18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

18.102 Fonksiyonel Analize Giriş Bahar Dönemi 2009

DERS 10. BESSEL EŞİTSİZLİĞİ

Bu derste ele alacaklarımız bir çok kaynakta olduğundan bunlara kısaca değinilecektir.

(1) Bessel Eşitsizliği

$e_i, i = 1, .., N$ bir iççarpım uzayı H de boyları bir olan dik bir dizi(ortonormal dizi), yani $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ olsun. H uzayının keyfi u öğesi için, aşağıdakiler vardır:

$$v = \sum_{i=1}^{N} (u, e_i) e_i$$

$$||v||_H^2 = \sum_{i=1}^{N} |(u, e_i)|^2 \leq ||u||_H^2 \tag{10.1}$$

$$(u - v) \perp e_i, i = 1, ..., n$$

Buradaki son sav $(u, e_j) = (v, e_j)$ hesaplanarak bulunur. Benzer biçimde $||v||^2$ ifadesi ise yine doğrudan hesap ile bulunur. Bessel eşitsizliği olarak bilinen eşitsizlik Cauchy eşitsizliğinden elde edilir. Çünkü son eşitsizlikten

$$||v||^2 = (v, v) = (v, u) + (v, v - u) = (v, u) = |(v, u)| \leq ||v|| ||u|| \tag{10.2}$$

den $||v|| \leq ||u||$ bulunur.

(2) Ortonormal Tabanlar:

(10.1) eşitsizliğinde sağ taraf N den bağımsız olduğundan, eğer (e_i) dizisi ortonormal bir dizi ise,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(u, e_i)|^2 \leq ||u||_H^2 \tag{10.3}$$

buradan da

$$v_n = \sum_{i=1}^{n} (u, e_i) e_i \tag{10.4}$$

dizisinin Cauchy dizisi olduğunu elde ederiz, çünkü $m > n$ iken

$$||v_n - v_m||^2 = \sum_{n<j<m} ||(u, e_j)||^2 \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} ||(u, e_j)||^2 \tag{10.5}$$

yukarıdaki eşitsizlikde sağ taraf, n sayısının büyük değerleri için m sayısından bağımsız olarak, küçük olduğundan, dizi Cauchy dizisidir.

Önteorem H bir Hilbert uzayı - yani şimdi tamlık varsayılıyor- ve (e_i) de ortonormal bir dizi ise, H uzayının her u öğesi için

$$(10.6) \quad v = \sum_{j=1}^{\infty}(u, e_j)e_j \in H$$

serisi yakınsaktır ve her j için $(u - v)\perp e_j$ sağlanır.

Kanıt. Limitin varlığı dizinin Cauchy ve uzayın tamlığından elde edilir. Diklik ise $(u - v_n, e_j) = 0$ eşitliğinden $n \geq j$ olduğunda

$$(10.7) \quad (u - v, e_j) = lim_{n\to\infty}(u - v_n, e_j) = 0$$

Cauchy eşitsizliğinin bir sonucu olan iççarpımın sürekli olduğu kullanılarak görülür.□

Şimdi ortonormal bir dizinin tam veya ortonormal taban olması demek: her j için $u\perp e_j = 0$ ise $u = 0$ olması demektir.

Önerme 15 Eğer $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ Hilbert uzayı H de ortonormal taban ise H uzayındaki her u vektörü için

$$(10.8) \quad u = \sum_{j=1}^{\infty}(u, e_j)e_j$$

vardır.

Kanıt. Önteorem, serinin v vektörüne yakınsamasını ve her j için $(u-v)\perp e_j$ elde ederiz. Tamlık varsayımı, $u = v$ verir.

(3) Gram-Schmidt

Teorem 6 Her ayrılabilir Hilbert uzayının ortonormal tabanı vardır.

Kanıt. Ayrılabilir olma tanımından, bir dizi olarak ta yazılabilecek (v_j) yoğun dizisi bulabiliriz. Dizinin her öğesini kendi boyuna bölerek diziyi boyları bir olacak şekilde alabiliriz. Böylelikle, eğer $v_1 \neq 0$ ise $e_1 = v_1/||v_1||$ alalım. Tümevarımla devam ederek bir n tamsayısı için $i = 1, ..., m \leq n$ olmak üzere ortonormal e_i öğelerini secmiş olalım. Bu vektörlerin gerdiği altuzay aynıdır. Yani,

$$(10.9) \quad ger[e_1, ..., e_m] = ger[v_1, ..., v_n]$$

Dikkat edersek, tümevarım adımı için eğer v_{n+1} (10.9) da gerilen altuzayda ise n+1 için aynı e_i çalışacaktır. Dolayısı ile

$$(10.10) \quad w = v_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} (v_{n+1}, e_j) e_j \neq 0$$

dolayısı ile $e_{m+1} = w/||w||$ anlamlı olup e_{m+1} eklendiğinde n+1 için gerilen uzayların eşitliği bulunur.

