

MIT AçıkDersSistemi

<http://ocw.mit.edu>

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

Bu bilgilere atıfta bulunmak veya kullanım koşulları hakkında bilgi için

<http://ocw.mit.edu/terms> web sitesini ziyaret ediniz.

18.034 PROBLEM SETİ 1

1. (a) $a^2 - a - 2 = 0$ eşitliğini gerçekleyen a sayıları için $y = x^a$ fonksiyonunun $x^2 y'' = 2y$ denklemini sağladığını gösteriniz. Böylece x^2 ve x^{-1} çözümlerini elde ediniz. İlk çözümün $-\infty < x < \infty$ ikinci çözümün ise $-\infty < x < 0$ veya $0 < x < \infty$ aralığında geçerli olduğuna dikkat ediniz. Bu, Euler tipi denklemler olarak bilinen lineer homojen denklemlerin geniş bir sınıfının tipik bir özelliğidir. Bu sınıf denklemlerde, $y = x^a$ yerine konulursa daima a ya bağlı cebirsel bir denklem elde edilir.

(b) $x^2 y'''' = 2y''$ denkleminin, a sıfırdan farklı bir sayı olmak üzere, $y = x^a$ şeklinde bir çözümü vardır. a sayısının muhtemel değerleri nelerdir?

2. $y = f(x)$ fonksiyonunun $dy = 4y \sin 2x dx$ denklemini ve $y(\pi) = e$ başlangıç koşulunu sağladığını kabul edelim. Bu alıştırmamızın amacı $y(\pi/6)$ değerini bulmaktır.

(a) $\ln y = c - 2 \cos 2x$, $y > 0$ ifadesini elde etmek için değişkenlerine ayırınız ve integral alınız. Başlangıç koşulunu kullanarak $c = 3$ olduğunu gösteriniz ve buradan $y(\pi/6)$ değerini hesaplayınız.

(b) $y(\pi) = e$ başlangıç koşulu $x = \pi$ nin $y = e$ ye karşılık geldiği anlamına gelir. Benzer şekilde $a = y(\pi/6)$ olduğu zaman $x = \pi/6$ 'ya $y = a$ karşılık gelir. Aynı değişkenlere karşılık gelen limitler arasında integral alınır

$$\int_e^a \frac{dy}{y} = \int_{\pi}^{\pi/6} 4 \sin x dx$$

elde edilir. Belirli integralleri hesaplayınız ve oluşan denklemden a yı çözünüz.

(c) Eğer $x dy + 3y dx = 0$ ve $y(-\pi) = e$ ise $y(\pi)$ değerini bulamazsınız. Neden?

3. Birkhoff-Rota, s. 5, p.3.

4. (a) $y_1(x) = 0$ ve $y_2(x) = x^{3/2}$ nin $y' = (3/2)y^{1/3}$ denkleminin $x \geq 0$ için çözümleri olduğunu gösteriniz.

(b) (a) şıkkındaki denklemin $(0,0)$ noktasından başlayan negatif olmayan tüm çözümlerinin y_1 ve y_2 arasında kaldığını ve

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < c \\ (x - c)^2 & \text{for } x \geq c \end{cases}$$

çözümünün bu çözümlerin meydana getirdiği huniyi doldurup doldurmadığını tartışınız.

5. Birkhoff-Rota, s. 11, p.7. (Baskı hatası: k, n dir.)

6.(Bernoulli denklemi). $n \neq 1$ olmak üzere $y' + p(x)y = q(x)y^n$ biçimindeki diferansiyel denklemdir.

(a) Bernoulli denkleminin $u = y^{1-n}$ değişken dönüşümüyle* lineer denkleme indirgeniğini gösteriniz. (Denklemin her iki tarafını y^n ile bölerek başlayın.)

(b) $y' + y = xy^3$ Bernoulli denklemini, (a) şıkkındaki metodu kullanarak, çözünüz.

* Bu dönüşüm 1696 yılında Leibnitz tarafından bulunmuştur.