MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

Bu bilgilere atıfta bulunmak veya kullanım koşulları hakkında bilgi için http://ocw.mit.edu/terms web sitesini ziyaret ediniz.

18.034 PROBLEM SETİ 4 ÇÖZÜM ANAHTARI

1. (a) $u' = u_1'v + u_1v'$, $u'' = u_1''v + 2u_1'v' + u_1v''$, $u''' = u_1'''v + 3u_1''v' + 3u_1'v'' + u_1v'''$.

(b) Denklem, v' ne göre $(2-x)v''' + (3-x)v'' = 0$ denklemine indirgenir. Bu nedenle, $v = -c_1xe^{-x} + c_2x + c_3$ olur ve buradan $u = -c_1x + c_2xe^x + c_3e^x$ dır.

2. (a) $\{x^\alpha, x^\beta\}$ homojen denklemin (çözüm uzayının) bir bazıdır.

$$u(x) = \frac{1}{\alpha-\beta}(x^\alpha \int f(x)x^{1-\alpha}dx - x^\beta \int f(x)x^{1-\beta}dx)$$

(b) $\{x^\alpha, x^\alpha \log x\}$ homojen denklemin bir tabanıdır.

$$u(x) = x^\alpha \log x \int f(x)x^{1-\alpha}dx - x^\alpha \int f(x)x^{1-\alpha} \log x\, dx$$

3. $\{\cos kx, \sin kx\}$ homojen denklemin bir bazıdır. $W(\cos kx, \sin kx) = k$. Bu yüzden, Green fonksiyonu

$$G(x,t) = \frac{1}{k}(\cos kx \sin kt - \cos kt \sin kx) = \frac{1}{k}\sin k(x-t)$$

dir.

4. (a) Sırasıyla, $(D-\alpha)^{m+1}$, $(D^2+\beta^2)^{m+1}$, $(D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2+\beta^2)$.

(b) $\{\cos x, \sin x, e^{3x}, xe^{3x}\}$ homojen denklemin çözümlerinin bir bazıdır. $e^{3x}(10x+1)$ fonksiyonunu sıfırlayan bir operatör $(D-3)^2$ dir. Bu yüzden, bir özel çözümü

$$u = c_1\cos x + c_2 \sin x + (c_3 + c_4x + c_5x^2 + c_6x^3)e^{3x}$$

şeklinde kurabilirsiniz. Düz bir hesapla $u_p = x^2(2x-3)e^{3x}$ olduğunu gösterir. Buradan, genel çözüm

$$u = c_1\cos x + c_2 \sin x + (c_3 + c_4x + c_5x^2 + c_6x^3)e^{3x} + x^2(2x-3)e^{3x}$$

olur.

5. (a) $p(\lambda)$ reel sayılar cismi üzerinde $\lambda + a$ ve $\lambda^2 + p\lambda + q$, $(a, p, q \in \mathbb{R})$ olarak çarpanlarına ayrılır. Denklem asimptotik kararlı olduğundan, a, p, q sayılarının hepsi pozitiftir.

(b) Denklemin asimptotik kararlı olmadığını kabul edelim. Bu $a \geq 0$ sayısının karakteristik denklemin kökü olduğu anlamına gelir. Bu ise

$$p(a) = a_n + a_1a^{n-1} + \cdots + a_n \geq a_n > 0$$

olacağından çelişkiye sebep olur.

(cc) BY-NC-SA

6. (a) $y \to \infty$ için $\frac{|y^2-0|}{|y-0|} = |y| \to \infty$ olur. Bu yüzden, Lipschitz koşulu sağlanmaz.

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

Başlangıç değer probleminin çözümü $t \to \frac{1}{y_0}$ için $y = \frac{y_0}{1-ty_0} \to \infty$ olmaktadır.

(b) $y \to 0$ için $\frac{|y^{2/3}-0|}{|y-0|} = \left|y^{-1/3}\right| \to \infty$ olur. Bu yüzden, Lipschitz koşulu sağlanmaz. Başlangıç değer problemi

$$\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$y_1(t)$ =0 ve $y_2(t) = \left(\frac{t}{3}\right)^3$ çözümlerine sahiptir.

(cc) BY-NC-SA www.acikders.org.tr