18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

Yüksek Mertebeden Taylor Yöntemleri

Marcelo Julio Alvisio & Lisa Marie Danz

16 Mayıs 2007

1. Giriş

Diferansiyel denklemler bilim ve mühendisliğin yapı taşlarından biridir. Diferansiyel denklemlerin açık çözümlerinin bulunmadığı ya da çözüm bulmanın zor olduğu durumlarda, bilim adamları nümerik yöntemler kullanırlar. Yaklaşık çözüm için kullanılan pek çok nümerik yöntem olsa da biz bu projede bunlardan bazılarını incelemeyi seçtik.

Diferansiyel denklemleri nümerik olarak hesaplarken iki koşula ihtiyacımız vardır. Birincisi çözümün başlangıç değerlerine sürekli bağımlı olmasıdır. Yoksa, bir sayının bilgisayar sistemlerinde gösteriminde ortaya çıkan hata gerçek çözümden çok uzak sonuçlar üretir. İkincisi ise çözümün diferansiyel denkleme sürekli bağımlı olmasıdır. Yoksa, diferansiyel denklemin çözümünde kullandığımız yöntemin doğru sonuç vermesini bekleyemeyiz.

Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için kullanılan en temel yöntemler, Euler yöntemi, Yüksek Mertebeden Taylor yöntemi ve Runge-Kutta yöntemleridir. Bu projede Yüksek Mertebeden Taylor yöntemine odaklanacağız. Bu yöntem, denklemin çözümünün Taylor polinomunu kullanır. Sıfırıncı mertebeden terime bir önceki adımın değerini kullanarak yaklaşır (ilk adım için bu verilen başlangıç değeridir), daha sonraki terimler için ise diferansiyel denklem kullanılır. Biz buna Yüksek Mertebe Taylor yöntemi diyoruz. Düşük mertebe yöntemi Euler yöntemidir.

Belli koşullar altında, n kullanılan mertebe olmak üzere, Yüksek Mertebeden Taylor yöntemi hatayı $o(h^n)$ ile sınırlar. Bu fikri sınamak için birkaç örnek vereceğiz. Yöntemin etkinliğini ölçmek için duyarlılık ve verimlilik olmak üzere iki ana parametreye bakacağız.

2. Yüksek Mertebeden Taylor Yönteminin Teorisi

Tanım 2.1 *$y'(t) = f(t, y)$, $y(a) = c$ başlangıç değer problemini göz önüne alalım. $h = (b - a)/K$ olmak üzere, $b > a$ için $y(b)$'nin n. mertebeden K adımlı Taylor yaklaşımı y_K ile verilmektedir. Burada $\{y_i\}$ ler yinelemeli olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:*

$$t_0 = a$$

$$y_0 = y(a) = c$$

$$t_{i+1} = t_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\frac{df}{dt}(t_i, y_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!}\frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}(t_i, y_i)$$

y(t) açık olarak bilindiği zaman, yukarıdaki gibi bir tanımı Taylor serisi açılımı cinsinden formüle etmek anlamlıdır. Yaptığımız şey $y'(t)$ için $f(t, y), y'(t)$ için $f_y(t, y)$, … kullanmaktır. Bir sonraki işimiz bu yaklaşımın getirdiği hatayı tahmin etmektir.

Taylor teoreminden, t_i noktasında Taylor açılımına imkan veren herhangi bir y çözümü için,

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(t_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(t_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\sigma), \qquad \exists\, \sigma \in (t_i, t_{i+1})$$

elde ederiz.

$y'(t) = f(t, y)$ kullanılırsa, yukarıdaki ifade

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i y(t_i)) + \frac{h^2}{2}\frac{df}{dt}(t_i, y(t_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!}\frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}(t_i, y(t_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\frac{d^n f}{dt^n}(\sigma, y(\sigma)), \qquad \exists\, \sigma \in (t_i, t_{i+1}).$$

şeklini alır.

