18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

18.102 Fonksiyonel Analize Giriş Bahar Dönemi 2009

DERS 1. VEKTÖR UZAYLARI, METRİK UZAYLAR, NORMLU UZAYLAR

Vektör uzayları, metrik uzaylar, normlu uzaylar.Banach uzayları. Örnekler: - Öklid uzayları, kapalı bir aralık üzerinde supremum normu ile donanmış sürekli fonksiyonlar - $C^0[0,1]$. L^1 normu, ve $C^0[0,1]$ uzayının bu norma göre tam olmaması. l_2 uzayının kısa tanıtımı - kanıt vermeksizin bu uzayın Hilbert uzayı olmasının açıklanması. Bütün bunların neden yapıldığı ? Ana amaçlar : - Fonksiyonel analizde "standart" denebilecek kimi temel yapıları inşa edebilmek:

Soyut Hilbert Uzayları - her boyutta bir örnek

Somut Hilbert Uzayları - $L^2[0,1]$ uzayı gibi, bir çok uzay. Bir teorem örneği : - Dirichlet problemi. $V : [0,1] \to \mathbb{R}$ gerçel değerli bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun " salınım modları" ile ilgileniyoruz; buna benzer bir olayla kuantum mekaniğinde karşılaşırız. Örneğin, $[0,1]$ aralığı üzerinde iki kez sürekli türevlenebilen ve aşağıdaki (1.1) denklemini sağlayan $u(x)$ fonksiyonlarını ele alalım

$$-\frac{d^2u}{dx^2}(x) + V(x)u(x) = \lambda u(x) \tag{1.1}$$

Burada ilgilendiğimiz soru hangi 'bilinmeyen' λ sabitlerinin bulunabileceği sorusudur. Kuşkusuz $u = 0$ için tüm λ sayıları gecerli olacaktır ama bu her zaman yukarıdaki eşitlik için bulunabilecek " aşikar çözüm " içindir. Başka hangi çözümler vardır? Gerçekte (1.1) eşitliğini sağlayan ve aşikar olmayan ve hepsinin gerçel sayı olduğu sonsuz (λ_j) dizisi vardır - ve bu dizinin tüm öğeleri kompleks sayılar olmayan gerçel sayılardır. Bu λ_j sayılarının herbiri için en az bir (belki birden fazla) "doğrusal" bağımsız çözüm u_j vardır. Burada herşey hakkında daha fazla söylenecek söz olsa da ana amaçımız en azından bu noktaya gelebilmektir.

Gerçekte (1.1) bir özdeğer denklemidir. Burada ele aldığımız şey "sonsuz bir matris"'tir. Bu aşikar olmadığı gibi tüm olaya bakmak için iyi bir yöntem de değildir(kuantum mekaniğinin ilk günlerinde böylesi bir matris yaklaşımı söz konusu olmuşsa da bu daha sonra yerini Hilbert uzayları üzerinde dönüşüm kuramına bırakmıştır). Ancak yine de bir anlamda sonsuz matrislerle çalışıyoruz denebilir. Sonlu boyut ile sonsuz boyut arasındaki temel yaşamsal fark "'topolojidir". Bu fark normlu uzaylar kavramı içinde mevcuttur.

Vektör Uzayları :- Belitlerden bahsetmemize gerek var mı? Bir vektör uzayı V aynen temel $\mathbb{R}^n$, veya $\mathbb{C}^n$ uzaylarında olduğu gibi öğelerinin toplanabildiği ve skalarlerle çarpılabildiği ve bu ikili işlemlerin $\mathbb{R}^n$ örneğindekilere benzer özellikler taşıdığı uzaylardır. Buradaki skalar kelimesi ile gerçel veya kompleks sayıları - çoğu kezde kompleks sayıları - göstereceğiz. Bundan sonra $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ yerine sadece $\mathbb{K}$ yazacağız. Şimdi kümemiz V - üzerinde çalışacağımız vektörler- iki yapı taşırlar. Bunlar

$$(1.2) \quad + : V \times V \to V, \bullet : \mathbb{K} \times V \to V$$

yapılarıdırlar. Bunları $v + w$ ve sv ile göstereceğiz. Bu işlemlerin sağladığı belitler vardır ki- bunlar için doğrusal cebir kitaplarınıza geri dönüp bakmanızı isterim. Bunlar + için $\mathbb{K}$ nın değişmeli grup olması ve dağılma özelliğidir.

Örnekler:

Aşikar örnek olarak sonlu boyutlu vektör uzaylarını verebiliriz.

l^p uzayları. Bunlar dizi uzaylarıdır. İlk alıştırma problemleri tümü ile bu uzaylara ayrılmıştır. Örneğin, l^2 - ki bu bir Hilbert uzayıdır- öyle a_j, $a(j) = a_j$ ile de gösterilen, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dizilerinden oluşmuşturki

$$(1.3) \quad \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 < \infty$$

Aşikar olmayan diğer bir örnek ise $[0, 1]$ üzerinde tanımlı ve kompleks sayılar değerli sürekli fonksiyonlar uzayı $C[0, 1]$ dir. Bütün bu uzaylar bir norm ile donanmışlardır. Dönemin büyük bir kısmında normlu uzayları çalışacağız.

