18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

DERS 12. KOMPAKT KÜMELER, ZAYIF KOMPAKT KÜMELER VE ZAYIF YAKINSAMA

Bir metrik uzayın bir altkümesiyle ilgili özelliklerden biri bu kümeden alınan bir dizinin yakınsak bir altdizisinin varlığı ve limitin bu kümede olmasıyla ilgilidir. Bu özelliğe denk olan özelliklerden biri, bu kümenin her açık örtüsünün sonlu bir açık altörtüsünün olmasıdır (Bu denk koşul genel topolojide oldukca kullanışlıdır ve topolojik uzaylarda da geçerlidir). Dolayısıyla ayrılabilir Hilbert uzayında bir kompakt küme kavramı kesinkez bellidir. Bu haftanın problemlerinde kompakt kümenin çeşitli betimlenişleri ayrıntıları ile ele alınacaktır.

Bir metrik uzayda genel sonuçlardan biri kompakt kümenin kapalı ve sınırlı olmasıdır, dolayısı ile bu genel sonuç Hilbert uzaylarında da doğrudur. $\mathbb{R}^n$ ya da $\mathbb{C}^n$ de (ve böylece sonlu boyutlu normlu uzayda), Heine-Borel teoremi bunun tersini verir, yani kapalı ve sınırlı küme kompaktır. $\mathbb{C}^n$ de bir dizinin yakınsaklığı her bir koordinatına karşılık gelen dizinin yakınsak olmasına denktir, bunun için önce $\mathbb{R}$ den $\mathbb{C}$ ye ve oradan da $\mathbb{C}^n$ ye geçilir. Bu durum sonsuz boyutta doğru değildir-kapalı ve sınırlı bir kümenin kompakt olduğunu göstermek için bazı ek koşullara ihtiyacımız vardır.

Bir metrik uzayda, bir dizinin $s : \mathbb{N} \to M$ elemanları ve bu dizinin limit noktalarından oluşan S kümesi her zaman kompaktır. Burada S kümesi s'nin görüntü kümesi ve bu görüntü kümesinin limit noktalarından oluşan kümedir (Tam sayılardan metrik uzayda değerler alan bir fonksiyonun görüntü kümesi olarak ta düşünebileceğimiz bu küme dizinin yakınsayan altdizilerinin limitlerini de içine alır). Bu küme, ilk noktanın diğer noktalara olan uzaklığı sınırlı olduğundan, kesinlikle sınırlıdır. Bu kümeden alınacak bir dizi ilk dizinin elemanlarının keyfi sırada alınmış ve belki de tekrar edilmiş öğelerinden oluşur. Ancak ogijinal dizinin öğeleri de tekrar edebileceklerinden, seçilen yeni dizinin damgaları tek değildir. Bu küme, kolayca görüleceği gibi, kapalıdır. Üstelik $M \setminus S$ açık olduğundan S kapalıdır-bir $p \in M \setminus S$ noktası limit noktasından sıfır olmayan sonlu $d(p, s)$, uzaklıkta olduğundan, $B(p, \frac{d(p,s)}{2})$, S'nin sadece sonlu sayıda elemanını içerebilir, ve böylece yarı-çapı daha küçük bir açık küreyle kesişmez.

Önteorem 6. Bir Hilbert uzayda yakınsayan bir serinin izi her ortonormal diziye göre kuyruğu küçük-eş olan bır dizidir, yani e_k bir ortonormal dizi ve

$u_n \to u$ ise verilen her $\epsilon > 0$ için

$$(12.1) \qquad \sum_{k>N} |(u_k, e_k)|^2 < \epsilon^2 \quad \forall n.$$

olacak biçimde N vardır.

Kanıt. Bessel eşitsizliğinden dolayı her $u \in \mathcal{H}$ için

$$(12.2) \qquad \sum_k |(u, e_k)|^2 \leq \|u\|^2$$

vardır. Bu serinin yakınsaması, yeterince büyük N seçimiyle, (12.1)'nın dizinin her bir elemanı u_n ya da limiti u için ayarlanabileceği anlamındadır, yani verilen $\epsilon > 0$'a karşılık

$$(12.3) \qquad \sum_{k>N'} |(u, e_k)|^2 < \frac{\epsilon^2}{2}$$

olacak biçimde N' seçilebilir. Aslında, tam olup olmadığı önemli olmayan (e_k) bir ortonormal dizi için tanımlanan

$$(12.4) \qquad P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad P(u) = \sum_k (u, e_k) e_k$$

süreklidir ve dönüşüm normu en fazla birdir. Gerçekten Bessel eşitsizliğinden $\|Pu\|^2 \leq \|u\|^2$. Bunun

$$(12.5) \qquad P_N u = \sum_{k>N} (u, e_k) e_k$$

ya uygulanmasıyla $u_n \to u$ yakınsaması, normda $\|P_N u_n\| \to \|P_N u\|$ yakınsamasını ve dolayısıyla

$$(12.6) \qquad \sum_{k>N'} |(u, e_k)|^2 < \epsilon^2$$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla $n > n'$, $N = N'$ için (12.1)'i ayarladık. Elbette bu eşitsizlik N'nin artan değerleri için de doğrudur. $n \leq n'$ için yeterince büyük N seçerek yeniden ayarlayabiliriz. Bu gerçekten (12.1)'nin yeterli büyük N seçimiyle her n için ayarlanabileceğini gösterir.

