18.702 Cebir II
2008 Bahar

Mertebesi 55 olan Abel olmayan grupların karakter tablosu

G, x ve y elemanları tarafından, $x^{11} = 1$, $y^5 = 1$, $yxy^{-1} = x^3$ bağıntıları ile üretilen mertebesi 55 olan bir grup olsun. Bu grubun mertebesinin gerçekten de 55 olduğunun kanıtlanmasını geçelim.

Sylow teoremleri, G nin bir 11-altgrubu olan $< x >$ grubunun normal olduğunu ve bir tanesi $< y >$ olan 11 eşlenik 5-altgrubu olduğunu söyler.

x in merkezleyicisi olan $Z(x)$, $< x >$ grubunu kapsar ve G grubunun tamamına eşit değildir. Bu nedenle, $Z(x) =< x >$ dir ve $|G| = |C(x)||Z(x)|$ formülü, $|C(x)| = 5$ olduğunu gösterir. Benzer biçimde, $|C(y)| = 11$ dir.

$C(x)$ eşleniklik sınıfındaki elemanları listeleyebiliriz. $yxy^{-1} = x^3$ ilişkisi, x^3 ün bu sınıfta olduğunu gösterir. Bu durumda $yx^3y^{-1} = x^9$ elemanı da bu sınıftadır. Bu biçimde devam edersek

$$C(x) = \{x, x^3, x^9, x^5, x^4\} \tag{1}$$

buluruz.

x in 1 e eşit olmayan diğer kuvvetleri de x^2 nin eşleniklik sınıfını oluşturur:

$$C(x^2) = \{x^2, x^6, x^7, x^{10}, x^8\}. \tag{2}$$

Diğer taraftan, 11 Sylow 5-altgrupdan herhangi iki tanesinin kesişimi birim elemanıdır. Bu nedenle, bu altgruplardan her biri y nin eşleniklik sınıfından bir eleman içerir. y^2, y^3, y^4 elemanlarının her birinin sınıfının kardinalitesi 11 dir. G nin sınıf denklemi

$$55 = 1 + 5 + 5 + 11 + 11 + 11 + 11. \tag{3}$$

Dolayısıyla, 7 indirgenemez karakter vardır.

$< x >$ normal bir altgrup olduğundan, $G/< x >= \overline{G}$ bölüm grubunu oluşturabiliriz. $\overline{G}$ grubunun eleman sayısının 5 olduğu görülür. Bu nedenle, $\overline{G}$, y nin kalan sınıfı $\overline{y}$ gibi, $< x >$ içinde olmayan herhangi bir elemanın kalan sınıfı tarafından üretilir.

$\pi : G \to \overline{G}$ doğal homomorfizmi, G nin bazı karakterlerinin belirlenmesinde yararlıdır. Şöyle ki, eğer $\overline{\rho} : \overline{G} \to GL(V)$, $\overline{G}$ nin bir temsili ise, G nin $\rho = \overline{\rho} \circ \pi$ biçiminde bir temsilini elde ederiz.

$\overline{G}$ Abel olduğundan, indirgenemez karakterleri bir boyutludur ve bunlardan beş tane vardır. $\overline{y}$ elemanının mertebesi 5 olduğundan, bir boyutlu bir karakterin $\overline{y}$ deki değeri birimin 5-inci kökü, bir başka deyişle $\zeta = e^{2\pi i/5}$ in bir üssü olmalıdır. Bu biçimde 5 üs ve 5 indirgenemez karakter vardır. Dolayısıyla, $\overline{G}$ için tablo belirlenir.

kardinalite	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)
eleman	1	$\overline{y}$	$\overline{y}^2$	$\overline{y}^3$	$\overline{y}^4$
$\overline{\chi}_1$	1	1	1	1	1
$\overline{\chi}_2$	1	ζ	ζ^2	ζ^3	ζ^4
$\overline{\chi}_3$	1	ζ^2	ζ^4	ζ	ζ^3
$\overline{\chi}_4$	1	ζ^3	ζ	ζ^4	ζ^2
$\overline{\chi}_5$	1	ζ^4	ζ^3	ζ^2	ζ

Her bir $\overline{\chi}_i$ karakteri G grubunun bir χ_i karakterini belirler ve χ_i, π nin çekirdeğindeki elemanlarda, bir başka deyişle $< x >$ altgrubunda, 1 değerini alır.

Aşağıdaki karakter tablosundaki ilk beş satır belirlenmişti. $|G| = d_1^2 + \cdots + d_7^2$ formülü ve d_i nin $|G|$ i bölmesi, kalan iki karakterin boyutlarının 5 olduğunu gösterir.

kardinalite	(1)	(5)	(5)	(11)	(11)	(11)	(11)
eleman	1	x	x^2	y	y^2	y^3	y^4
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	ζ	ζ^2	ζ^3	ζ^4
χ_3	1	1	1	ζ^2	ζ^4	ζ^3	ζ
χ_4	1	1	1	ζ^3	ζ	ζ^4	ζ^2
χ_5	1	1	1	ζ^4	ζ^3	ζ^2	ζ
χ_6	5	u	v	?	?	?	?
χ_7	5	?	?	?	?	?	?

Daha sonra u ve v değerlerini belirleriz: $\overline{\chi}_6$ beş boyutlu bir karakter olduğundan ve x in mertebesi 11 olduğundan, $\overline{\chi}_6(x)$ beş tane birimin 11-inci kökünün, bir başka deyişle $\eta = e^{2\pi i/11}$ in beş tane kuvvetinin toplamıdır. Burada, eşleniklik sınıfını açıkça biliyor olmamız çok yararlıdır. Şöyle ki, ρ_{x^3}, ρ_x in eşleniğidir ve bu nedenle, aynı özdeğerlere sahiptir. Diğer yandan, $\rho_{x^3} = \rho_x^3$ dür. Dolayısıyla, özdeğerleri, ρ_x in özdeğerlerinin kübüdür. Bu nedenle, eğer η^ν, ρ_x in bir özdeğeri ise, $\eta^{3\nu}$ da bir özdeğeridir. Bu göz önüne alındığında, $\chi_6(x)$ için sadece üç olası değer olduğu görülür: Bu nedenle şunlardan birine eşit olmalıdır: $5=1+1+1+1+1$ veya $\alpha = \eta + \eta^3 + \eta^9 + \eta^5 + \eta^4$ veya $\beta = \eta^2 + \eta^6 + \eta^7 + \eta^{10} + \eta^8$. Şimdi, 5 değeri $\sum \overline{\chi_6(g)}\chi_6(g)$ toplamına $5^2 \cdot 5 = 125$ lik bir katkıda bulunur. Fakat, bu pozitif terimlerden oluşan ve $|G| = 55$ veren bir toplamdır, çünkü $\langle \chi_6, \chi_6 \rangle = 1$ dir. Dolayısıyla, $\chi_6(x) = 5$ değeri olması gerekenden büyüktür ve bu nedenle $u = \alpha$ veya $u = \beta$ olmalıdır. Beş boyutlu iki karakter olduğundan iki değer de alınmalıdır. Karakter tablosunun alt satırları şunlardır:

kardinalite	(1)	(5)	(5)	(11)	(11)	(11)	(11)
eleman	1	x	x^2	y	y^2	y^3	y^4
χ_6	5	α	β	0	0	0	0
χ_7	5	β	α	0	0	0	0