MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

18.034 PROBLEM SETİ 5

1. (a) $f_n(t)$, $n = 1,2,\ldots$, $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar olsun ve $\{f_n(t)\}$ dizisi $f(t)$ fonksiynuna [a,b] aralığında düzgün yakınsasın.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

olduğunu gösteriniz.

(b) Yukarıdaki eşitliğin sağlanmadığı $[a,b]$ üzerinde tanımlı bir $\{f_n(t)\}$ dizisi kurunuz.

2. f, {(t,x): $|t-t_0| \le T, |x-x_0| \le K\}$ dikdörtgeni üzerinde sürekli olsun ve Lipschitz sabiti L olmak üzere Lipschitz koşulunu sağlasın. $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$, başlangıç değer probleminin çözümü $x(t)$ ve $x_n(t)$ Picard iterasyonlarının aynı t aralığında mevcut olduğunu kabul edelim. Bu aralık üzerinde, $|f| \le M$, $(t,x) \in \{(t,x): |t-t_0| \le T, |x-x_0| \le K\}$, olmak üzere

$$|x(t) - x_n(t)| \le ML^n \frac{T^{n+1}}{(n+1)!} e^{LT}$$

olduğunu gösteriniz.

3. f, {(t,x): $|t-t_0| \le T, |x-x_0| \le K\}$ dikdörtgeni üzerinde reel değerli sürekli bir fonksiyon olsun.

(1) $$x'' = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0, \; x'(t_0) = x_1$$

başlangıç değer problemini ve

(2) $$x(t) = x_0 + (t-t_0)x_1 + \int_{t_0}^{t}(t-s)\,f(s,x(s))\,ds$$

integral denklemini göz önüne alalım.

(a) Bir ϕ fonksiyonunun (1) başlangıç değer probleminin çözümü olmasının, (2) integral denkleminin çözümü olmasına eşdeğer olduğunu gösteriniz.

(b) $\{x_n\}$ (2) integral denkleminin ardışık yaklaşımlar dizisi olsun. Yani, $x_0(t) = x_0$ ve

$$x_n(t) = x_0 + (t-t_0)x_1 + \int_{t_0}^{t}(t-s)\,f(s,x_{n-1}(s))\,ds, \qquad n = 1,2,\ldots$$

Eğer f fonksiyonu {(t,x): $|t-t_0| \le T, |x-x_0| \le K\}$ dikdörtgeni üzerinde sürekli ve Lipschitz ise, $\{x_n(t)\}$ dizisinin $|t-t_0| \le \min(T, K/B)$ aralığı üzerinde (1) probleminin çözümüne yakınsadığını gösteriniz. Burada, $B = |x_1| + MT/2$ ve $(t, x) \in \{(t, x): |t - t_0| \leq T, |x - x_0| \leq K\}$ için $|f| \leq M$ dir.

4. (a) İyi bilinen* $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ eşitliğini kullanarak $\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)(s) = \sqrt{\pi/s}$ olduğunu gösteriniz.

(b) (a) şıkkını kullanarak, $s > 0$ için $\mathcal{L}(\sqrt{t})(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$ olduğunu gösteriniz.

5. (a) $\mathcal{L}(e^{t^2})(s)$ dönüşümünün $s > a$ biçimindeki hiçbir bir aralıkta mevcut olmadığını gösteriniz.

(b) k reel sayısının hangi değerleri için $\mathcal{L}(1/t^k)(s)$ mevcuttur?

6. Laplace dönüşümleri aşağıda verilen fonksiyonları bulunuz:

(a) $\frac{5s-6}{s^2+4} + \frac{2}{s}$, (b) $\frac{9s+3}{9s^2+6s+19}$.

* Sizin için iki kere iki dört yapar her neyse bir matematikçi için aşikar odur. Liouville bir matematikçiydi –Lord Kelvin