Bu sonucu kullanarak bir Hilbert uzayında bir kümenin kompaktlığının kullanışlı bir betimlenişi aşağıdaki gibi verebiliriz.

Önerme 19. $\mathcal{H}$ ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. Bir altküme $K \subset \mathcal{H}$ nın

kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul K'nın sınırli, kapalı ve her ortonormal tabana göre küçük-eş kuyruğu olmasıdır.
Kanıt. Kompakt bir kümenin kapalı ve sınırlı olduğunu biliyoruz. Bazı ortonormal tabana göre kuyruk kısmının eş küçük-eş koşulunu sağlanmadığını varsayalım. Yani bazı $\epsilon > 0$ ya göre verilen her N için

$$\sum_{k>N} |(u_N, e_k)|^2 \geq \epsilon^2 \tag{12.7}$$

olacak biçimde $u_N \in K$ bulunabilsin. Bu durum, kanıtlanan önteorem ile çelişeceğinden, (u_N) dizisinin yakınsak bir altdizisi yoktur, ve böylece K kompakt değildir.

Böylece bir kümenin kompakt olması için kapalı, sınırlı ve kuyruğun küçük-eş olma koşulunun gerekliliği kanıtladık. Geriye bunların yeterli olduğunu göstermek kalıyor. Dolayısıyla K'nın kapalı, sınırlı ve bir ortonormal e_k tabanına göre kuyruğun küçük-eş olma koşulunun sağlandığını varsayalım ve (u_n) K da bir dizi olsun. (u_n) dizisinin sadece Cauchy olduğunu göstermek yeterlidir, çünkü bu durumda $\mathcal{H}$ tam olduğundan yakınsayacaktır ve K'nın kapalı olmasından dolayı da limit noktası K'da kalacaktır. k sabit olmak üzere $\mathbb{C}$ de (u_n, e_k) dizisini ele alalım. K'nın sınırlı olmasından dolayı bu dizi sınırlıdır:

$$|(u_n, e_k)| \leq \|u_n\| \leq C. \tag{12.8}$$

Heine-Borel teoreminden $l \to \infty$ için (u_{n_l}, e_k) dizisini yakınsak yapabilecek biçimde, u_n dizisinin bir u_{n_l} altdizisi vardır.

Bu tartışmayı $k = 1, 2, ...$ için uygulayabiliriz. Bunlardan ilki olan (u_{n_1}, e_1)dizisinin yakınsak olacak biçimde bir u_n^1 altdizisi vardır. Bu altdizinin de u_n^1, (u_n^2, e_2) yakınsak olabilecek biçimde, bir (u_n^2) altdizisi vardır. Bu şekilde oluşturulan (u_n) altdizilerin köşegenine geçerek yeni bir altdizi elde ederiz. Bu altdizin k'nıncı öğesi, k'nıncı altdizinin k'inci öğesidir. Bu altdizi için $((u_{n_l})$ diyelim), (u_{n_l}, e_k) dizisi her k için yakınsaktır.

Kısa gösterim olarak (u_{n_l}) dizisini (v_n) ile gösterecek olursak ve Bessel özdeşliğini düşünürsek (varsayımdan dolayı e_k ortonormal kümesi tamdır) $\mathbb{C}$'de paralelkenar kuralıilkesi kullanılarak ;

$$\|v_n - v_{n+1}\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{k\leq N} |(v_n - v_{n+l}, e_k)|^2 + \sum_{k>n} |(v_n - v_{n+l}, e_k)|^2$$

(12.9)

$$\leq \sum_{k\leq n} |(v_n - v_{n+l}, e_k)|^2 + 2\sum_{k>n} |(v_n, e_k)|^2 + 2\sum_{k>n} |(v_{n+l}, e_k)|^2$$

elde edilir. Bu toplamı ϵ^2 den küçük yapmak için son iki toplamı $\frac{\epsilon^2}{2}$ küçük yapacak biçimde yeterince büyük N seçebiliriz ve bu kuyruğun küçük-eş olması nedeniyle her n ve l için yapılabilir. Ilk toplamdaki terimlerin herbirini, her biri sonlu toplam olan (v_n, e_k) dizisinin üzerinde Cauchy koşulu kullanarak her $l > 0$ için, $\frac{\epsilon^2}{2N}$ den küçük yapacak biçimde yeterince büyük n seçilsin. Böylece (v_n), (u_n)'nın bir Cauchy altdizisidir ve dolayısıyla dikkatiniz çekildiği gibi K içinde yakınsaktır. Bu K'nın gerçekten kompakt olduğunu gösterir.$\square$.

Fourier-Bessel serisinin katsayıları olan (u_n, e_k) dizilerinin 'nın yakınsıyor olma fikrinin genelleştirilmesi uygun olur.

