

MIT AçıkDersSistemi

<http://ocw.mit.edu>

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

Bu bilgilere atıfta bulunmak veya kullanım koşulları hakkında bilgi için

<http://ocw.mit.edu/terms> web sitesini ziyaret ediniz.

## LC. LİMİT ÇEMBERLER

### 1. Giriş.

$xy$ -düzleminde lineer olmayan sistemlerin analizinde şimdiye kadar kritik noktaların bulunması ve her bir kritik noktanın komşuluğunda sistemin yörüngelerinin nasıl davrandığını inceleme üzerine ağırlık verdik. Bu incelemeler diğer yörüngelerin kritik noktalar civarında, en azından onlara yeterince yakın olanların, nasıl davrandığına ait bir sezgi vermektedir.

Yörüngelerin davranışını etkileyen bir diğer önemli olasılık yörüngelerden birinin kapalı bir  $C$  eğrisi üzerinde olup olmamasıdır. Eğer bu olursa, karşı gelen çözüm geometrik olarak  $C$  eğrisi üzerinde belli bir  $T$  periyoduyla dönen bir nokta olarak algılanabilir. Şöyle ki,

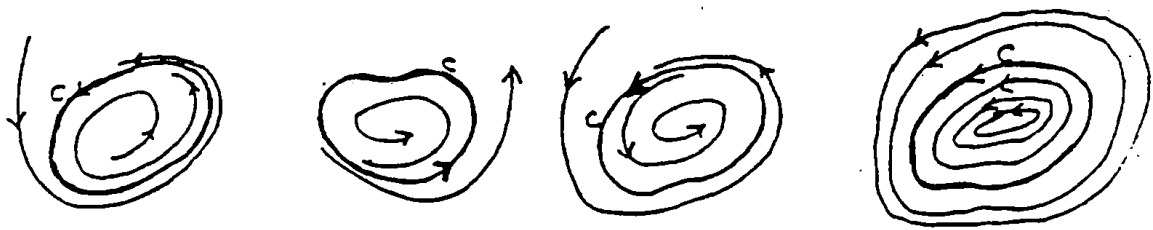
$$\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$$

çözüm vektörü  $T$  periyodik fonksiyonların bir çifti olacaktır. Yani, her  $t$  için

$$x(t + T) = x(t), \quad y(t + T) = y(t)$$

dir.

Eğer böyle bir kapalı eğri varsa, yakın yörüngeler  $C$  gibi davranmak zorundadır. Olasılıklar aşağıda gösterilmektedir. Yakın yörüngeler ya  $C$  ye doğru veya  $C$  den uzağa doğru sarmal olurlar, ya da kendileri kapalı eğrilerdir. Eğer son durum oluşmazsa, diğer bir deyişle  $C$  izole olmuş kapalı bir eğri ise,  $C$  bir *limit çember* olarak adlandırılır. Yakın eğrilerin  $C$  ye doğru,  $C$  den uzağa doğru veya hem  $C$  ye doğru hem de  $C$  den uzağa doğru sarmal oluşuna göre,  $C$  eğrisine kararlı, kararsız, veya yarı kararlı bir *limit çember* denir.



Kararlı limit çember

Kararsız limit çember

Yarı kararlı limit çember

Nötral kararlı limit çember

En önemli limit çember çeşidi yakın eğrilerin  $C$  ye doğru iki yönden sarmal olarak yaklaştığı kararlı limit çemberdir. Doğadaki periyodik süreçler çoğu zaman kararlı limit çemberlerle temsil edilirler. Bu nedenle, eğer mevcutsalar, böyle yörüngeleri bulmaya büyük bir ilgi vardır. Maalesef, bunun nasıl yapılacağı veya bir sistemin limit çemberi

olmadığının nasıl gösterileceği konusunda şaşırtıcı bir biçimde çok az şey bilinmektedir. Bu konuda günümüzde etkin araştırmalar vardır. Biz burada bilinen birkaç şeyi ifade edeceğiz.

## 2. Limit çemberlerin varlığını gösterme.

$$(1) \quad \begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y) \end{aligned}$$

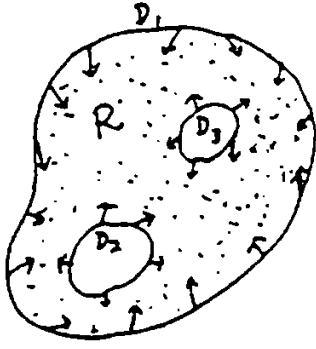
sisteminin limit çemberi olduğunu göstermek için tarihsel olarak kullanılan temel araç Poincare-Bendixson teoremidir.

