

MIT AçıkDersSistemi

<http://ocw.mit.edu>

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

Bu bilgilere atıfta bulunmak veya kullanım koşulları hakkında bilgi için

<http://ocw.mit.edu/terms> web sitesini ziyaret ediniz.

18.034 PROBLEM SETİ 8

1. A^* , $n \times n$ boyutlu A matrisinin eşlenik transpozunu olmak üzere, eğer $A = A^*$ ise A matrisine Hermityen denir. Yani $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, ($1 \leq i, j \leq n$) dir. Eğer A reel ise $A^* = A^T$ dir ve Hermityen ile Simetrik'in anlamı aynıdır. Eğer $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ve $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, \mathbb{R}^n de sütun vektörler ise, $\vec{u} \vec{v}^* = u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \dots + u_n \overline{v_n}$ ve $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \vec{u}^*$ dir.

$A = A^*$ ise A matrisinin tüm özdeğerlerinin reel olduğunu gösteriniz. Ayrıca, $A = A^*$ ise farklı λ, μ özdeğerlerine karşı gelen \vec{u}, \vec{v} özvektörleri ortogondur. Yani $\vec{u} \vec{v}^* = 0$ dir.

2. A ve B $n \times n$ matrisler ise,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{At} e^{Bt} - e^{Bt} e^{At}}{t^2}$$

limitini hesaplayınız.

3. (a) A özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ olan 3×3 boyutunda bir matris olsun. $(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I)$ matrisinin sıfır olmayan sütunlarının λ_1 özdeğerine karşı gelen özvektörler olduğunu gösteriniz.

(b) $p(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 1)$, 3×3 boyutlu A matrisinin karakteristik polinomudur. e^{At} matrisini bulunuz.

4. (a) $x' = 6x + y$, $y' = 4x + 3y$ sistemi için orijinin kararsız düğüm olduğunu gösteriniz.

(b) Eğer $y = mx$ bir yörünge ise, $m = 1$ veya $m = -4$ olduğunu gösteriniz.

(c) (x, y) - düzleminde yörüngeleri çizin.

5. Problem 4'ü $x' = -3x + 2y$, $y' = -3x + 4y$ sistemi için tekrarlayınız.

6. $p(t), q(t)$ fonksiyonları bir t aralığı üzerinde sürekli olmak üzere $u'' + p(t)u' + q(t)u = 0$ diferansiyel denklemini göz önüne alınız.

(a) $u(t) = r(t) \sin \theta(t)$, $u'(t) = r(t) \cos \theta(t)$ olsun.

$$\frac{d\theta}{dt} = \cos^2 \theta + p(t) \cos \theta \sin \theta + q(t) \sin^2 \theta,$$

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} = -p(t) \cos^2 \theta + (1 - q(t)) \cos \theta \sin \theta$$

olduğunu gösteriniz.

(b) (a) şikkından yararlanarak, $q(t) > p^2(t)/4$ olduğunda çözümlerin salınımlı ve $q(t) < 0$ olduğunda salınımsız olduğunu irdeleyiniz.