Tanım 6. Bir Hilbert uzayı $\mathcal{H}$ da verilen bir (u_n) dizisi norm sınırlı ve her $v \in \mathcal{H}$ için $\mathbb{C}$ de $(u_j, v) \to (u, v)$ ise dizi, $u \in \mathcal{H}$ noktasına *zayıf yakınsıyor* denir. Bu durumda

$$(12.10) \quad u_n \rightharpoonup u$$

yazılır.

Daha sonra görüleceği gibi $(\|u_n\|)$ dizisinın sınırlılığı ve u'nın varlığı koşulları gerekli değildir. Bir dizinin zayıf yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul her $v \in \mathcal{H}$ için (u_n, v) dizisinin $\mathbb{C}$ de yakınsak olmasıdır. Tersine, sınırlılık ve 'zayıf limit' $u \in \mathcal{H}$ nın varlık aksiyomunu koymak sonucu değiştirmez. u ve u' noktaları u_n dizisinin zayıf limit noktaları olduğunda her $v \in \mathcal{H}$ için $(u - u', v) = \lim_{n\to\infty}(u_n, v) - \lim_{n\to\infty}(u_n, v) = 0$ olacağından, $v = u - u'$ alınmasıyla $u = u'$ elde edilir, ve böylece zayıf limit tektir.

Önteorem 7. Yakınsak (kuvvetli) bir dizi zayıf yakınsaktır ve limit aynıdır.

Kanıt. Bu iççarpımın sürekliliğidir. $u_n \to u$ ise her $v \in \mathcal{H}$ için

$$(12.11) \quad |(u_n, v) - (u, v)| \le \|u_n - u\| \, \|u\| \to 0.$$

Bu dizinin zayıf yakınsadığını gösterir.

Şimdi birkaç şey daha kanıtlanacak ve diğerleri ödev olarak bırakılacaktır.

Önteorem 8. Ayrılabilir Hilbert uzayında zayıf yakınsama bir ortonormal tabana göre kordinatlarının yakınsamasına denktir.

Kanıt. e_k bir ortonormal taban olsun. u_n dizisi zayıf yakınsak ise her k için $(u_n, e_k) \to (u, e_k)$ dır. Tersine bunun sınırlı bir dizi için doğru olduğunu varsayalım, bu durumda her k için $\mathbb{C}$ de $(u_n, e_k) \to c_k$ dır. Bu durumda norm sınırlılıktan ve Bessel eşitsizliğinden, her p için

$$(12.12) \quad \sum_{k \le p} |c_k|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k \le p} |(u_n, e_k)|^2 \le C^2 \sup_n \|u_n\|^2$$

elde edilir. Bu $(c_k) \in l^2$ verir ve böylece, $\mathcal{H}$'nın tamlığından dolayı,

$$(12.13) \quad u = \sum_k w_k e_k \in \mathcal{H}$$

dir. Her k için $(u_n, e_k) \to (u, e_k)$ olduğu açıktır. Geriye her $v \in \mathcal{H}$ için $(u_n, v) \to (u, v)$ olduğunu göstermek kalıyor. Bu e_k'ların sonlu doğrusal birleşimleri için kesinlikle doğrudur. C, $\|u_n\|$'lerin bir sınırı ve her v için $v_p = \sum_{k \leq p}(v, e_k)e_k$ v'nin Fourier-Bessel serisinin sonlu kısmı olmak üzere

$$(12.14) \quad (u_n, v) - (u, v) = (u_n, v_p) - (u, v_p) + (u_n, v - v_p) - (u, v - v_p) \Rightarrow$$

$$|(u_n, v) - (u, v)| = |(u_n, v_p) - (u, v_p)| + 2C \|v - v_p\|$$

olarak yazabiliriz. $v_p \to v$, yakınsaması (12.14) deki son terim, n den bağımsız olarak yeterince büyük p seçimiyle, küçük yapılabilir. v_p, e_k'ların sonlu doğrusal birleşimi olduğundan, seçilecek büyük n lerle sondan ikinci terim de küçük yapılabilir. Bu gerçekten her $v \in \mathcal{H}$ için $(u_n, v) \to (u, v)$ olduğunu gösterir, yani u_n dizisi u'ya zayıf yakınsar.

Önerme 20. Ayrılabilir bir Hilbert uzayında sınırlı bir (u_n) dizisinin zayıf yakınsayan bir altdizisi vardır.

Bu, ayrılabilir bir Hilbert uzayında kapalı ve sınırlı bir altkümeye *zayıf* kompakt' denecek olunursa, Heine-Borel teoreminin sonsuz boyutlu bir biçimi olarak düşünülebilir.

Kanıt. Bir ortonormal e_k tabanı seçelim ve Önerme 19 daki işlemi verilen sınırlı diziye uygulayarak her k için (u_{n_p}, e_k) yakınsak olacak biçimde (u_{n_p}) altdizisi seçelim. Önceki Önteorem'den bu altdizi zayıf yakınsaktır.□

Önteorem 9. Zayıf yakınsayan bir dizi $u_n \rightharpoonup u$ için

$$(12.15) \quad \| u \| \leq \liminf \| u_n \|$$

sağlanır.

