18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

NÜMERİK İNTEGRASYON İÇİN EULER YÖNTEMİNİN KISITLAMALARI

Laura Evans

1. Giriş

Her diferansiyel denklem açık olarak çözülemeyebilir. Belirli bir noktada y değerini bilmemiz gerektiğinde bu problemli olabilir. Bu durumda nümerik integrasyon, bilinen başlangıç koşullarına göre y değerlerini tahmin etmemizi sağladığı için faydalıdır.

Nümerik integrasyon yöntemlerinden biri de, aşağıda ele alacağımız *Euler yöntemidir*. En kesin yöntem olmasa da, en basit yöntemlerden biri olduğu için bu yöntemleri anlamak için yararlıdır. Bu yöntem bilinen bir noktada eğimi hesaplayıp, o yönde bir h küçük adımı ilerleyerek ve gelinen her yeni noktada aynı işlemi tekrarlayarak çalışır.

Euler yöntemi bir iteratif yöntemdir.

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big), \qquad y(a) = y_0 \tag{1}$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım.

h büyüklüğündeki adımlarla ilerliyoruz, bu yüzden $x_0 = a$ ve $x_{n+1} = x_n + h$ olur. Her adım için bu durumda

$$y_{n+1} = y_n + h(x_n, y_n)$$

dir. Verilen başlangıç değerlerine göre bu, x noktasında y için yaklaşık değer hesaplamamızı sağlar. Euler yöntemi, sayısal bir yöntem olarak basitliğinden dolayı, bu makalede[1] ele alacağımız gibi sınırlı uygulama alanına sahiptir.

2. Hata

Önerme 2.1. *Euler yöntemi kesinliği o(h) olan bir çözüm üretir.*

İspat. $y(x)$ için, $a + h$ noktasında Taylor açılımını göz önüne alalım:

$$y(a+h) = y(a) + hy'(a) + o(h^2).$$

Fakat, Euler yöntemi

[1] Bu tartışma Euler yöntemi üzerine Wikipedia'daki yazıdaki bazı örneklerden ilham alarak Bitkhoff-Rota'nın 8. bölümünde bulunan materyale dayanmaktadır.

$$y(a+h) = y(a) + hy'(a).$$

verir. Hata iki denklem arasındaki fark olacağından ilk adımdaki hatanın $o(h^2)$ olduğunu görürüz.

Euler yöntemini kullanılmasının yolu genellikle h değerini istenen değer ile bilinen değerin farkının belli bir oranına eşitlemektir. Böylece, istenen değere ulaşmamız için gereken adım sayısı $o\left(\frac{1}{h}\right)$, istenen değere kadar biriken hata ise $o(h)$ olur.

Bunun bir sonucu, cevabımızın kesinliğini bir mertebe daha arttırmak istiyorsak önceki h'ın onda biri olan yeni bir h kullanma zorunluluğudur. Bu daha fazla hesap yapmamız anlamına gelmektedir. Bu yüzden, Euler yönteminin yüksek kesinliğe sahip çözüm bulmak için uygun olmadığını görürüz.

3. Deneme

Farklı $k < 0$ değerleri için, $y' = ky,\ y(0) = 1$ probleminde Euler yönteminin kullanılmasıyla elde edilen çözümlerin davranışına bakalım. Denklemin $y = e^{kx}$ şeklinde bir çözümü olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla bu yöntemle elde ettiğimiz değerleri gerçek değerlerle karşılaştırabiliriz.

Önce $k = -1$ durumunu ele alalım. Gerçek değerler ve $h = 0.5$ için Euler yöntemiyle elde edilen değerler aşağıda veriliyor.

x	y_n	y
0	1	1
0.5	0.5	0.61
1	0.25	0.37

Bu değerlerin çok hassas olmadığı açıktır. Yukarıda gördüğümüz gibi h değerini küçülterek hassasiyeti arttırabiliriz. Aşağıdaki tablo, $h = 0.1$ için değerlerini gösteriyor.

x	y_n	y
0	1	1
0.1	0.90	0.90
0.2	0.81	0.82
0.3	0.73	0.74
0.4	0.66	0.67
0.5	0.59	0.61
0.6	0.53	0.55
0.7	0.48	0.50
0.8	0.43	0.45
0.9	0.39	0.41
1	0.35	0.37

Bu tabloda, bizim test örneğimizde, daha küçük h değerlerinin y için daha kesin değerler verdiğini görüyoruz. Buna ek olarak, x arttıkça hatanın artmasına rağmen, hatanın h'den küçük kaldığını görüyoruz.

4. Bozulma

Şimdi, önceki bölümdeki aynı denklemi daha büyük |k| değerleri için ele alalım. Özel olarak, $k = -3, k = -11, k = -21$ değerlerine bakacağız. Önce, $h = 0.5$ seçelim. Okuyuculara, aşağıdaki tablodaki değerlerin iki ondalık basamağa yuvarlandığını hatırlatalım.