Bu nedenle *yerel hata*, yani bir önceki adımdaki değer tam olduğunda bir sonraki adımda meydana gelecek hata

$$E_i = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\frac{d^n f}{dt^n}(\sigma, y(\sigma))$$

formülü ile verilir. Bu da

$$|E_i| \leq \max_{\sigma \in [a,b]} \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left|\frac{d^n f}{dt^n}(\sigma, y(\sigma))\right|$$

anlamına gelir.

Hatanın $E_i = O(h^{n+1})$ olduğunu söyleyebiliriz. a dan b ye kadar adımların sayısı $1/h$ ile orantılı olduğu için her adımdaki hatayı adım sayısı ile çarparsak toplam hatayı

$$E = O(h^n)$$

olarak buluruz.

3. Uygulama: Örnekler

$y(t)$ açık çözümünü bulabileceğimiz $y'(t) = f(t,y)$ şeklindeki diferansiyel denklemleri ele alacağız. Bu şekilde gerçek değerden, yüksek mertebeden Taylor yönteminin bulduğu değeri çıkararak $y(b)$ için gerçek hatayı bulabiliriz. Aşağıdaki örneklerde gerçek hatayı bulabilmek için $f(t,y)$'nin türevlerini elle hesapladık. Sonra iterasyonları Matlab ile yaparak yaklaşık değere ulaştık.

Önceki bölümde verilen tanımların değişken h adımı için de uyarlanabilir olduğunu belirtelim. Ancak, hesap kolaylığı açısından adımları sabit tuttuk. Hesaplamalarımızda, verilen aralıkta $K = 2^k$ sayıda eşit aralıklı nokta olacak şekilde adım boyunu $(b-a)/2^k$ seçtik.

Örnek 3.1

$$y'(t) = f(t,y) = \frac{1+t}{1+y}, \qquad \mathrm{y}(1) = 2$$

problemini ele alalım. Çözümünün $y(t) = \sqrt{t^2+2t+6} - 1$ olduğu açıktır.

$y(2)$ için hatayı, gerçek değerden yaklaşık değeri çıkarak hesaplıyoruz. $(b-a) = 1$ olduğundan $h = 2^{-k}$ dır. Aşağıdaki tablo hesaplanan hataları göstermektedir.

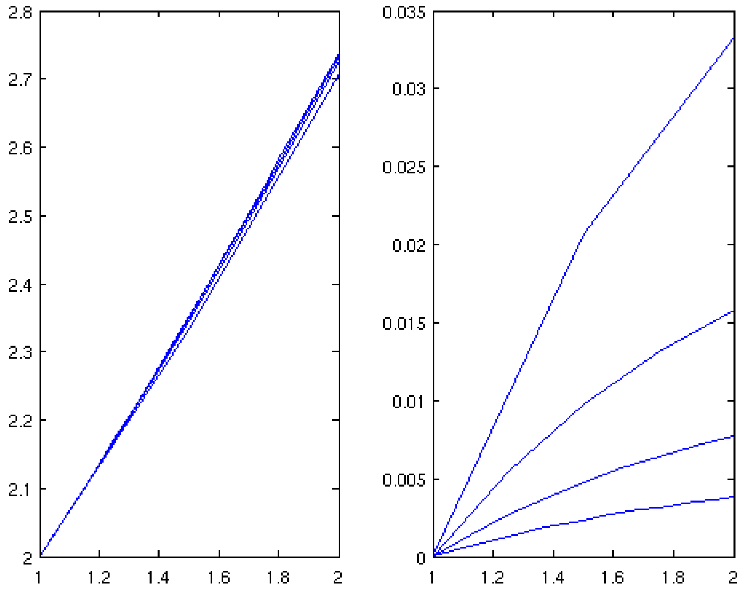
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$mertebe = 1$	$.0333$	$.0158$	$.0077$	$.0038$
$mertebe = 2$	$-.0038$	$-.0009$	$-.0002$	$-.0001$
$mertebe = 3$	$.0003269$	$.0000383$	$.0000046$	$.0000006$

Euler yöntemi olarak da bilinen birinci mertebe durumunda, h aralık uzunluğu olmak üzere, hatanın h ile orantılı olmasını bekliyoruz. Bu, k değeri 1 arttığında, hatanın (yaklaşık olarak) yarıya indiği anlamına gelir. Tabloda gözlemlenen değerler beklentimizi doğrulanır.