Kanıt. Bir e_k ortonormal tabanı seçelim ve aşağıdaki eşitliği gözlemleyelim:

$$(12.16) \quad \sum_{k \leq p} \|(u, e_k)\|^2 = \lim_{n \to \infty} \|(u, e_k)\|^2.$$

Sağ taraftaki dizi p den bağımsız olarak sınırlı olduğundan, lim inf tanımından dolayı

$$(12.17) \quad \sum_{k \leq p} \|u, e_k\|^2 \leq \liminf \|u_n\|^2.$$

elde edilir. $p \to \infty$ için limit alınarak, buradan

$$\|u\|^2 \leq \liminf_n \|u_n\|^2$$

elde edilir. Buradan da (12.15) görülür.

PROBLEMLER 6

İp ucu: Önereceğim yardımcı görüşler yararlı olmayabilir, o açıdan bu görüşlere fazla odaklanmamalıdır.

Problem 6.1 H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. Bir $K \subset H$ kümesinin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul sınırlı, kapalı ve K da zayıf yakınsayan her dizinin kuvvetli yakınsak olması olduğunu gösteriniz.

İp ucu: Bir yön için sınırlı her dizinin zayıf yakınsayan bir altdizisinin olduğunu gösteriniz.

Problem 6.2 Ayrılabilir bir Hilbert uzayında zayıf yakınsayan bir (v_n) dizisinin (kuvvetli) yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşulun zayıf limit v'nin

$$\|v\|_H = \lim_{n\to\infty} \|v_n\|_H \tag{12.19}$$

koşulunu sağlaması olduğunu gösteriniz.

İp ucu: Aşağıdaki eşitliği göstermek yeterlidir.

$$(v_n - v, v_n - v) = \|v_n\|^2 - 2Re(v_n, v) + \|v\|^2. \tag{12.20}$$

Problem 6.3 Bir Hilbert uzayı H nın altkümesinin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşulun kapalı, sınırlı ve 'sonlu boyutlu yaklaşım' özelliğinin olması, yani, her $\epsilon >$ için

$$d(K, D_N) = \sup_{u\in K} \inf_{v\in D_N} \{d(u,v)\} \le \epsilon \tag{12.21}$$

olacak biçimde sonlu boyutlu bir $D_N \subset H$ doğrusal altyuzayın olmasıdır gerektiğini gösteriniz İp ucu: Gerekliliği göstermek için her ortonormal tabana göre bir kompakt kümenin küçük-eş kuyruk özelliğini kullanınız. Sonlu boyutlu yaklaşım koşulunu kullanmak için K da zayıf yakınsayan dizinin yakınsadığını kullanınız, konvekslik sonucunu kullanarak D_N'nın v_n'ye olan en yakın noktası v'_n olmak üzere D_N de (v'_n) dizisini tanımlayınız. v'_n nin zayıf ve böylece yakınsak olduğunu gösteriniz ve buradan da (v_n) dizisinin Cauchy olduğunu görünüz.

Problem 6.4 $A : H \to H$ sınırlı ve $A(H)$ sonlu boyutlu olsun. (v_n) zayıf yakınsak is Av_n dizisinin H da kuvvetli yakınsadığını gösteriniz.

Problem 6.5 H_1 ve H_2 iki farkı Hilbert uzayı ve $A : H_1 \to H_2$ sınırlı bir doğrusal dönüşüm olsun.

$$(Au_1, u_2)_{H_2} = (u_1, A^*_{u_2})_{H_1} \quad \forall u_1 \in H_1, u_2 \in H_2 \tag{12.22}$$

olacak biçimde tek bir tane (eşlenik) $A^* : H_2 \to H_1$ sınırlı doğrusal dönüşümün olduğunu gösteriniz.

PROBLEMLER 5'İN ÇÖZÜMLERİ

Aşağıdaki çesitli yerlerde Lebesgue Sınırlı Yakınsama teoremini kullanmayı düşününüz.

Problem 5.1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ nın bir elemanı olsun. F_L aşağıdaki gibi

$$(12.23) \quad x \in [-L, L] \quad \text{için} \quad f_L(x) = f(x) \quad \text{ve diğer durumda} \quad 0$$

olarak tanımlansın. $f_L \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ ve $L \to \infty$ için $\int |f_L - f| \to 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $[-L, L]$'nın karakteristik fonksiyonunu χ_L ile gösterelim. Bu durumda $f_L = f\chi_L$. f_n, h.h.y f'ye yakınsayan basamak fonksiyonların mutlak toplanabilir bir serisi ise, $\int |f_n\chi_L| \le \int |f_n|$ olduğundan ve $f_n\chi_L$ dizisi f_L ye h.h.y yakınsadığından, $f_n\chi_L$ mutlak toplanabilirdir. Dolayısıyla $f_L \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ dır. Her $x \in \mathbb{R}$ için, $L \to \infty$ iken $|f_L(x) - f(x)| \to 0$ ve $|f_L(x) - f(x)| \le |f_L(x)| + |f(x)| \le 2|f(x)|$. Dolayısıyla, Lebesgue sınırlı yakınsama teoreminden, $\int |f - f_L| \to 0$ elde edilir.

