gamma fonksiyonu ile ilgili problem seti sorusuna bakınız