**Poincare-Bendixson Teoremi.**  $R$ ,  $D_1$  ve  $D_2$  basit kapalı eğrileri arasındaki sonlu düzlemsel bölge ve  $\vec{F}$ , (1) sisteminin vektör alanı olsun. Eğer

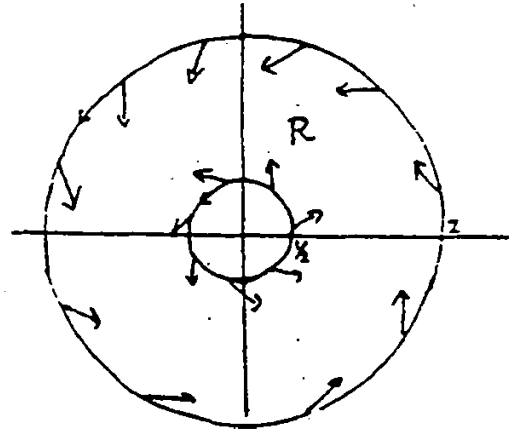
- (i)  $D_1$  ve  $D_2$  üzerindeki her noktada  $\vec{F}$  vektör alanı  $R$  bölgesinin içine doğru yönlü ise, ve
- (ii)  $R$  hiç kritik nokta içermiyorsa,

bu durumda (1) sistemi  $R$  bölgesinde kapalı bir yörüngeye sahiptir.

Teoremin hipotezleri Şekil 1 de gösterilmektedir. Matematik analiz konusunda temel bilgi gerektiren teoremin ispatını vermeyeceğiz. Neyse ki, teorem sezgiye kuvvetle hitap eder. Eğer sınırlayan eğrilerin birinin üzerinde başlarsak, hız vektörü  $R$  nin içine doğru yönlü olduğundan, çözüm  $R$  nin içine girecektir. Zaman geçtikçe, çözüm asla  $R$  nin dışına çıkamaz.  $R$  nin dışına çıkmak için sınır eğrisine yaklaştıkça, hız vektörü içeri doğru yönlü olduğundan, orbiti  $R$  de kalmaya zorlar. Çözüm asla  $R$  den çıkmayacağı için, yapabileceği tek şey  $t \rightarrow \infty$  için bir kritik noktaya yaklaşmak ya da bir kapalı orbite sarmal olmaktır. Fakat, hipotez gereği  $R$  de hiç kritik nokta yoktur, böylece  $R$  de kapalı bir orbit vardır. (Bu orbit kararsız bir limit çember olamaz, yukarıda gösterilen diğer üç durumdan biri olmalıdır.)



Şekil 1.



Şekil 2.

Poincare-Bendixson teoremini kullanmak için, eğri boyunca hız vektörleri aynı kenara yönlü olacak şekilde kapalı  $D$  eğriler için vektör alanı aramalıdır. Aşağıdaki örnek onların bulunabileceği bir durumdur.

### Örnek 1.

$$(2) \quad \begin{aligned} x' &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' &= x + y(1 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

Şekil 2 ilgili vektör alanının iki çember üzerinde nasıl görüldüğünü göstermektedir. Merkezi orijinde yarıçapı 2 olan çember üzerinde vektör alanı içeri doğru, yarıçapı 1/2 olan çember üzerinde ise dışarı doğru yönlüdür. Bunu ispat etmek için vektör alanını yarıçapı  $r$  olan çember üzerinde

$$(3) \quad \vec{x}' = (-y\vec{i} + x\vec{j}) + (1 - r^2)(x\vec{i} + y\vec{j})$$

olarak yazılır.

(3) denkleminin sağ tarafındaki ilk vektör çembere teğettir; ikinci vektör radyal olarak büyük çemberin ( $r = 2$ ) içine ve küçük çemberin ( $r = 1/2$ ) dışına doğru yönlüdür. Böylece, (2) deki iki vektörün toplamı büyük çember boyunca içeri ve küçük çember boyunca dışarı doğru yönlüdür.

Poincare-Bendixson teoreminin iki çember arasındaki yüzük şeklindeki bölgelere de uygulanabileceğine belirtmek istiyoruz. Bununla birlikte,  $R$  bölgesinin sistemin hiçbir kritik noktasını içermediğini sağlamalıyız.  $(0,0)$  noktasının sistemin tek noktası olduğunu göstermeyi ödev olarak bırakıyoruz; bu yüzük şeklindeki bölgenin kritik nokta içermediğini gösterir.

Yukarıdaki tartışma Poincare-Bendixson teoreminin  $R$  ye uygulanabileceğini gösterir ve  $R$  nin kapalı bir orbite sahip olduğu sonucuna varırız. Gerçekten,  $x = \cos t, y = \sin t$  nin sistemi çözdüğünü göstermek kolaydır. Böylece, kapalı eğrinin geometrik yeri birim çemberdir. Limit çemberin kararlı olduğunun gösterilmesini ve sistemin tek kapalı orbiti olduğunu göstermeyi bir diğer ödev olarak bırakıyoruz.