Problem 5.2 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu yerel integrallenebilir, yani, her $L \in \mathbb{N}$ için, g_L olarak tanımlanan

$$(12.24) \quad x \in [-L, L] \quad \text{için} \quad g_L(x) = f(x) \quad \text{ve diğer durumda } 0$$

fonksiyonun Lebesgue integrallenebilir olsun.

(1) Sabit L için

$$g_L(x) \in [-N, N] \quad \text{ise} \quad g_L^{(N)}(x) = g_L(x)$$

(12.25)

$$g_L(x) > N \quad \text{ise} \quad g_L^{(N)}(x) = N, \quad g_L(x) < N \quad \text{ise} \quad g_L^{(N)}(x) = -N$$

olarak tanımlanan $g_L^{(N)}$ fonksiyonunun Lebesgue integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

(2) $N \to \infty$ için $\int \left| g_L^{(N)} - g_L \right| \to 0$ olduğunu kanıtlayınız.

(3) Aşağıdaki özellikte basamak fonksiyonların bir (h_n) dizisi olduğunu gösteriniz:

$$(12.26) \quad h_n(x) \to f(x) \quad h.h.y \quad \in \mathbb{R}$$

.

(4) $h_{n,L}^{(N)}$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$x \notin [-L, L] \quad \text{ise} \quad h_{n,L}^{(N)} = 0, \quad h_n(x) \in [-N, N], x \in [-L, L] \quad \text{ise} \quad h_{n,L}^{(N)} = h_n(x)$$

(12.27)

$x \in [-L, L], h_n(x) > N \quad \text{ise} \quad h_{n,L}^{(N)} = N, \quad h_n(x) < -N, x \in [-L, L] \quad \text{ise} \quad h_{n,L}^{(N)} = -N.$

$n \to 0$ için $\int \left| h_{n,L}^{(N)} - g_L^{(N)} \right| \to 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

(1) χ_L, $[-L, L]$'nın karakteristik fonksiyonu olmak üzere tanım gereği $g_L^{(N)} = maks(-N\chi_L, min(N\chi_L, g_L))$ olduğundan, bu fonksiyon $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ içindedir.

(2) Her $x \in \mathbb{R}$ için $g_L^{(N)}(x) \to g_L(x)$ ve $\left| g_L^{(N)} \right| \leq |g_L(x)|$ olduğundan Lebesgue Sınırlı Yakınsama teoreminden dolayı, dizi noktasal olarak 0 a yakınsadığından ve üstten $2\,|g(x)|$ ile sınırlı olduğundan, L^1 de $g_L^{(N)} \to g_L$, yani $N \to \infty$ için $\int \left| g_L^N - g_L \right| \to 0$ vardır.

(3) $S_{L,n}$ dizisi h.h.y g_L fonksiyonuna yakınsayan basamak fonksiyonların bir dizisi olsun. Örneğin, g_L'ye yakınsayan basamak fonksiyonların mutlak toplanabilir serilerin kısmi toplamları dizisini alabiliriz-integrallenebilme varsayımından dolayı böyle bir dizi vardır. $S_{L,n}$ dizisini $S_{L,n}\chi_L$ ile değiştirerek $[-N, N]$ dışında sıfır olduğunu varsayabiliriz, bu durumda dizi yine g_L'ye h.h.y yakınsar. Aşağıda h_n dizisini tanımlayalım:

$$1 \leq k \leq n, x \in [k, -k] \setminus [(k-1), -(k-1)] \quad \text{için} \quad h_n(x) = S_{k,n-k}(x)$$

(12.28)

$$x \in \mathbb{R} \setminus [-n.n] \quad \text{için} \quad h_n(x) = 0$$

olarak tanımlansın. Her n için h_n basamak fonksiyonların bir toplamı olduğundan bu dizi basamak fonksiyonların bir dizisidir- ve yeterince büyük L için $[L, -L] \setminus [-(L-1), (L-1)]$ de $S_{L,n-L} \to g_L$. Buradan da, ölçümleri sıfır olan sayılabilir kümelerin birleşimleri dışında $h_n(x) \to f(x)$ olduğu ve böylece yakınsamanın h.h.y yakınsama olduğu görülür.

(4) Bu ilk problemin tekrarıdır. $h_{n,L}^{(N)} \to g_L^{(N)}$ hemen heryerde ve $\left| h_{n,L}^{(N)} \right| \leq N\chi_L$, dolayısıyla $g_L^{(N)} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ve $n \to \infty$ için $\int \left| h_{n,L}^{(N)} - g_L^{(n)} \right| \to 0$.

Problem 5.3 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$'nın bir Hilbert uzayı olduğunu gösteriniz-bu konunun özü olduğu için detayların özenle yapılması yararlı olur.

$\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ kümesinin elemanlarını $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yerel integrallenebilir ve $|f|^2$ integrallenebilir olan fonksiyonlar olarak tanımlayalım.

(1) f fonksiyonu için h_n seçelim ve g_L, $g_L^{(N)}$ ve $h_n^{(N)}$ yi (12.24), (12.25) ve (12.27) deki gibi tanımlayalım.