Böylece sonsuza kadar devam edilebilir. Sadece iki olasılık vardır. Ya sonlu tane e_i veya bunların sonsuz bir dizisi bulunacaktır. Her iki durumda da elde edilen küme ortonormal bir taban olacaktır. Yani;

$$(10.11) \quad u \perp e_j \quad \forall j \Rightarrow u = 0$$

Bu v_n lerin yoğun olduğunu kullanmaktadır. Bu ise verilen $u \in H$ için her w_j' in bir v_n olduğu w_j dizisi için H uzayında $w_j \to u$ dizisinin varolması demektir. Şimdi her v_n, dolayısı ile her w_j, e_k ların sonlu doğrusal birleşimi olduğundan, Bessel eşitsizliği uygulayarak

$$(10.12) \quad ||w_j||^2 = \sum_k |(w_j, e_k)|^2 = \sum_k |(u - w_j, e_k)|^2 \leq ||u - w_j||^2$$

elde edilirki burada her j için $(u, e_j) = 0$ kullandık. Böylece $||w_j|| \to 0$ ve $u = 0$ elde edilir.$\square$

(4) l^2 uzayının isomorfizmaları (eşyapı dönüşümleri)

Sonlu boyutlu bir Hilbert uzayı her zamanki iççarpımı ile donanmış $\mathbb{C}^n$ uzayına izomorftur. Yukarıdaki sonuçlardan benzer şu sonucu elde ederiz.

Önerme 16 Kompleks sayılar üzerinde tanımlı sonsuz boyutlu ayrılabilir her Hilbert uzayı l^2 uzayına izomorftur, yani öyle doğrusal bir dönüşüm

$$(10.13) \quad T : H \to L^2$$

vardırki bu dönüşüm 1-1, üzerine olduğu gibi H deki her u, v için $(Tu, Tu)_{l^2} = (u, v)_H$ ve $||Tu||_{l^2} = ||u||_H$ sağlanır.

Kanıt. Yukarıda varolduğunu öğrendiğimiz bir ortonormal taban seçelim ve

$$(10.14) \quad Tu = (u, e_j)_{j=1}^{\infty}$$

alalım. Bu dönüşüm, Bessel eşitsizliği nedeni ile, H uzayını l^2 uzayına götürür. T dönüşümünü betimleyen dizinin her öğesi doğrusal olduğundan T de doğrusaldır. 1-1 dir çünkü eğer $Tu = 0$ ise her j için $(u, e_j) = 0$ dan ve ortonormal tabanın tamlığından $u = 0$ elde ederiz. Üzerine bir dönüşümdür, çünkü (c_j) verilen bir kompleks sayılar dizisi ise

$$(10.15) \quad u = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j$$

serisi H içinde yakınsar. Bu yukarıdaki akıl yürütme ile aynıdır- kısmi toplamlar dizisi Bessel eşitsizliği nedeni ile bir Cauchy dizisidir. İççarpımın sürekliliğinden, $Tu = (c_j)$ olur ve T' nin üzerine olduğunu verir. Normlar ile ilgili eşitlik iççarpımların eşitliğinden elde edilir. Sonrası ise önce e_j lerin sonlu doğrusal toplamlarından ve bunlara süreklilik uygulanarak elde edilir.□

Aşağıdaki kimi sorularda Lebesgue Sınırlı Yakınsama teoremini hatırlamanızda yarar vardır.

Problem 5.1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ uzayında olsun.

$$(10.16) \quad x \in [-L, L] \quad \text{ise} \quad F_L(x) = f(x) \quad \text{diğer durumda} \quad 0$$

olarak tanımlanan F_L fonksiyonunun $L^1(\mathbb{R})$ uzayında ve $L \to \infty$ iken $\int |f_L - f| \to 0$ olduğunu gösteriniz.

