18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

18.102 Fonksiyonel Analize Giriş Bahar Dönemi 2009

DERS 11. KAPALI KONVEKS KÜMELER VE UZUNLUĞUN MİNİMALLEŞTİRİLMESİ

Yeni kavramları öğreneceğiz. Bunlar çeşitli ders kitaplarında ve ders notlarında var.Bu nedenle bunları özet olarak vereceğiz.

(1) Konveks kümelerde uzunluğun minimalleştirilmesi

Aşağıdaki sonuç için Hilbert uzayın ayrılabilir olması gerekmez ve bazı yeni sonuçların, özellikle de tüm genelliği ile Riesz Temsil Teoreminin kanıtlanmasına olanak verir.

Önerme 17 Bir Hilbert uzayı H'nın altkümesi C aşağıdaki özellikleri sağlasın.
(a) boş kümeden farklı,
(b) kapalı,
(c) konveks, yani $v_1, v_2 \in C$ ise $\frac{1}{2}(v_1 + v_2) \in C$,
Bu durumda orijine en yakın bir $v \in C$ noktası vardır. Yani

$$(11.1) \quad \|v\|_H = \inf_{u \in C} \|u\|_H.$$

Kanıt. Infimumun tanımı gereği $\|v_n\| \to d = \inf_{u \in C} \|u\|$ olacak biçimde C de bir (v_n) dizisi vardır. (v_n) dizisinin yakınsak olduğunu göstereceğiz ve bunun limit noktası aradığımız nokta olacak. Paralelkenar kuralı

$$(11.2) \quad \|v_n - v_m\|^2 = 2\|v_n\|^2 + 2\|v_m\|^2 - 4\left\|\frac{v_n + v_m}{2}\right\|^2.$$

$\|v_n\| \to d$ olduğundan, N yeterince büyük seçilerek verilen her $\epsilon > 0$ ve her $n > N$ için $2\,\|v_n\|^2 < 2d^2 + \frac{\epsilon^2}{2}$ sağlanır. Konvekslikten dolayı $\frac{(v_n+v_m)}{2} \in C$ ve dolayısıyla $\left\|\frac{v_n+v_m}{2}\right\|^2 \geq d^2$. Bunları birleştirerek

$$(11.3) \quad n, m > N \Rightarrow u \in C, \quad \|u\|_H \leq 4d^2 + \epsilon^2 - 4d^2$$

elde edilir, dolayısıyla (v_n) Cauchy dizisidir. H tam olduğundan $v_n \to v \in C$, çünkü C kapalıdır. Üstelik norm sürekli ve dolayısıyla $\|v\|_H = \lim_{n\to\infty} \|v_n\| = d$.

Böylece v'nin varlığını gösterdik. Tekliği ise yine paralelkenar kuralından elde edilir. v ve v' C'nin iki noktası ve $\|v\| = \|v'\| = d$ ise $\frac{(v+v')}{2} \in C$ ve dolayısıyla

$$(11.4) \quad \|v - v'\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|v'\|^2 - 4\left\|\frac{v + v'}{2}\right\|^2 \leq 0 \Rightarrow v = v'.$$

(2) Diktümleyenler

Önerme 18. *H bir Hilbert uzayı ve $W \subset H$ bir altuzay ise*

$$(11.5) \quad W^\perp = \{u \in H : (u,w) = 0 \quad \forall w \in W\}$$

bir doğrusal altuzaydır ve $W \cap W^\perp = \{0\}$ dır. Ayrıca W kapalı ise

$$(11.6) \quad H = W \oplus W^\perp$$

dir. Yani her $u \in H$ için $u = w + w^\perp$ olacak biçimde tek $w \in W$ ve tek $w^\perp \in W^\perp$ vardır.

Kanıt. (11.5) deki $W^\perp$'nın doğrusal altuzay olduğu onu tanımlayan koşuldan görülür. $u \in W^\perp$ ve $u \in W$ ise $u \perp u$, tanımdan, $(u,u) = \|u\|^2 = 0$ ve $u = 0$ elde edilir.