(2) Sabit N ve L için $h_{n,L}^{(N)}$'yi kullanarak $g_L^{(N)}$ ve $(g_L^{(N)})^2$ fonksiyonlarının $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ da olduğunu ve $n \to \infty$ için $\int \left|(h_{n,L}^{(N)})^2 - (g_L^{(N)})^2\right| \to 0$ olduğunu gösteriniz.

(3) $(g_L)^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ve $N \to \infty$ için $\int \left|(g_L^{(N)})^2 - (g_L)^2\right| \to 0$ olduğunu gösteriniz.

(4) $L \to \infty$ için $\int |(g_L)^2 - f^2| \to 0$ olduğunu gösteriniz.

(5) $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ise $fg \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ve

$$\left|\int fg\right| \leq \int |fg| \leq \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}, \quad \|g\|_{L^2}^2 = \int |f|^2 \tag{12.29}$$

olduğunu gösteriniz.

(6) Bu sonuçları kullanarak $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ nın bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

(7) $\mathcal{N}$ sıfırımsı fonksiyonlar olmak üzere $L^2(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})/\mathcal{N}$ bölüm uzayının bir Hilbert uzayı olduğunu gösteriniz.

(8) Tartışmaları kompleks değerli fonksiyonlar için genişletiniz.

Çözüm.

(1) Yapıldı sanırım. $h_{n,L}^{(N)}$ olmalı.

(2) $g_L^{(N)} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ olduğu kontrol edildi. Aynı fikir $(g_L^{(N)})$'ye uygulanır, yani $(h_{n,L}^{(N)})^2 \to g_L^{(N)}$ hemen heryerde ve her ikisi de $N^2\chi_L$ ile sınırlı olduklarından Lebesgue Sınırlı yakınsama teoremi ile

$$(h_{n,L}^{(N)})^2 \to (g_L^{(N)})^2 \leq N^2\chi_L h.h.y \Rightarrow (g_L^{(N)})^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \quad \text{ve}$$

$$\left|(h_{n,L}^{(N)})^2 - (g_L^{(N)})^2\right| \to 0 \quad h.h.y \tag{12.30}$$

$$\left|(h_{n,L}^{(N)})^2 - (g_L^{(N)})^2\right| \leq 2N^2\chi_L \Rightarrow \int \left|(h_{n,L}^{(N)})^2 - (g_L^{(N)})^2\right| \to 0.$$

(3) $N \to \infty$ için $(g_L^{(N)})^2 \to (g_L)^2$ h.h.y ve $(g_L^{(N)})^2 \to (g_L)^2 \leq f^2$ dolayısıyla Sınırlı Yakınsama teoremi ile $(g_L)^2 \in \mathcal{L}^1$ ve $N \to \infty$ için $\int \left|(g_L^{(N)})^2 - (g_L)^2\right| \to 0$.

(4) Aynı Sınırlı Yakınsama teoremindeki fikir gibi : $f^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ sınırı kullanılarak, $g_L^2 \to f^2$ ve $\int |g_L^2 - f^2| \to 0$ olduğunu gösterilir.

(5) Bütün bunlar $f, F = g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ için $fg \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ göstermek içindir. Yukarıda olduğu gibi f için $h_{n,L}^{(N)}$ ve g için $H_{n,L}^{(N)}$ basamak fonksiyonlar dizileri ile yaklaşılmıştır. Bu durumda $\mathcal{L}^1$ de çarpım dizisi-basamak fonksiyonların bir dizisi- hemen heryerde

$$h_{n,L}^{(N)}(x)H_{n,L}^{(N)}(x) \to g_L^{(N)}(x)G_L^{(N)}(x) \tag{12.31}$$

ve $N^2\chi_L$ ile mutlak sınırlıdır. Sınırlı yakınsamadan dolayı $g_L^{(N)}G_L^{(N)} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. $N \to \infty$ için bu dizi $g_L(x)G_L(x)$'ye hemen hemen heryerde yakınsaktır ve aşağıdaki sınırlama vardır:

$$(12.32) \quad \left|g_L^{(N)}(x)G_L^{(N)}(x)\right| \leq |f(x)F(x)|\,\frac{1}{2}(f^2+F^2)$$

ve sınırlı yakınsamadan limit $g_LG_L \in \mathcal{L}^1$ dir. Son olarak $L \to \infty$ için aynı fikir $fF \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ olduğunu gösterir. Üstelik $|fF| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ve

$$(12.33) \quad \left|\int fF\right| \leq \int |fF| \leq \|f\|_{L^2}\|F\|_{L^2},$$

burada geçen son eşitsizlik Cauchy eşitsizliğinden elde edilir-arzu edilirse önce ilk yaklaşım dizisi için ve sonra limit alınmasıyla elde edilir.
(6) $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ gerçel değerli ise $f+g$ yerel integrallenebilirdir ve yukarıdaki tartışmadan

$$(12.34) \quad (f+g)^2 = f^2 + 2fg + g^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}).$$

