MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

DERS 8. TEKLİK VE WRONSKİYEN

Diferansiyel eşitsizlik ve teklik. Değişken katsayılı ikinci mertebeden lineer denklemler için teklik teoremini ispatlayacağız.

Teorem 8.1 (Teklik Teoremi)**.** *$p(t)$ ve $q(t)$ fonksiyonları t_0'ı içeren bir I açık aralığında sürekli ise,*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t) \tag{8.1}$$

denkleminin I aralığında $y(t_0) = y_0$ ve $y'(t_0) = y_1$ başlangıç koşullarını sağlayan en fazla bir çözümü vardır.

İspat. y_1 ve y_2 herhangi iki çözümü olsun. $v = y_1 - y_2$ olsun. Bu durumda,

$$v'' + p(t)v' + q(t)v = 0, t \in I \text{ ve } v(t_0) = v'(t_0) = 0 \tag{8.2}$$

olur. Her $t \in I$ için $v(t) = 0$ olduğunu gösterelim.

$E(t) = v^2(t) + v'^2(t)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $E(t) \geq 0$ ve $E(t_0) = 0$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Türev alarak,

$$\begin{aligned} E'(t) &= 2v(t)v'(t) + 2v'(t)v''(t) \\ &= 2v'(t)\big(v(t) + v''(t)\big) \\ &= 2v'(t)\big(v(t) - p(t)v'(t) - q(t)v(t)\big) \\ &= -2p(t)\big(v'(t)\big)^2 + 2\big(1 - q(t)\big)v(t)v'(t) \end{aligned}$$

bulunur. Üçüncü eşitlikte (8.2) kullanılmıştır. Cauchy-Schwatz eşitsizliği kullanılırsa,

$$\big(1 - q(t)\big)v(t)v'(t) \leq (1 + |q(t)|)(v^2(t) + {v'}^2(t))$$

ve buradan

$$E'(t) \leq (1 + |q(t)|)v^2(t) + (1 + |q(t)| + 2|p(t)|){v'}^2(t) \leq KE(t)$$

elde edilir. Yukarıda $K \geq 1 + \sup_{t \in I}(|q(t)| + 2|p(t)|)$ bir sabittir.

Her $t \in I$ için $E(t) = 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Tersini kabul edelim, yani bir t_1 noktasında $E(t_1) > 0$ dır. $t_1 > t_0$ olsun. Diğer durum benzer şekilde yapılır.

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{-kt}E(t)\Big) = e^{-kt}\big(E'(t) - kE(t)\big) \leq 0$$

elde ederiz. Buna göre $e^{-kt}E(t)$, t nin azalan fonksiyonudur. Özel olarak,

$$e^{-kt_1}E(t_1) \leq e^{-kt_0}E(t_0) = 0$$

olur. Bununla birlikte, $E(t_1) \leq 0$ çelişkiye sebep olur ve ispatı tamamlar. □

Yukarıdaki yöntem lineer ve lineer olmayan denklemlerin daha geniş sınıfı için geçerlidir. Yöntem, $p(t)$ ve $q(t)$ sınırlı ve y bir karmaşık çözüm olduğu zaman da uygulanır.

Wronskiyen. Türevlenebilir iki u ve v fonksiyonunun Wronskiyeni[1],

$$W(u,v;t) = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = uv' - vu' \tag{8.3}$$

olarak tanımlanır. Fonksiyonlara ya da t ye bağımlılığını vurgulamak için $W(t)$ ya da $W(u,v)$ yazıyoruz.

p ve q sürekli fonksiyonlar olmak üzere,

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{8.4}$$

lineer denkleminin incelenmesinde, Wronskiyen aşağıdaki sonuç yardımıyla kolaylıkla hesaplanabilir.

Teorem 8.2 (Abel özdeşliği[2]). *u ve v, (8.4)'ün çözümleri olsun. $W(u,v;t)$ Wronskiyeni birinci mertebeden*

$$W' + p(t)W = 0, \qquad t \in I \tag{8.5}$$

lineer denklemini sağlar. Bundan dolayı

$$W(u,v;t) = W(u,v;t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}$$

olur.

1 Polanyalı matematikçi Jozef Hoene-Wronski'den sonra adlandırılmıştır. 1811 yılında W için determinant formunu vermiştir.

2 1826 yılında Norveç matematikçi Hendik Abel tarafından keşfedildi.

İspat. Türev alınırsa $W'(u,v) = uv'' - u''v$ elde edilir. (8.4) ten u'' ve v'' yerine konur ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa istenilen elde edilir.

Sonuç 8.3. *(8.4) ün iki çözümünün Wronskiyeni ya özdeş olarak pozitif ya özdeş olarak negatif ya da özdeş olarak sıfırdır.*

Wronskiyen ve lineer bağımlılık. Eğer

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n = 0 \ \forall t \in I$$

bağıntısı $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ olmasını gerektiriyor ise, $u_1, u_2, \dots, u_n$ fonksiyonlar kümesine I da lineer bağımsızdır denir. Aksi halde, fonksiyonlar lineer bağımlı olarak adlandırılır. Eğer u ve v lineer bağımlı fonksiyonlar ise, u ve v doğu orantılıdır.

Wronskiyen, lineer bağımlılık için basit bir kriter verir.

