MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

DERS 30. FAZ DÜZLEMLERİ II

Eş eğimli doğrular.

(30.1)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

sisteminin yörüngelerinin davranışını çalışmaya devam ediyoruz. İki denklemin oranını oluşturursak, $x \neq 0$ ve $ax + by \neq 0$ olmak üzere

(30.2)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{cx + dy}{ax + by} = \frac{c + d(y/x)}{a + b(y/x)}$$

elde ederiz.

(30.2) den eğer y/x sabit ise $\frac{dy}{dx}$ in sabit olduğu açıktır. Bu, m bir sabit olmak üzere, $y = mx$ üzerindeki noktalardan geçen orbitler aynı eğime sahip olduğu anlamındadır. Böyle $y = mx$ doğrusuna, (30.1) in eş eğimli bir doğrusu denir.

x-ekseni $(y = 0)$ üzerinde (30.1) in orbitlerin eğimi c/a dır. Bu nedenle x-ekseni (30.1) in bir eş eğimli doğrusudur. Benzer şekilde, y -ekseni de (30.1) in bir eş eğimli doğrusudur. Gerçekten, y-ekseni üzerinde $(x = 0)$ orbitlerinin eğimi d/b dir. $ax + by = 0$ ve $cx + dy = 0$, (30.1) sisteminin diğer kullanışlı eşit eğimli doğrularıdır. Birinci doğru üzerinde orbitlerin eğimi ∞ dur, yani orbitler dik doğrulardır. İkinci doğru üzerindeki orbitler ise yatay doğrulardır.

Bir eşit eğimli doğru (30.1) sisteminin bir çözümü değildir. Ancak, eğer
$$m = \frac{c + dm}{a + bm}$$
ise, $y = mx$ denkleminin bir çözümüdür. Bu koşul m nin

(30.3)
$$bm^2 + (a - d)m + c = 0$$

denkleminin bir kökü olmasına denktir. $b \neq 0$ varsayalım (eğer $b = 0$ ise $x = 0, m = \infty$ a karşılık gelen bir orbittir. Aşağıdaki alıştırmaya bakınız). (30.3) ün $\Delta = (a - d)^2 - 4bc$ diskriminantı $p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$ nin diskriminantıdır. Buradan, biri düğüm diğerinin eyer olduğu durumda ($\Delta > 0$) iki tane $y = mx$ doğru orbit vardır; fakat bir odak durumunda ($\Delta < 0$) hiçbir doğru orbit yoktur.

Alıştırma. Eğer m, $bm^2 + (a-d)m + c = 0$ denkleminin bir kökü ise $a + bm$ nin $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$ karakteristik denkleminin bir kökü olduğunu gösteriniz.

Eğer $y = mx$, (30.1) in bir çözümü ise, $x' = x(a+bm)$ ve dolayısıyla $x = ce^{(a+bm)t}$ dir. Bu nedenle, $a + bm$ nin işareti $y = mx$ orbitinin orijine doğrumu yoksa orijinden dışarı doğru mu hareket ettiğini belirler. Eğer $a + bm < 0$ ise $y = mx$ orbiti orijine doğru ve eğer $a + bm > 0$ ise orijinden dışarı doğru yönlendirilmiştir.

Alıştırma. $a \neq d$ olmak üzere

$$x' = ax, \qquad y' = cx + dy$$

sistemi için

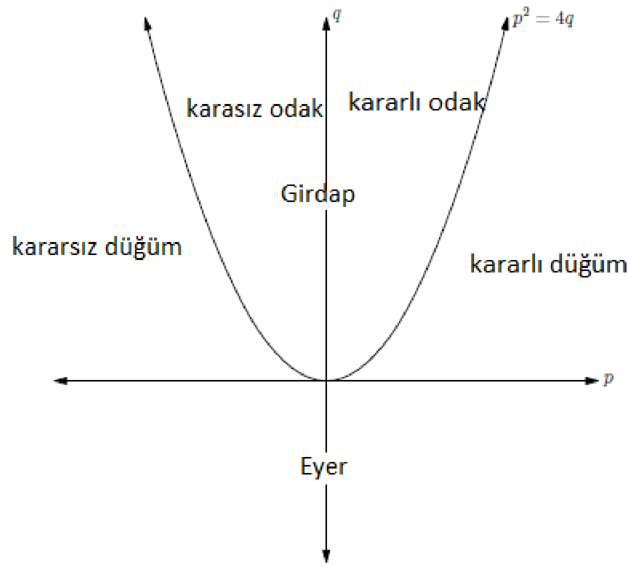
$$x = c_1 e^{at}, \qquad cx + (d-a)y = c_2 e^{dt}$$

olduğunu gösteriniz. Buradan

$$u = x, \qquad v = cx + (d-a)y$$

$|u|^d = k|v|^q$ denklemini sağlar. Yörüngelerin grafiğini çiziniz.