Sabit c ve $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ için $cf \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ olduğu açıktır.
(7) Yukarıda $\mathcal{L}^1$ için verilen fikir L^1 için de aynıdır. Yani, $\int f^2 = 0$ ise hemen hemen heryerde $f^2 = 0$ ve bu $f = 0$ h.h.y olmasına denktir. Bu durumda, h lar sıfırımsı fonksiyonlar olmak üzere, fh ve h^2 fonksiyonları sıfırımsı ve $(f+h)^2 = f^2 + 2fg + g^2$ olduğundan, $f+h$ fonksiyonların normları f'nin normu ile aynıdır. Aynı şey iççarpım için de doğrudur ve buradan sıfırımsı fonksiyonlara bölünmesiyle elde edilen bölüm uzayının

$$(12.35) \quad L^2(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})/\mathcal{N}$$

bir önHilbert uzayı olduğu elde edilir.
Geriye tamlığı göstermek kalıyor. $([f_n])$ dizisi $L^2(\mathbb{R})$ de $\sum_n \|f_n\|_{L^2} < \infty$ anlamında mutlak toplanabilir seri olduğunu varsayalım. Bu durumda budanmış dizi $f_n\chi_L$, L^1 de Cauchy eşitsizliğinden dolayı

$$(12.36) \quad \int |f_n\chi_L| \leq L^{\frac{1}{2}}(\int f_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

mutlak toplanabilirdir. Burada $F_n = \sum_{k=1}^n f_k$ alınırsa her L için $F_n(x)\chi_L$ dizisi hemen heryerde yakınsaktır. Dolayısıyla

$$(12.37) \quad F_n(x) \to f(x) \quad \text{hemen heryerde.}$$

L^1'nın tamlığından dolayı yerel integrallenebilir olan f fonksiyonunun $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ olduğunu göstermek istiyoruz. Aşağıdaki diziyi ele alalım.

$$(12.38) \quad g_1 = F_1^2, \quad g_n = F_n^2 - F_{n-1}^2.$$

Bu elemanlar $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ dedir ve $n > 1$ için Cauchy eşitsizliğinden
(12.39)

$$\int |g_n| = \int \left|F_n^2 - F_{n-1}^2\right| \leq \|F_n - F_{n-1}\|_{L^2}\|F_n + F_{n-1}\|_{L^2} \leq \|f_n\|_{L^2} 2 \sum_k \|f_k\|_{L^2},$$

burada üçgen eşitsizliği kullanıldı. Bu aslında g_n dizisinin $\mathcal{L}^1$ de mutlak toplanabilir olduğunu gösterir ve

$$(12.40) \quad \sum_n \int |g_n| \leq 2(\sum_n \|f_n\|_{L^2})^2.$$

Gerçekten kısmi toplamlar dizisi F_n^2, $f^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ye yakınsar. Bu $f \in \mathcal{L}^2$ olduğunu gösterir, üstelik

$$(12.41) \quad n \to \infty \quad \text{için} \quad \int (F_n - f)^2 = \int F_n^2 + \int f^2 - 2\int F_n f \to 0.$$

Gerçekten ilk terim $\int f^2$ ye yakınsar ve, Cauchy eşitsizliğinden, çarpımların serisi $f_n f$, L^1 de mutlak toplanabilir ve limiti f^2 dır. Dolayısıyla üçüncü terim $-2\int f^2$ ye yakınsar. Bu $L^2(\mathbb{R})$ de $[F_n] \to [f]$ olduğunu gösterir ve böylece tamlığı göstermiş oluruz.
(8) Kompleks durum için doğrusallığı kontrol etmeliyiz. f yerel integrallenebilir ve $|f|^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ olsun. f'nın gerçel kısmı yerel integrallenebilir ve yukarıdaki tartışmadan $F_L^{(N)}$ yaklaşımı $(F_L^{(N)})^2 \leq |f|^2$ eşitsizliğini sağlayan kare integrallenebilirdir ve sınırlı yakınsamadan önce, $N \to \infty$ ve sonra $L \to \infty$ alınarak, gerçel kısmın $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ de olduğu görülür. Şimdi doğrusallık ve tamlık gerçel durumdan görülür.

Problem 5.4

Aşağıdaki dizi uzayını ele alalım.

$$(12.42) \quad h^{2,1} = \{c : \mathbb{N} \to \mathbb{C}, \sum_j (1 + j^2)|c_j|^2 < \infty\}.$$

(1) Aşağıda tanımlanan

$$(12.43) \quad h^{2,1} \times h^{2,1} \to \mathbb{C}, \quad (c,d) \to < c,d >= \sum_j (1+j^2) c_j \overline{d_j}$$

fonksiyonun Hermitsel bir iççarpım olduğunu gösteriniz. Böylece $h^{2,1}$ bir Hilbert uzayıdır.

(2) Bu uzaydaki norm $\|.\|_{2,1}$ ile gösterilsin ve l^2 deki norm $\|.\|_2$ olmak üzere

$$(12.44) \quad h^{2,1} \subset l^2, \quad \|c\|_2 \leq \|c\|_{2,1} \quad \forall c \in h^{2,1}$$

olduğunu gösteriniz. *Çözüm :* Cauchy eşitsizliğinden

$$< c,d >= \sum_j (1+j^2)^{\frac{1}{2}} c_j \overline{(1+j^2)^{\frac{1}{2}}) d_j}$$

(12.45)

$$\sum_j \left| (1+j^2)^{\frac{1}{2}} c_j \overline{(1+j^2)^{\frac{1}{2}}) d_j} \right| \leq (\sum_j (1+j^2)|c_j|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_j (1+j^2)|d_j|^2)^{\frac{1}{2}}$$

dolayı tanımlanan seri mutlak yakınsak olduğundan iççarpım iyi tanımlıdır.