Şimde W'nın kapalı olduğunu varsayalım. $W = H$ ise $W^\perp = \{0\}$ ve bu durumda gösterecek birşey yoktur. Dolayısıyla $u \in H$ ve $u \notin W$ olsun.

$$(11.7) \quad C = u + W = \{u' \in H : u' = u + w, w \in W\}$$

kümesini ele alalım. Bu durumda w_n, W de bir dizi olmak üzere, $u'_n = u + w_n$ için u'_n ile w_n nin yakınsak olmaları denk olduklarından C kapalıdır. $u \in C$ olduğundan C boş kümeden farklıdır. $u' = u + w'$ ve $u'' = u + w''$ elemanlarının C de olması $\frac{u'+u''}{2} = u + \frac{w'+w''}{2} \in C$ olmasını gerektirdiğinden C konveksdir.

Böylece yukarıdaki sonuçtan uzunluğun minimalleştirilmesi uygulanarak $\|v\| = \inf_{u' \in C} \|u'\|$ eşitliğini sağlayan tek bir $v \in C$ bulunur. Iddiamız v'nın W'ye dik olduğudur -iki gerçel boyutta bir resmini çizmek yararlı olacaktır! Bunu görmek için keyfi $w \in W$ noktasını alalım ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda $v + \lambda w \in C$ ve

$$(11.8) \quad \|v + \lambda w\|^2 = \|v\|^2 + 2Re(\lambda(v,w)) + |\lambda|^2 \|w\|^2.$$

$e^{i\theta}(v,w) = |(v,w)| \geq 0$ olacak biçimde $\lambda = te^{i\theta}$ seçelim. Gösterilmek istenen

$$(11.9) \quad t(2\,|(v,w)| + t\|w\|^2) \geq 0 \; \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow |(u,w)| = 0$$

anlamında $\|v\|$ nın minimal olduğudur.

Bu gerçekten verilen $u \notin W$ için inşa edilen $v \in W^\perp$ vektörünün $u = v + w$ sağladığını verir. Teklik, 0 nın 0+0 ayrıştırmasına indirgeneceğinden, (11.6) yı biricik ayrıştırmayla verir. Bu da $W \cap W^{\perp} = \{0\}$'ı demektir.

(3) Riesz Theoremi : Bu sonuçların en önemli uygulaması Riesz Temsil Teoreminin kanıtlanması içindir (Hilbert uzayları için ölçümle ilgili bir başka uygulaması vardır).

Theorem 7 *H bir Hilbert uzayı ise verilen sürekli doğrusal fonksiyonel* $T : H \to \mathbb{C}$ *için*

$$(11.10) \quad T(u) = (u, \phi), \quad \forall u \in H$$

olacak biçimde tek bir $\phi \in H$ *vardır.*

Kanıt. (a) Önceki önteorem kullanılmadan 10. dersde hızlıca verilen kanıt verilecek. T sıfır fonksiyoneli ise $w = 0$, (11.10)'nı sağlar. Diğer durumda $T(u') \neq 0$ olacak biçimde $u' \in H$ vardır. $u = \frac{u'}{T(u')}$ diyelim. $u \in H$ ve $T(u) = 1$ dır. Böylece

$$(11.11) \quad C = \{u \in H : T(u) = 1\} = T^{-1}(\{1\})$$

boş kümeden farklıdır. T'nin sürekliliği ve ikinci biçimi, bir sürekli fonksiyonun ters görüntüsü altında kapalı bir kümenin görüntüsü kapalı olduğundan, C kapalıdır. Üstelik

$$(11.12) \quad T(\frac{u+u'}{2}) = \frac{(T(u)+T(u'))}{2}$$

olduğundan C konveksdir. Böylece minimal uzunlukta olan bir $v \in C$ noktası vardır. Yukarıdaki kanıtta olduğu gibi, buradan her $w \in W$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\|v + \lambda w\|^2 \geq \|v\|^2$ elde edilir ve buradan da $v \in W^{\perp}$ bulunur.

Kanıta aşağıdaki gibi devam edilir.