### 3. Limit çemberin olmaması durumu.

Şimdi dikkatimizi limit çemberin varlığını gösterme probleminin tersine çevirelim. Limit çemberin mevcut olmadığını göstermek için bazen kullanılan iki teorem şunlardır.

**Bendixson Kriteri.** Eğer  $f_x$  ve  $g_y$  basit bağlantılı (deliksiz) bir  $R$  bölgesinde sürekli ve  $R$  nin her noktasında

$$f_x + g_y \neq 0$$

ise

$$(4) \quad \begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y) \end{aligned}$$

sistemi  $R$  de kapalı bir orbite sahip değildir.

*İspat.*  $R$  bölgesinde kapalı bir  $C$  orbitinin varlığını kabul edelim. Green teoremini (normal formunu) kullanarak çelişki elde edelim. Bu teorem,  $D$  bölgesi  $C$  basit kapalı eğrisinin iç kısmı olmak üzere,

$$(5) \quad \oint_C (f\vec{i} + g\vec{j}) \cdot \vec{n} ds = \oint_C f dy - g dx = \iint_D \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy$$

verir.

Bu sonuç, bununla birlikte, bir çelişkidir. Çünkü, hipotez gereği,  $f_x + g_y$

fonksiyonu sürekli ve asla sıfır değerini almaz; böylece, ya pozitif ya da negatiftir ve (5) in sağ tarafı bu nedenle ya pozitif ya da negatiftir.

Diğer taraftan, sol taraf sıfır olmak zorundadır.  $C$  kapalı eğrisi sistemle tanımlanan  $f\vec{i} + g\vec{j}$  hız vektör alanına teğettir. Bu,  $C$  nin normal vektörü  $\vec{n}$  ile hız vektörü  $f\vec{i} + g\vec{j}$  nin ortogonal olması demektir; yani soldaki  $(f\vec{i} + g\vec{j}) \cdot \vec{n}$  fonksiyonu özdeş olarak sıfırdır.

Bu çelişki,  $R$  nin (4) sisteminin bir kapalı orbitini içerdiği kabulümüzün yanlış olduğu anlamına gelmektedir, ve böylece Bendixson kriteri ispat edilmiş olur.  $\square$

**Kritik Nokta Kriteri.** *Kapalı bir orbit iç bölgesinde bir kritik noktaya sahiptir.*

Bu cümleyi tersine çevirirsek, ifadenin gerçekten kapalı bir orbitin yokluğu kriteri olduğunu görürüz. Bu kriter,  $R$  basit bağlantılı bölgesi bir kritik noktaya sahip değilse, bu durumda limit çember içeremez demektir. Çünkü, eğer içerseydi, Kritik Nokta Kriteri limit çemberin içersinde bir kritik nokta olduğunu söylerdi, ve bu nokta  $R$  de delik olmadığından  $R$  ye de ait oludu.

Bu teorem “limit çemberler, içerisinde kritik nokta olan bölgeleri çevrelerler” ile Poincare-Bendixson teoremi “limit çemberler, içerisinde kritik nokta olmayan bölgelerde bulunurlar” arasındaki farkı dikkatli bir şekilde not edelim. Fark, Poincare-Bendixson teoremindeki bölgelerin her zaman delikli olduğudur; kritik noktalar deliktedir. Örnek 1 bunu göstermektedir.

**Örnek 2.**  $a$  ve  $b$  nin hangi değerleri için,

$$\begin{aligned}x' &= ax + by \\y' &= cx + dy\end{aligned}$$

sistemi kapalı orbitlere sahiptir.

**ÇÖZÜM.** Bendixson kriteri ile,  $a + d \neq 0 \Rightarrow$  *kapalı orbit yoktur*

$a + d = 0$  ise ne olur? Bendixson kriteri hiçbir şey söylemez. LS notlarındaki lineer sistem analizimize dönelim. Sistemin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

dir.  $a + d = 0$  olsun. Bu durumda,  $ad - bc < 0$  ise kökler ters işaretlidir ve orijin bir eyer noktasıdır;  $ad - bc > 0$  ise kökler karmaşık sayılardır ve orijin bir merkez noktasıdır, sistem bir kapalı eğriye sahiptir. Böylece

$$\text{sistem (2) kapalı orbitlere sahiptir} \Leftrightarrow a + d = 0, \quad ad - bc > 0.$$

#### 4. Van der Pol denklemi.

İkinci mertebeden lineer olmayan önemli bir denklem

$$(6) \quad x'' + u(x)x' + v(x) = 0 \quad (\text{Lineard denklemi})$$

biçimindedir. Bu denklem, sönüm kuvveti  $u(x)$  in pozisyona bağlı olduğu (örneğin, kütle yoğunluğu değişken bir viskoz ortam içerisinde hareket ediyor olabilir) ve yay sabiti  $v(x)$  in yayın ne kadar gerildiğine bağlı olduğu (bu çoğu yaylar için belli ölçüde doğrudur), kütle-yay sistemi için bir model olarak düşünülebilir.

