

MIT AçıkDersSistemi

<http://ocw.mit.edu>

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

Bu bilgilere atıfta bulunmak veya kullanım koşulları hakkında bilgi için

<http://ocw.mit.edu/terms> web sitesini ziyaret ediniz.

18.034 PROBLEM SETİ 9

1. (a) Eğer $V(x, y)$ sürekli türevlenebilen bir fonksiyon ise,

$$x' = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad y' = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

düzlem otonom sisteminin her bir çözümünün $V(x, y) = \text{sabit}$ seviye eğrisi üzerinde olduğunu gösteriniz.

(b)

$$x' = x(2y^3 - x^3), \quad y' = -y(2x^3 - y^3)$$

düzlem otonom sisteminin çözüm eğrilerinin, c keyfi bir sabit olmak üzere, $x^3 + y^3 - 3cxy = 0$ biçiminde gösteriniz. Bazı çözüm eğrilerinin grafiğini çiziniz.

2. f ve g sürekli türevlenebilen fonksiyonlar olmak üzere,

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y)$$

düzlem otonom sistemini göz önüne alınız.

(a) $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (x_1, y_1)$ ise, (x_1, y_1) in bir kritik nokta olduğunu gösteriniz.

(b) (x_0, y_0) kritik nokta civarında, sistem

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Burada, (x, y) ye bağlı a, b, c, d fonksiyonları

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

ifadesini sağlamaktadır.

3. Yarışma türündeki

$$x' = x(3 - 2x - y), \quad y' = y(3 - x - 2y)$$

sisteminin kritik noktalarını bulunuz, kararlılığını ve kritik noktalar civarında davranışını belirleyiniz.

4. Problem 3'ü

$$x' = x(-1 - x + y), \quad y' = y(3 - x - y)$$

av-avcı sistemi için tekrarlayınız.

5. (a) $x' = f(x)$ sistemi için $x = 0$ kritik noktasının asimptotik kararlı olmasının, bir $\delta > 0$ sayısı için $0 < |x| < \delta \Rightarrow xf(x) < 0$ olması ile eşdeğer olduğunu gösteriniz.

(b) $x' = f(x)$ sistemi için $f(0) = 0$ ve $f'(0) < 0$ ise, $x = 0$ kritik noktasının asimptotik kararlı olduğunu gösteriniz.

6. (a)

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

olsun. $x' = -f(x)$ sisteminin $x = 0$ kritik noktasının nötral kararlı olduğunu fakat asimptotik kararlı olmadığını gösteriniz.

(b) Düzlem otonom

$$x' = y - x^3, \quad y' = -x^3$$

sistemin $(0,0)$ kritik noktasının, $(0,0)$ noktasında lineerleştirildiğinde kararsız olmasına rağmen, kararlı olduğunu gösteriniz.