Bu,

$$(12.46) \quad \|c\|_{2,1} = (\sum_j (1+j^2)|c_j|^2)^{\frac{1}{2}}$$

ifadesi sadece bütün c_j lerin sıfır olması durumunda sıfır olduğundan, sanki-doğrusal ve pozitif tanımlıdır. Tamlık, l^2 için olduğu gibi elde edilir-$c^{(n)}$ bir Cauchy dizisi ise $(1+j)^{\frac{1}{2}} c_j^{(n)}$ Cauchy olduğundan, her kordinatı $c_j^{(n)}$ yakınsaktır. c_j limitleri, dizi sınırlı ve A normların bir sınırı olmak üzere,

$$(12.47) \quad \sum_{j=1}^{N} (1+j^2)^{\frac{1}{2}} |c_j|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{N} (1+j^2)^{\frac{1}{2}} \left| c_j^n \right|^2 \leq A$$

olduğundan, $h^{2,1}$ nın elemanlarıdır. $\left\| c^{(n)} - c^{(m)} \right\| \leq \epsilon$ üzerinden $m \to \infty$ için $h^{2,1}$ de Cauchy koşulu $c^{(n)} \to c$ verir.

(2) Her sonlu N için

$$(12.48) \quad \sum_{j=1}^{N} |c_j|^2 \sum_{j=1}^{N} (1+j)^2 |c_j|^2 \leq \|c\|_{2,1}^2$$

olduğundan $h^{2,2} \subset l^2$ olduğu açıktır ve $N \to \infty$ için

$$(12.49) \quad \|c\|_{l^2} \leq \|c\|_{2,1}.$$

Problem 5.5 Ayrılabilir durum için Riesz Temsil Teoremi'mini doğrudan kanıtlayınız.

Ayrılabilir Hilbert uzayından bir (e_i) ortonormal tabanı seçilsin. $T : H \to \mathbb{C}$ sınırlı bir doğrusal fonksiyonel olsun. Aşağıdaki diziyi tanımlayalım.

$$(12.50) \quad w_i = \overline{T(e_i)}, \quad i \in \mathbb{N}$$

(1) Bazı sabit C ler için $|Tu| \leq C\|u\|_H$ olduğunu hatırlayalım. Her sonlu N için

$$(12.51) \quad \sum_{j=1}^{N} |w_i|^2 \leq C^2.$$

(2) $(e_i) \in l^2$ ve

$$(12.52) \quad w = \sum_i w_i e_i \in H$$

olduğuna karar veriniz.

(3) Aşağıdaki ifadenin doğru olduğunu gösteriniz.

$$(12.53) \quad T(u) =< u, w >_H \quad \forall u \in H \quad \text{ve} \quad \|T\| = \|w\|_H.$$

Çözüm.

(1) Sonlu toplam $w_N = \sum_{i=1}^{N} w_i e_i$ Hilbert uzayının bir elemanıdır ve normu Bessel özdeşliğinden dolayı, $\|w_N\|_N^2 = \sum_{i=1}^{N} |w_i|^2$. Bunu açarak

$$(12.54) \quad T(w_N) = T(\sum_{i=1}^{N} w_i e_i) = \sum_{i=1}^{N} w_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{N} |w_i|^2$$

ve T'nın sürekliliğinden

$$(12.55) \quad |T(w_N)| \leq C\|w_N\|_H \Rightarrow \|w_N\|_H^2 \leq C\|w_N\|_H \Rightarrow \|w_N\|_H^2 \leq C^2,$$

elde edilir, istenilen de budur.

(2) $N \to \infty$ alınmasıyla sonsuz toplamın yakınsak olduğu ve $\|w_N - w\| \leq \sum_{j>N} |w_i^2|$ N ile sıfıra gittiğinden

$$(12.56) \qquad \sum_i |w_i|^2 \leq C^2 \Rightarrow w = \sum_i w_i e_i \in H$$

dır.

(3) Her $u \in H$ için, (e_i) lerin tamlığından dolayı $u_N = \sum_{i=1}^N < u, e_i > e_i$, dolayısıyla, T'nin sürekliliğinden

$$T(u) = \lim_{N\to\infty} T(u_N) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} < u, e_i > T(e_i)$$

(12.57)

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} < u, w_i e_i >= \lim_{N\to\infty} < u, w_N >=< u, w >$$

elde edilir, burada iççarpımın sürekliliği kullanıldı. Buradan ve Cauchy eşitsizliğinden $\|T\| = \sup_{\|u\|_H=1} |T(u)| \leq \|w\|$ elde edilir. Tersi ise $T(w) = \|w\|_H^2$ eşitsizliğinden çıkar.