(b) Yukarıdaki diktümleyeni kullanarak 11. dersde verilen kanıt burada tekrarlanacaktır. T sürekli olduğundan sıfır uzayı

$$(11.13) \quad W = T^{-1}(\{0\}) = \{u \in H : T(u) = 0\}$$

kapalı doğrusal altuzaydır. Böylece yukarıdaki Önerme 18 gereği

$$(11.14) \quad H = W \oplus W^{\perp}$$

vardır. Şimdi, eğer $T = 0$ fonksiyoneli ise $W = H$ ve $E^{\perp} = \{0\}$ ve $w = 0$ seçimi (11.10) için çalışır. Diğer durumda W de olmayan $v' \in W^{\perp}$ vardır, yani, $T(v') \neq 0$ ve böylece $v \in W^{\perp}$ ve $T(v) = 1$ sağlanır. Buradan her $u \in H$ için $u - T(v)v$ aşağıdaki ifadeyi sağlar:

$$(11.15) \quad T(u - T(u)v) = T(u) - T(u)T(v) = 0 \Rightarrow u = w + T(u)v, \quad w \in W.$$

$(w, v) = 0$ olduğundan $(u, v) = T(u)\|v\|^2$. Böylece, eğer $\phi = \frac{v}{\|v\|^2}$ ise

$$(11.16) \quad u = w + (u, \phi)v \Rightarrow T(u) = (u, \phi)T(v) = (u, \phi)$$

dır □

(4) Sınırlı dönüşümlerin eşlenikleri.

Riesz Teoreminin bir uygulaması olarak bir Hilbert uzayında sınırlı her dönüşümün,

$$(11.17) \quad A : H \to H, \quad \|Hu\|_H \leq C\|u\|_H \quad \forall u \in H,$$

nın tek bir tane eşlenik dönüşümü olduğu gösterilmişti. Yani

$$(11.18) \quad (Au, v)_H = (u, A^*v) \quad \forall u, v \in H$$

olacak biçimde tek bir tane sınırlı $A^* : H \to H$ dönüşüm vardır. A^*'nın varlığını görmek için, A^*v dışında, her bir $v \in H$ için A^*v'nın nasıl olması gerektiğini görmemiz gerekir. (11.18) deki gibi bir v'yi sabitliyelim. Yani

$$(11.19) \quad H \to \mathbb{C}, \quad u \to (Au, v) \in \mathbb{C}$$

yi ele alalım. Bu doğrusal dönüşümdür ve

$$(11.20) \quad |(Au, v)| \leq \|Au\|_H \|v\|_H \leq (C\|v\|_H)\|u\|_H$$

olduğundan sınırlıdır. Böylece H da v'ye bağlı bir sürekli doğrusal fonksiyonel vardır. Aslında bu aşağıdaki iki sürekli fonksiyonelin birleşimidir:

$$(11.21) \quad H \to H \to \mathbb{C}, \quad u \to Au, w \to (w, v).$$

Riesz teoremi gereği H da tekbir eleman vardır, bunu A^*v ile gösterelim (A^* sadece v'ye bağlı olduğundan),

$$(11.22) \quad (Au, v) = (u, A^*v), \quad \forall u \in H$$

sağlanır. Böylece $A^* : H \to H$ tanımlanır fakat doğrusal ve sürekli olduğunu kontrol etmeliyiz. Doğrusallık Riesz teoreminin teklik kısmından görülür. Böylece $v_1, v_2 \in H$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ise

$$(11.23) \quad (Au, c_1v_1 + c_2v_2) = \overline{c_1}(Au, v_1) + \overline{c_2}(Au, v_2)$$

$$= \overline{c_1}(u, A^*v_1) + \overline{c_2}(u, A^*v_2) = (u, c_1 A^*v_2 + c_2 A^*v_2),$$

burada A^*v_1 ve A^*v_2 nın tanımları kullanılarak, teklikten dolayı, $A^*(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1A^*v_1 + c_2A^*v_2$ olduğu elde edilir.

Cauchy eşitsizliğinin optimalliğinden

$$(11.24) \quad \|v\|_H = \sup_{\|u\|=1} |(u, v)|\,,$$

(doğru mu? değil ise $u = \frac{v}{\|v\|}$ alınız.) ve buradan da

$$(11.25) \quad \|A^*v\| = \sup_{\|u\|=1} |(u, A^*v)| = \sup_{\|u\|=1} |(Au, v)| \leq \|A\|\,\|v\|$$

elde edilir. Böylece

$$(11.26) \quad \|A^*\| \leq \|A^*\|\,.$$

$(A^*)^* = A$ olmasından, bu eşitsizliğin tersi de doğrudur ve böylece

$$(11.27) \quad \|A^*\| = \|A^*\|$$

bulunur.