Lemma 8.4. *u ve v, bir I aralığında türevlenebilir fonksiyonlar olsun.*

(i) *u ve v lineer bağımlı ise, her $t \in I$ için $W(u,v,;t) = 0$ dır.*

(ii) *I aralığında $W(u,v,;t) = 0$ ve $v \neq 0$ ise, u ve v I da lineer bağımlıdır.*

Bir aralıktaki $W(u,v) = 0$ koşulu, genel olarak u ve v nin lineer bağımlılığını garanti etmez. Örneğin, $W(t^3, |t|^3) = 0$ dır fakat t^3ve $|t|^3$ fonksiyonları 0'ı içeren herhangi bir açık aralıkta lineer bağımsızdır.

Eğer u ve v ikinci mertebeden bir lineer diferansiyel denklemin çözümleri ise, Lemma 8.4 deki (ii) den daha kuvvetli bir sonuç geçerlidir.

Teorem 8.5. *p ve q bir I aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere, u ve v (8.4) ün çözümleri olsun. Eğer bir $t_0 \in I$ noktasında $W(u,v;t_0) = 0$ ise, u ve v lineer bağımlıdır ve böylece her $t \in I$ için $W(u,v;t) = 0$ dır. Eğer u ve v lineer bağımsız ise bu durumda I nın hiçbir noktasında $W(u,v;t) = 0$ değildir.*

İspat. Eğer $W(u,v;t_0) = 0$ ise, $\big(u(t_0), u'(t_0)\big)$, $\big(v(t_0), v'(t_0)\big)$ vektörleri lineer bağımlıdır. Bu nedenle

$$c_1u(t_0) + c_2v(t_0) = 0$$
$$c_1u'(t_0) + c_2v'(t_0) = 0$$

sağlanmak üzere c_1 ve c_2 aynı anda sıfır olmayacak şekilde seçilebilir.

$y(t) = c_1 u(t) + c_2 v(t)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. y, u ve v nin bir lineer kombinasyonu olduğundan (8.4) denkleminin çözümüdür. Üstelik $y(t_0) = y'(t_0) = 0$ başlangıç koşullarını da sağlar. Teklik teoreminde her $t \in I$ için $y(t) = 0$ dır. Bu ise u ve v nin I da lineer bağımlı olması anlamına gelir ve birinci iddiayı ispatlar. İkinci iddia bu durumda birincinin açık sonucudur. □

(8.4) denkleminin aykırı nokralara sahip olmaması gerçeği yukarıdaki teoremde son derece önemlidir. Örneğin, t^2 ve t^3 fonksiyonları

$$t^2 y'' - 4ty' + 6y = 0$$

denkleminin lineer bağımsız çözümleridir. Fakat $t = 0$ noktasında $W(t^2, t^3) = t^4$ sıfıra eşittir.

Wronskiyen kavramı, ikinci mertebeden bir lineer denklemin bir özel çözümü ve çözümlerin bir bazının bulunmasında dikkate değer bir uygulamaya sahiptir.

Teorem 8.6. *u, (8.4) denkleminin sıfırdan farklı bir çözümü olsun.*

(i) *(8.4) denkleminin, u ile lineer bağımsız ikinci v çözümü, $P(t) = \int p(t)dt$ olmak üzere,*

(8.6)
$$v(t) = c\, u(t) \int \frac{e^{-P(t)}}{u^2} dt, \qquad c \neq 0$$

ile verilir.

(ii) *Homogen olmayan*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t)$$

denkleminin bir özel çözümü $y = uz$ ile verilir. Burada

$$(e^P u^2 z') = e^P f, \qquad P(t) = \int p(t)dt$$

dir.

İspat. (i)

$$\left(\frac{v}{u}\right)' = \frac{uv' - u'v}{u^2} = \frac{W(u,v)}{u^2}$$

dir. İntegral alınır ve Abel özdeşliği kullanılırsa istenilen elde edilir.

(ii) Denklemde $y = uz$ koyulursa,

$$uz'' + (zu' + pu)z' = f$$

elde ederiz. Bu denklem z' ye göre birinci mertebeden bir lineer denklemdir. ue^P nin denklemin bir integral çarpanı olduğunu hesaplamak basittir. Denklem bu integral çarpanı ile çarpılırsa

$$z''u^2e^P + e^P(2uu' + pu^2)z' = ue^Pf$$

denklemi elde edilir. Bu ise iddiayı ispatlar. □

Örnek 8.7. $y = t^m$ biçiminde çözüm

(8.7) $$t^2y'' - 13ty'' + 49y = 0, \quad t > 0$$

denkleminin $u = t^2$ çözümüne sahip olduğunu gösterir. u ile lineer bağımsız ikinci çözümü bulmak için

$$p(t) = -\frac{13}{t}, \quad P(t) = -13\log t \quad \text{ve} \quad e^{-P(t)} = t^{13}$$

buluruz. Yukarıdaki teorem

$$v = t^7 \int t^{13}t^{-14}dt = t^7 \log t$$

verir. Bu nedenle, c_1, c_2 keyfi sabitler olmak üzere,

$$t^7(c_1 + c_2 \log t)$$

genel çözümdür.

Şimdi de homogen olmayan

$$t^2y'' - 13ty' + 49y = t^2f(t), \qquad t > 0$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. $u = t^7$ alın. Yukarıdaki teoremden

$$z' = \frac{1}{t}\int \frac{f(t)}{t^6}dt$$

olmak üzere, $w = uz$ özel çözümdür.

Örneğin, $f(t) = t^m$ ise

$$w(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{m+2}}{(m-5)^2}, & m \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}t^2(\log t)^2, & m = 0 \end{cases}$$

dir.