Problem 5.2 Gerçel değerli ve aşağıdaki anlamda yerel integrallenebilir, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun

$$(10.17) \quad g_L(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [-L, L] \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [-L, L] \end{cases}$$

Yani, her L tamsayısı için Lebesgue integrallenebilirdir koşulunu sağlayan f için,

1) Her sabit L sayısı için

$$(10.18) \quad g_L^N(x) = \begin{cases} g_L(x), & g_L(x) \in [-N, N] \\ N, & g_L(x) > N \\ -N, & g_L(x) < -N \end{cases}$$

fonksiyonunun Lebesgue integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

2)$N \to \infty \quad iken \quad \int |g_L^{(N)} - g_L| \to 0$ gösteriniz.

3) Bulunabilinecek h_n basamak fonksiyonları dizisi için, hemen her yerde

$$(10.19) \quad h_n(x) \to f(x)$$

gösteriniz.

4)

$$(10.20) \quad L_{n,L}^{(N)}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-L, L] \\ h_n(x), & h_n(x) \in [-N, N], x \in [-L, L] \\ N, & h_n(x) > N, x \in [-L, L] \\ -N, & h_n(x) < -N, x \in [-L, L] \end{cases}$$

Bu durumda $n \to \infty$ iken $\int |h_n^N - g_L^N| \to 0$ gösteriniz.

Problem 5.3 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ uzayının Hilbert uzayı olduğunu gösteriniz. Önce gerçel sayılarla çalışarak $\mathcal{L}^{\in}(\mathbb{R})$ uzayını $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $|f|^2$ integrallenebilir ve yukarıdaki anlamda yerel integrallenebilir fonksiyonlar olarak tanımlayın.

(1) Böylesi f fonksiyonları için h_n seçip $g_L, g_L^{(N)}, \quad h_n^{(N)}$ fonksiyonlarını (10.17)), (10.18) ve (10.20) göre tanımlayınız.

(2) Sabit N ve L sayıları için $h_{n,L}^{(N)}$ dizisini kullanarak $g_L^{(N)}, (g_L^{(N)})^2$ fonksiyonlarının $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ uzayında ve $n \to \infty$ iken $\int |(h_{n,L}^{(N)})^2 - (g_L^{(N)})^2| \to 0$ gösteriniz.

(3) $(g_L)^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ve $N \to \infty$ iken $\int |(g_L^{(N)})^2 - (g_L)^2| \to 0$ gösteriniz.

(4) $L \to \infty$ iken $\int |(g_L)^2 - f|^2 \to 0$ gösteriniz.

(5) $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ise $fg \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ve

$$(10.21) \quad |\int fg| \leq \int |fg| \leq ||f||_{L^2}||g||_{L^2}, ||f||_{L^2}^2 = \int |f|^2$$

gösteriniz.

(6) Yukarıdakileri kullanarak $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ uzayının vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

(7) $\mathcal{N}$ sıfırımsı fonksiyonlar ise $L^2(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})/\mathcal{N}$ uzayının gerçel bir Hilbert uzayı olduğunu gösteriniz.

(8) Yukarıdakileri kompleks sayılara genişletiniz.

Problem 5.4

$$(10.22) \quad h^{2,1} = \{c : \mathbb{N} \ni j \to c_j \in \mathbb{C}, \sum_j (1 + j^2)|c_j|^2 < \infty\}$$

le tanımlanan dizi uzayları için

$$(10.23) \quad h^{2,1} \times h^{2,1} : (c, d) \to < c, d >= \sum_j (1 + j^2) c_j \overline{d_j}$$

iççarpımının $h^{2,1}$ uzayını Hilbert uzayı yapan Hermitsel bir iççarpım olduğunu gösteriniz ve $\forall c \in h^{2,1}$ için

$$(10.24) \quad h^{2,1} \subset l^2, ||c||_2 \leq ||c||_{2,1}$$

gösteriniz.

Problem 5.5 Ayrılabilir uzaylarda Riesz Temsil teoremini doğrudan kanıtlayınız. Ayrılabilir Hilbert uzayı H için ortonormal (e_i) tabanı seçiniz. Eğer $T : H \to \mathbb{C}$ sınırlı ve doğrusal bir fonksiyonel ise

$$(10.25) \quad w_i = \overline{T(e_i)}, i \in \mathbb{N}$$

tanımlayınız.

(1) Şimdi bir C sayısı için, $|Tu| \leq C||u||$ sağlandığını anımsayarak her N tamsayısı için

$$(10.26) \quad \sum_{j=1}^{N} |w_i|^2 \leq C^2$$

gösteriniz.
(2) (w_i) dizisinin l^2 uzayında olduğunu gösteriniz ve

$$(10.27) \quad w = \sum_i w_i e_i \in H$$

gösteriniz.
(3) Her $u \in H$ için,

$$(10.28) \quad T(u) =< u, w >_H \quad ve \quad ||T|| = ||w||_H$$

gösteriniz.