(6) denklemi

$$(7) \quad \begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -v(x) - u(x)y \end{aligned}$$

sistemine denktir. Belli koşullar altında, (7) sistemi sadece bir kararlı limit çembere sahiptir. Yani, (6) denklemi sadece bir periyodik çözüme sahiptir ve tüm yakın orbitler  $t \rightarrow \infty$  için periyodik çözüme yaklaşırlar. Lineard tarafından verilen ve aşağıdaki teoremden genelleştirilen koşullar bu sonucu garantilemektedir.

**Levinson-Smith Teoremi.** *Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim.*

- (a)  $u(x)$  çift ve süreklidir,
- (b)  $v(x)$  tekdir,  $x > 0$  için  $v(x) > 0$ , ve  $v(x)$  süreklidir,
- (c)  $V(x) = \int_0^x v(t)dt$  olmak üzere,  $x \rightarrow \infty$  için  $V(x) \rightarrow \infty$ ,
- (d)  $U(x) = \int_0^x u(t)dt$  olmak üzere, bir  $k > 0$  sayısı için:

$$\begin{cases} U(x) < 0, & 0 < x < k \\ U(x) > 0 \text{ ve artan,} & x > k \\ U(x) \rightarrow \infty, & x \rightarrow \infty \end{cases}$$

Bu durumda,

- (i) (7) sisteminin orijinde sadece bir kritik noktası vardır;
- (ii) (7) sisteminin sadece bir  $C$  kapalı orbiti (sıfır hariç) vardır ve bu orbit orijin civarında kararlı bir limit çemberdir.
- (iii) tüm diğer orbitler (sıfır hariç)  $t \rightarrow \infty$  için  $C$  ye sarmal şekilde yaklaşır.

İspat oldukça zor olduğundan vermiyoruz. Klasik bir uygulama olarak bir boş tüpteki akımı tanımlayan

$$(8) \quad x'' - a(1 - x^2)x' + x = 0 \quad (\text{van der Pol denklemi})$$

denklemdir. ( $a$  sabiti tüp sabitine bağlı olan bir pozitif parametredir.) Denklem sıfırdan farklı sadece bir periyodik çözüme sahiptir. Sezgisel olarak, denklemi lineer olmayan bir kütle yay sistemi olarak düşünün.  $|x|$  büyük olduğu zaman, restore eden ve söndüren kuvvetler büyük olur, dolayısıyla  $|x|$  in zamana göre azalması gerekir. Fakat  $|x|$  küçüldüğü zaman, sönüm negatif olur ve  $|x|$  in zamana göre artmasına neden olur. Böylece, çözümün salınım yapması ve denklemin tam olarak bir periyodik çözüme sahip olması makul bir gerçektir.

Periyodiklik gösteren olayları modelleyen sistemlerde ortaya çıktığı için, limit çemberlere çok fazla ilgi vardır.

Örneğin,  $f(x, y)$  ve  $g(x, y)$  ikinci dereceden polinomlar olduğu zaman, (1) sisteminin kaç tane limit çembere sahip olduğu bilinmemektedir. 20. yüzyıl ortalarında, tanınmış iki Rus matematikçi maksimum sayının üç olduğuna dair yüz sayfalık bir ispat yayınladı, fakat zor ispatlarında bir boşluk bulundu ve sonucu şüpheli durumda bıraktı; yirmi yıl sonra Çinli matematikçi Mingsu Wang dört limit çembere sahip bir sistem inşa etti. Kullandığı iki polinom hem küçük hem de büyük katsayılar içermektedir; bu nümerik hesabı zorlaştırdığından orbitlerin bir bilgisayar grafiği yoktur.

Bazı matematikçiler limit çemberlerin maksimum sayısının dört, bazıları altı olduğu yönünde, diğerleri ise bir maksimum sayının olmadığı yönde, kestirimlerde bulunmaktadır. Sağ tarafın ikinci dereceden daha yüksek polinomlar olduğu otonom sistemler için daha bile azı bilinmektedir. Bununla birlikte,  $f(x, y)$  ve  $g(x, y)$  nin polinomlar olduğu her hangi bir özel sistemde limit çemberlerin sayısının sonlu olduğunu söyleyen genel olarak kabul edilmiş bir ispat vardır.

Alıştırma. Bölüm 5D