Tanım 1. Vektör uzayı V üzerindeki bir norm $||.||$

$$(1.4) \quad ||.||_\infty : V \to [0, \infty)$$

aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyondur:

(1) $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

(2) $||tv|| = |t|||v|| \quad t \in \mathbb{K}, \qquad v \in V$

(3) $||v + w|| \le ||v|| + ||w|| \quad v, w \in V$

$d(u, v) = ||u - v||$ ifadesinin V uzayı üzerinde bir metrik tanımladığı kolaylıkla görülebilir. Dolayısı ile bir metrik uzayında varolan kavramlar - açık kümeler, küreler, kapalı kümeler, dizilerin yakınsaması, kompakt kümeler, bağlantılı kümeler, tam metrik uzaylar artık kullanıma uygundurlar ve biz bu kavramların hepsini kullanacağız!

Tanım 2. Yukarıda verilen metrik altında tam olan normlu uzaylara Banach uzayları denir.

$C[0,1]$ uzayı üzerinde supremum normu olarak bilinen

$$(1.5) \quad ||u||_\infty = sup_{x\in[0,1]}|u(x)|$$

tartıştık. Bu normun bir Banach uzayı verdiğini söyledik ancak kanıtlamadık. Benzer şekilde yine $C[0,1]$ üzerinde L^1 normu olarak bilinen

$$(1.6) \quad ||u||_{L^1} = \int_0^1 |u(x)|dx$$

normunu tartıştık ve $C[0,1]$ uzayının neden bu norm altında tam olmadığına işaret ettik. Temel olarak Lebesgue integraline neden gereksinim olmasının altında bu vardır.

Kuşkusuz birisi "[0,1] üzerindeki Riemann integrallenebilir fonksiyonların L^1 normunda tam olup-olmadıklarını " sorabilir. Hatta sormuştur da. Gerçek odur ki L^1 normu denen şey Riemann integrallenebilir fonksiyonlar üzerinde norm bile değildir. Sadece "seminorm" dur. Başka bir deyişle integrali sıfır olan ama kendileri sıfır olmayan fonksiyonlar vardır. Bundan daha önce bahsetmememizin nedeni sorunun tam olarak ortaya konamamasıdır. Biri uzayla oynayarak (yani bölüm uzayına geçerek) bir norm elde edebileceğimizi söyleyebilirse de sorun yine orada duracaktır çünkü uzay bu sefer de tam olmayacaktır. Dolayısı ile doğru yanıt uzayın bir Banach uzayı olmaması ve bunun da nedeninin ta başta uzayımızın bir normlu uzay olmamasıdır. Bu noktaya tekrar döneceğiz.

PROBLEMLER 1

Problem 1.1 Her $p, 1 \leq p < \infty$ veya sadece $p = 2$ için;

$$l^p = \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty, a_j = a(j)\}$$

dizilerinin aşağıdaki normla,

$$||a||_p = (\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p)^{1/p}$$

normlu bir uzay olduğunu gösteriniz. Bu tanımlanan dizilerin bir vektör uzayı olduklarını ve tanımlanan normun norm olmak için sağlaması gereken üç koşulu sağladığının gösterilmesi demektir.

Problem 1.2 Problem 1.1 deki zor kısım üçgen eşitsizliği idi. Eğer size her N için

$$(\sum_{j}^{N} |a_j|^p)^{1/p}$$

ifadesinin $\mathbb{C}^N$ de norm olduğu verilseydi, bunu kullanabilir miydiniz?

Problem 1.3 Problem 1.1 de tanımlanan l^p nin ya da l^2 nin tam olduğunu kanıtlayınız. Yani Banach uzayı olduğunu gösteriniz. Yani her Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu kanıtlayınız. Burada problem verilen Cauchy dizisinin limitini bulmaktır. Her N için N noktasında budanmayla elde edilen $\mathbb{C}^N$ deki her dizinin $\mathbb{C}^N$ de bir Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.

Problem 1.4 İsterseniz $n = 2$ alabilirsiniz, l^p uzayının birim yuvarı S kümesini düşünelim. Bu küme uzunlukları 1 olan vektörlerin kümesidir.

$$S = \{a \in l^p, |||a||_p = 1\}$$

kümesidir.
(1) S kümesinin kapalı olduğunu gösteriniz.
(2) Dilerseniz Rudin'nin kitabına da bakarak, metrik uzaylarda kompakt kümelerin dizisel betimlenişini anımsayınız.

(3) Dilerseniz n-inci yerde 1, kalan koordinatlarda 0 olan diziyi düşünerek S kümesinin kompakt olmadığını kanıtlayınız.

Problem 1.5 Normlu her uzayda, norm süreklidir.