Problem 4.1 H bir normlu uzay ve norm aşağıdaki paralelkenar kuralını sağlasın.

$$\text{(10.29)} \quad \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \quad u, v \in H.$$

Bu normun pozitif sesquilinear (yani Hermitsel) bir iççarpımdan geldiğini kanıtlayınız. Ana fikir olarak

$$\text{(10.30)} \quad (u, v) = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2)$$

eşitliğini deneyiniz.

Çözüm. $u = v$ alalım. Paralelkenar kuralı olmadan da

$$\text{(10.31)} \quad (u, v) = \frac{1}{4}||2u||^2 + i||(1+i)u||^2 - i||(1-i)u||^2 = ||u||^2$$

Buradan (u, v) nin Hermitsel olduğunu elde ederiz. Kompleks eşlenik alıp, $||u + iv|| = ||v - iu||$ gibi norm özelliklerini kullanarak,

$$\text{(10.32)} \quad \overline{(u, v)} = \frac{1}{4}(||v+u||^2 - ||v-u||^2 - i||v-iu||^2 + i||v+iu||^2) = (v, u)$$

Dolayısı ile bakılması gereken tek şey, ilk değişkendeki doğrusallıktır. Hemen hesaplara başlayalım. Önce $(u, -v) = -(u, v)$ den (10.32) kullanarak,$(-u, v) = -(u, v)$ buluruz. Buradan

$$(2u, v) = \frac{1}{4}(||u+(u+v)||^2 - ||u+(u-v)||^2 + i||u+(u+iv)||^2 - i||u+(u-iv)||^2)$$

$$\text{(10.33)} = \frac{1}{2}(||u+v||^2 + ||u||^2 - ||u-v||^2 - ||u||^2 + i||(u+iv)||^2 + i||u||^2 - i||u-iv||^2 - i||u||^2)$$

$$-\frac{1}{4}(||u-(u+v)||^2 - ||u-(u-v)||^2 + i||u-(u+iv)||^2 - i||u-(u-iv)||^2) = 2(u, v)$$

Şimdi bu ve (10.32) den herhangi u, u' ve v için

$$(u+u',v) = \frac{1}{2}(u+u',2v) = \frac{1}{2}\frac{1}{4}(||(u+v)+(u'+v)||^2 - ||(u-v)+(u'-v)||^2 + i||(u+iv)-(u-iv)||^2$$

$$-i||u-iv||^2||^2) + i||(u+iv)-(u-iv)||^2 - i||(u-iv)) = (u,v) + (u',v)$$

bulunur. İkinci özdeşlik kullanılarak, birincide öteleme yapılırsa, u, v vektörleri ve k tamsayısı için $(ku, v) = k(u, v)$ bulunur. Şimdi n pozitif tamsayısı için $nu' = u$ ve $r = k/n$ alarak

$$(10.35) \quad (ru, v) = (ku', v) = k(u', v) = r(u, v)$$

bulunur ve buradan her kesirli r sayısı için $(ru, v) = r(u, v)$ elde ederiz. Tanımdan, iççarpım her iki değişkende de norma göre süreklidir. Bu nedenle, $r \to x \in \mathbb{R}$, limitine geçebiliriz. Yine tanımdan, doğrudan aşağıdaki eşitlikleri;

$$(10.36) \quad (iu, v) = \frac{1}{4}(||iu+v||^2 - ||iu-v||^2 + i||iu+iv||^2 - i||iu-iv||^2) = i(u, v)$$

ve buradan da ilk değişkende doğrusallığı elde ederiz.

Problem 4.2 H sonsuz boyutlu bir (ön)Hilbert uzayı olsun. Dolayısıyla H'nın her elemanının

$$(10.37) \quad v = \sum_i c_i v_i$$

gibi ifade edebileceğimiz (v_i) tabanı vardır. Burada v_i'ler arasında doğrusal bağımlılık ilişki yoktur-(8.9) da $v = 0$ temsili tek bir tanedir. $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ ($i = j$ için 1 diğer durumda sıfır anlamında) H'nın bir ortonormal tabanı $(e_i)_{i=1}^n$ vardır. Ortonormal taban için (10.37) da geçen katsayıların $c_i = (v, e_i)$ olduğunu kanıtlayınız ve

$$(10.38) \quad T : H \to \mathcal{C}^n, \quad T(v) = ((v, e_i))$$

nın

$$(10.39) \quad (u, v) = \sum_i (Tu)_i \overline{(Tv)_i}, \quad \|u\|_H = \|Tu\|_{\mathcal{C}^n}, \quad u, v \in H$$

özelliğini sağlayan bir izomorfizma olduğunu kanıtlayınız. Niçin sonlu boyutlu önHilbert uzayı bir Hilbert uzayıdır?

