18.702 Cebir II
2008 Bahar

22 Şubat 2008

18.702 Problem Seti 3

29 Şubat, Cumaya

1. (Kitaptaki Çeş. Alıştırma 1, yeniden yazılmış) Bu alıştırma, sonlu bir G grubunun temsilleri ve indeksi 2 olan bir H altgrubunu ilişkilendirir. $a \in G$, H içinde olmayan bir eleman ve dolayısıyla, H ve aH kümeleri H nin iki eşkümesi olsun.

(a) H altgrubunun $S : H \to GL_n$ temsili verildiğinde, G grubunun *tetiklenen temsili* $ind\ S : G \to GL_{2n}$

$$(ind\ S)_h = \begin{pmatrix} S_h & 0 \\ 0 & S'_h \end{pmatrix} \text{ ve } (ind\ S)_{ah} = \begin{pmatrix} 0 & S_{aha} \\ S_h & 0 \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır. $ind\ S$ nin G nin bir temsili olduğunu kanıtlayınız ve karakterini betimleyiniz.

(b) $S : H \to GL_n$, H nin bir temsili ise, H nin S' *eşlenik temsilini* $S_{h'} = S_{a^{-1}ha}$ olarak tanımlarız. ($a^{-1}ha$ elemanının G grubunda h nin eşleniği olduğuna, fakat a elemanı H içinde olmadığından, h nin H içinde bir eşleniği olması gerekmediğine dikkat ediniz.)
$R : G \to GL_m$, G nin bir temsili ise, bunu H ye kısıtlayabiliriz: H deki her h için $(res\ R)_h = R_h$ dir. S' nün H nin bir temsili ve $res(ind\ S) = S \oplus S'$ olduğunu kanıtlayınız.

(c) χ_S, S nin karakterini göstersin, vb. *Frobenius karşılıklılığını* kanıtlayınız:

$$\langle \chi_{ind\ S}, \chi_R \rangle = \langle \chi_S, \chi_{res\ R} \rangle.$$

(d) S, H nin indirgenemez bir temsili olsun. Eğer S eşlenik temsil S' ne izomorf değilse, tetiklenmiş $ind\ S$ temsilinin indirgenemez olduğunu ve diğer yandan, S ve S' izomorf ise, $ind\ S$ nin, G nin iki izomorf olmayan temsilinin toplamı olduğunu kanıtlamak için Frobenius karşılıklılığını kullanınız.

2. Simetrik grup S_5 in karakter tablosunu belirleyiniz ve bunu hesaplamak için kullandığınız yöntemleri kısaca açıklayınız. A_5'in karakter tablosu ve bir önceki problemin sonuçları da dahil olmak üzere, herhangi bir yöntemi kullanabilirsiniz, fakat S_5 in karakter tablosuna bakmanıza izin yoktur.

3. $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = \sqrt{3}$ ve $\gamma = \alpha + \beta$ olsun.
(a) $R = \mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ halkası $\mathbb{C}$ nin $\mathbb{Q}$, α ve β yı kapsayan en küçük halkası olsun. $\mathbb{Q}[\gamma] = R$ olduğunu kanıtlayınız.

(b) $S = \mathbb{Z}[\alpha, \beta]$ halkası $\mathbb{C}$ nin α ve β yı kapsayan en küçük halkası olsun. $\mathbb{Z}[\gamma] \neq S$ olduğunu kanıtlayınız.

4. Bölüm 10, Alıştırma 3.34.

5. Gauss tamsayılarının $\mathbb{Z}[i]$ halkasında, kalanlı bir bölme yapabilmek için sistematik bir yol tanımlayınız. Yönteminizi $4+36i$ nin $5+i$ ile bölümünden kalanı bulmak için kullanınız.