İkinci mertebe durumu için, hatanın h^2 ile orantılı olmasını, dolayısıyla tabloda sağa kaydıkça hatanın dörtte bire inmesini bekliyoruz. Üçüncü mertebe durumunda da hatanın h^3 ile orantılı olmasını ve hatanın sekizde bire inmesini bekliyoruz. Tablodan durumun yine böyle olduğu görünmektedir.

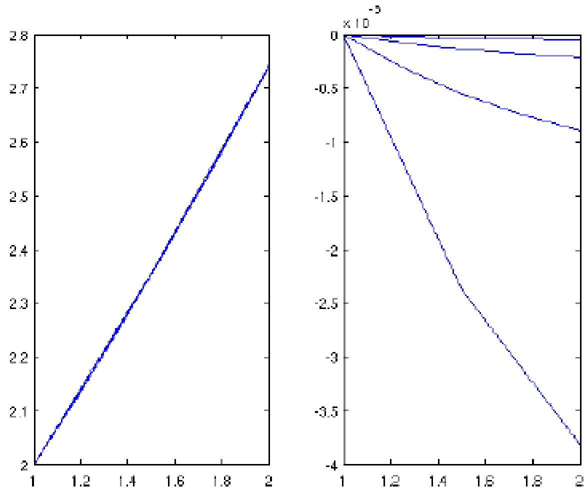
Şekil 1'deki soldaki grafik, Euler yöntemi kullanılarak elde edilen $y(t)$ yaklaşık değerlerinin t'ye karşı davranışını gösteriyor. Her doğru, yukarıdaki tablodaki satırlardan birine, yani $h = 1/2, 1/4, 1/8, 1/16$ adımlarına karşılık geliyor. Sağdaki grafik ise hatanın t'ye bağlı değerlerini gösteriyor. Burada yine tablodaki satırlar, farklı h değerlerine, yani

$h = 1/2, 1/4, 1/8, 1/16$ adımlarına karşılık geliyor. Göründüğü gibi hata büyük k değerlerinde sıfıra daha yakındır.

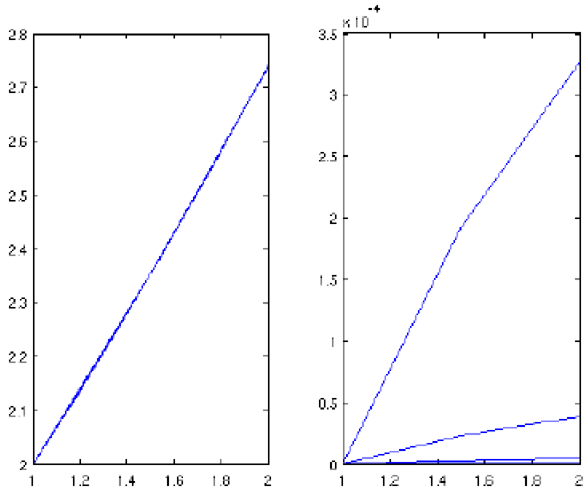


Şekil 1. Euler yöntemi: Nümerik çözüm (solda) ve karşılık gelen hata (sağda)

Benzer şekilde, aynı grafikleri 2. ve 3. mertebeden Taylor yöntemi kullanarak elde ettik. Bunlar, sıarasıyla, Şekil 2 ve Şekil 3'te görünmektedir.