Çözüm 2. H'nin sonlu boyutlu bir (ön)Hilbert uzayı olduğu kabul edildiğinden, bir v_i, $i = 1, ..., n$ tabanı vardır. Bu taban n-adımda ortonormal bir tabanla değiştirilebilir. İlk olarak v_1 vektörünü $e_1 = v_1/||v_1||$ ile değiştirelim. Taban vektörlerinin doğrusal bağımsızlığından $||v_1|| \neq 0$ dır. Şimdi de v_2 vektörünü

$$(10.40) \quad e_2 = w_2/||w_2||, w_2 = v_2 - (v_2, e_1)e_1$$

ile değiştirelim. Burada $w_2 \perp e_1$ olduğu iççarpım alarak görülür. v_2,e_1 doğrusal bağımsız olduklarından, $w_2 \neq 0$ vardır. Sonlu tümevarımla $k < n$ için $v_1, ..., v_k$ vektörlerini ortonormal ve v_i ler ile aynı uzayı geren $e_1, ..., e_k$ ile değiştirdiğimizi kabul edelim. v_{k+1} vektörünü aşağıdaki;

$$(10.41) \quad e_{k+1} = w_{k+1}/||w_{k+1}||, w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k}(v_{k+1}, e_i)e_i$$

ile değiştirelim. İçarpım alarak $w_{k+1} \perp e_i, i = 1, ..., k$ ve v_i ler doğrusal bağımsız olduklarından, $w_{k+1} \neq 0$ elde ederiz. Dolayısıyla, ortonormal kümemizin öğe sayısını aynı özelliklere sahip olacak biçimde bir öğe artırttık. Bu nedenle taban ortonormal hale getirilebilir.

Şimdi her $u \in H$ için

$$(10.42) \quad c_i = (u, e_i)$$

olsun. Buradan elde edeceğimiz şey, $U = u - \sum_{i=1}^{n}$ vektörünün her e_i'ye dik olduğudur. Nedeni ise;

$$(10.43) \quad (u, e_j) = (u, e_j) - \sum_i c_i(e_i, e_j) = (u, e_j) - e_j = 0$$

olmasıdır. Buradan $U = 0$ elde edilir. Çünkü $U = \sum_i d_i e_i$ yazıldığında her i için $d_i = (U, e_i) = 0$ bulunur. Şimdi (10.38) deki dönüşümünü düşünelim. Biraz önce kanıtladığımız şey bu dönüşümün bire-bir olduğudur çünkü $Tu = 0$ tüm $c_i = 0$ ve dolayısıyla $u = 0$ vermektedir. c_i sayıları u vektörüne doğrusal olarak bağlı ve iççarpım ilk değişkende doğrusal olduklarından, T doğrusal bir dönüşümdür. Her $c_i \in \mathbb{C}$ için $u = \sum c_i e_i$ (10.42) nedeniyle c_i sayılarını verdiğinden, T örten bir dönüşümdür. Böylelikle T dönüşümünün esasında bir izomorfizma olduğunu buluruz. (10.39) daki ilk özdeşlik, aşağıdaki hesaptan elde edilir:

$$(10.44) \quad \sum_{i=1}^{n}(Tu)_i\overline{(Tv)_i} = \sum(u, e_i) = (u, \sum_i(u, e_i)e_i) = (u, v)$$

Burada $u = v$ alarak, $||TU||_{\mathbb{C}} = ||u||_H$ buluruz.

Standart normu ile donandığında $\mathbb{C}^N$ uzayının tam olduğunu biliyoruz. T de bir izomorfizma olduğundan H deki Cauchy dizilerini $\mathbb{C}^N$ uzayındaki Cauchy dizilerine resmeder. Üstelik T^{-1}, $\mathbb{C}^N$ uzayındaki yakınsak dizileri H deki yakınsak dizilere götürdüğünden H deki her Cauchy dizisi yakınsak ve H tamdır.