	$k=-3$		$k=-11$		$k=-21$	
x	y_n	y	y_n	y	y_n	y
0	1	1	1	1	1	1
0.5	0.70	0.22	-0.1	0	-1.1	0
1	0.49	0.05	0.01	0	1.21	0

Seçilen ilk iki k değeri için değerlerin makul olduğunu söyleyebiliriz. Ancak $k = -21$ için Euler yönteminin verdiği değerlerde bir terslik görünüyor. h değerini küçülterek bu sorunu çözüp çözemeyeceğimize bakalım.

Önceki gibi $h = 0.1$ seçelim. Yine elde edilen değerler, iki ondalık basamağa yuvarlanmıştır.

x	$k=-3$		$k=-11$		$k=-21$	
	y_n	y	y_n	y	y_n	y
0	1	1	1	1	1	1
0.1	0.7	0.74	-.1	0.33	-1.1	0.12
0.2	0.49	0.55	0.01	0.11	1.21	0.01
0.3	0.34	0.41	0	0.04	-1.33	0
0.4	0.24	0.3	0	0.01	1.46	0
0.5	0.17	0.22	0	0	-1.61	0
0.6	0.12	0.17	0	0	1.77	0
0.7	0.08	0.12	0	0	-1.95	0
0.8	0.06	0.09	0	0	2.14	0
0.9	0.04	0.07	0	0	-2.36	0
1	0.03	0.05	0	0	2.59	0

Bu tablodan problemin hallolmadığını hatta daha da kötüleştiğini görüyoruz. $k = -21$ için Euler yöntemiyle elde edilen değerler, eğriye yaklaşmak bir yana, artan bir genlikle eğrinin etrafında salınım yapmaktadırlar. Problemin ne olduğunu bütünü dikkate alarak görmek kolaydır. Yöntem h uzunluğunda bir adımı kullanırken, y' değerinin bu ufak mesafede sabit kalacağını varsaymaktadır. Bununla birlikte, $y' = 21y$ için bu doğru değildir. h mesafede bir noktada y' değeri, h ye göre çok daha fazla değişir. Aynı şey $y' = ky, k << 0$ şeklinde bir denklemimiz olduğu zamanda doğrudur.

Bu tartışmayı, y' nün y_0 etrafında hızlı değiştiği zaman, Euler yönteminin kesin olmayacağını hatırlayarak genişletebiliriz. Böylece, Euler yönteminin kullanımı, x_0'ın bir ϵ komşuluğunda $\max|y''(x_0 \pm \epsilon)| \ll \infty$ olduğu durumlarla sınırlı olması gerekmektedir.

5. İyileştirmeler

Euler yöntemi, *birinci mertebeden* bir nümerik yöntemdir: her yeni değer, sadece kendisinden bir önceki değere bağlıdır. Daha önce gördüğümüz gibi, yöntemin etkilere açık olmasının nedenlerinden biri de budur.

Euler yöntemini geliştirmenin bir yolu ikinci mertebeden bir versiyonunu kullanmaktır:

$$
\begin{aligned}
&y(a) = y_a \\
&y_1 = hf(a, y_0) \\
&y_{n+2} = y_n + \frac{h}{2}\big(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\big)
\end{aligned}
$$

Bu durumda y_2'nin ne olduğuna bakalım:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_0 + \frac{h}{2}\big(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)\big) \\ &= y_a + \frac{h}{2}\Big(y'(a) + f\big(h, hf(a, y_0)\big)\Big) \\ &= y_a + \frac{h}{2}\Big(y'(a) + f\big(h, hy'(a)\big)\Big) \\ &= y_a + \frac{h}{2}\big(y'(a) + y'(a) + hy''(a)\big) \\ &= y_a + hy'(a) + \frac{h^2}{2}y''(a) \end{aligned}$$

olur.

Bu $x = a$ noktası civarında, $y(x)$'in ikinci dereceden Taylor açılımına sadece $o(h^3)$ kadar uzaktır. Yukarıdaki ispata benzer bir yaklaşımla, aynı h değeri kullanılsa bile, orijinal Euler yönteminden çok daha duyarlı bir sonuç vereceğini söyleyebiliriz.

6. Sonuç

Euler yönteminin yukarıdaki incelemesi sonrasında, yöntemin hangi durumlarda kullanılması gerektiği ve hangi durumlarda başka yöntemlerin uygun olacağına dair pek çok şey öğrendik. Özellikle, Euler yönteminin, $|y'|$ nün başlangıç değeri civarında büyük değerler aldığı durumlarda ve hesaplama açısından verimli bir yöntemin gerektiği durumlarda, en iyi seçim olmadığını gördük. Hemen önceki değerden daha fazlasını kullanarak yöntemi biraz geliştirebilmemize rağmen, bu iyileştirme sınırlıdır. Bu nedenle, pek çok durumda Euler yöntemi en uygun nümerik yöntem değildir.