Şekil 2: 2. mertebeden Taylor yöntemi: Nümerik çözüm (solda) ve karşılık gelen hata (sağda)



Şekil 3. 2. mertebeden Taylor yöntemi: Nümerik çözüm (solda) ve karşılık gelen hata (sağda)

Örnek 3.2

$$y'(t) = f(t,y) = \frac{1}{2y}, y(0) = 1$$

başlangıç değer problemini ele alalım. Çözüm $y(t) = \sqrt{t+4}$ dir. Hatayı yukarıdaki gibi hesaplarsak, $t = 1$ için aşağıdaki tabloyu elde ederiz.

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$mertebe = 1$	-.0066.	−.0032	−.0016	−.0008
$mertebe = 2$	.0003852	.0000917	.0000224	.0000055
$mertebe = 3$	−.00002837	−.00000330	−.00000040	−.00000005

İkinci örnek de, birinci örnek gibi beklentilerimizi karşılar. İncelediğimizde, k'daki her artış için birinci mertebe hatanın yarıya, ikinci mertebe hatanın dörtte bire, üçüncü mertebe hatanın sekizde bire düştüğü açıkça görülür.

Aşağıdaki örnekler yine bu durumu gösterecektir.

Örnek 3.3.

$$y'(t) = f(t,y) = t + y, \qquad y(0) = 0$$

başlangıç değer problemini ele alalım. Çözüm $y(t) = -t - 1 - e^t$ olur. Bu, $t = 1$ için aşağıdaki hata değerlerini verir.

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$mertebe = 1$	$.4683$	$.2769$	$.1525$	$.0804$

$mertebe = 2$	$.0777$	$.0234$	$.0064$	$.0017$
$mertebe = 3$	$.0095$	$.0014$	$.0002$	$.0000$

Sağ altaki hatanın gerçekte sıfır olmadığına, yuvarlamadan kaynaklandığına dikkat edelim.

Örnek 3.4.

$$y'(t) = f(t, y) = ty, y(0) = 1$$

başlangıç değer problemini ele alalım. Çözüm $y(t) = e^{t^2/2}$ dir. Bu, $t = 1$ için aşağıdaki hata değerlerini verir.

4. Yöntemin Değerlendirilmesi

Örneklerden gördüğümüz ve teorimizin önerdiği gibi, Yüksek Mertebeden Taylor Yöntemi göreceli büyük adımlarla hassas kestirimler yapabilmektedir.

Ancak, $f(t, y)$'nin türevlerini kullandık. Türev hesabı genellikle masraflıdır. Pratikte, diferansiyel denklemin bir kapalı kutu olduğu durumlar vardır: Verilen t_0 ve y_0 için $f(t_0, y_0)$ değeri gözleme dayalı olarak hesaplanabilir, ama $f(t, y)$ açık ifadesi bilinmez. Böyle durumlarda Yüksek Mertebeden Taylor Yöntemi işe yaramaz.

"Stiff denklemler" olarak bilinen bir sınıf diferansiyel denklem için bu yöntem doğrudan uygulanamaz. Stiff denklemlerin çözümlerinin genel özelliği t arttıkça y azalırken türevlerin azalmamasıdır. h belli sınırlar içinde olmadığında bu aşırı yanlış kestirimlere neden olabilir. h değerini belli sınırlar içinde tutma kaygısı yaşamak yerine başka bir yöntem kullanmak genelde çok daha kolaydır. Aslında, stiff denklemler için özel başka yöntemler geliştirilmiştir.

Ayrıca gerçek çözüme yakınsayan bir Taylor açılımının var olduğunu kabul ettik. Pek çok fonksiyon için durum böyle olmasına rağmen, olmama ihtimalini de göz önüne almak gerekir. Kestirimin doğruluğunu başka yollardan teyit etmek önerilir.

Özet olarak, Yüksek Mertebeden Taylor Yöntemi her zaman uygulanabilir değildir. Uygulanabilir olduğunda ise oldukça doğru sonuçlar verebilir. Örneklerimizde, teoriye uygun olarak, h azaldıkça hata küçülmektedir. Gerçekte, n metodun basamağı olmak üzere, azalma hızı h^n ile orantılıdır.