Özet. Şimdiye kadar ki tartışmamızı aşağıdaki diyagramla özetleyelim.

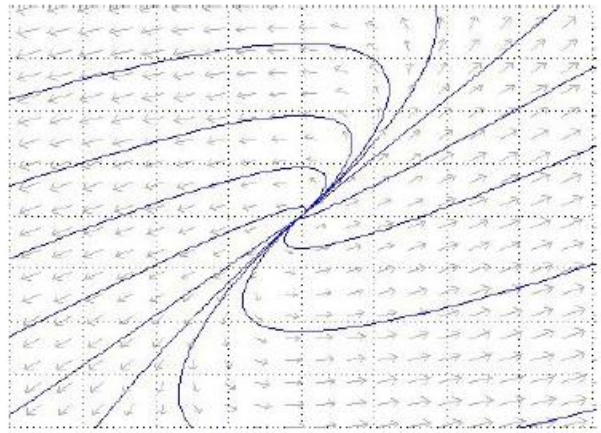


Şekil 30.1

Dejenere durumlar. Şekil 30.1 deki altı bölgenin dışında kalan limit veya dejenere durumları göz önüne alalım.

Dejenere düğümler. $p^2 = 4q$ ve $p \neq 0$ olduğunu varsayalım ve bu $a = d$ ve $b = c = 0$ durumunda olmasın. Bu durumda $p(\lambda)$, bir tek $-p/2$ çift katlı köküne sahiptir. Bu durum aynı işaretli iki kökün çakıştığı durum olarak düşünülebilir. Bu nedenle, orbitlerin davranışının bir düğüm durumundaki orbitlere benzer olduğunu bekleriz. Buradaki fark, $m = \frac{c+dm}{a+dm}$ denkleminin bir çözüme sahip olması ve buradan doğru orbitin çakışmasıdır. Böylece, orbitler orijinde bir doğruya teğettirler ve uzak noktalarda aynı doğruya neredeyse paraleldir. Bu durumda, orijin bir *dejenere düğüm* olarak adlandırılır.

$p > 0$ ise orijin bir kararlı (dejenere) düğüm ve $p < 0$ ise bir kararsız (dejenere) düğümdür.



Şekil 30.2 Bir dejenere düğüm

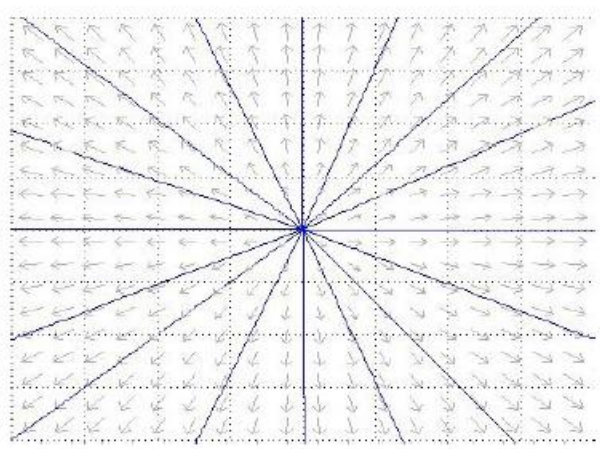
Yıldız noktalar. $p^2 = 4q$, $a = d$ ve $b = c = 0$ olsun. Bu durumda (30.1),

$$x' = ax, \qquad y' = ay$$

sistemine indirgenir. Çözüm, y/x sabit olan,

$$x = c_1 e^{at} \text{ ve } y = c_2 e^{at}$$

dir. Buradan, orbitler orijinden geçen radyal doğrulardır. Bu durumda orijine, *bir yıldız nokta* veya *bir aykırı düğüm* nokta denir. Eğer $p > 0$ $(a > 0)$ ise orijin bir kararlı aykırı düğüm ve $p < 0$ ise kararsız aykırı düğümdür.



Şekil 30.3 Bir aykırı düğüm noktası

Sıfır determinant. Şimdi de $q = 0$ yani $ad - bc = 0$ durumunu göz önüne alalım. Bu durumda, $cx' - ay' = 0$ ve böylece $cx - ay = sabit$ olur. Bu $a = c = 0$ olmadıkca paralel doğrular ailesini verir. Benzer şekilde, $dx - by = sabit$, $b = d = 0$ olmadıkca bir paralel doğrular ailesini verir.

Sıfır katsayı. Son olarak, eğer $p = q = 0$ ise, $a = b = c = d = 0$ dır. Bu durumda (30.1) in her çözümü bir kritik noktadır. Bu durum ilginç değildir.