18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

18.102 Fonksiyonel Analize Giriş Bahar Dönemi 2009

DERS 13.BAİRE TEOREMİ, DÜZGÜN SINIRLILIK, ZAYIF YAKINSAK DİZİLERİN SINIRLILIĞI

9 Ders'te ele alınan Baire Teoreminin genişletilmiş hali.

Teorem 8 Eğer M boştan farklı ve tam metrik uzay, $C_n \subset M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ kapalı altkümeler ve

$$(13.1) \quad M = \cup_n C_n$$

varsa, C_n lerden en az birinin içi boş değildir.

Kanıt $p_1 \notin C_1$ seçebiliriz çünkü aksi halde C_1 açık bir yuvar içerirdi. C_1 kapalı olduğundan $B(p_1, \epsilon_1) \cap C_1 = \phi$ sağlayan $\epsilon_1 > 0$ varolmalıdır. Şimdi C_2 içinde olmayan $p_2 \in B(p_1, \epsilon/3)$ seçelim. Bu mümkündür zira aksi durumda $B(p_1, \epsilon_1/3) \subset C_2$, $\epsilon_2 > 0$, $\epsilon_2 < \epsilon_1/3$ ve $B(p_2, \epsilon_2) \cap C_2 = \phi$ olurdu. Görüldüğü gibi hem C_2 kümesinin kapalı olduğunu ve içinin boş olduğu gerçeklerini kullandık. Tümevarımla devam edeceğiz. Sonlu $p_i, i = 1, 2, ..., k$ ve $0 < \epsilon_k < \epsilon_{k-1}/3 < \epsilon_{k-2}/3^2 < ... < \epsilon_1/3^{k-1} < 3^{-k}$ dizisi, hem $p_j \in B(p_{j-1}, \epsilon_{j-1/3})$ hem de $B(p_j, \epsilon_j) \cap C_j = \phi$ sağlasın. Şimdi C_k nın özelliklerini kullanarak p_{k+1} noktası bulacağız. C_k kümesinin içi boş değildir -yani - $B(p_k, \epsilon/3)$ olup, C_{k+1} kümesinde olmayan bir p_{k+1} noktası, üstelik $\epsilon_{k+1} > 0$ için $\epsilon_{k+1} < \epsilon_k/3$ için $B(p_{k+1}, \epsilon_{k+1}) \cap C_{k+1} = \phi$ nedeni ile bir başka p_{k+1} ekleyebiliriz. Bu şekilde M içinde (p_k) dizisini inşa edebiliyoruz. $d(p_k, p_{k+1}) < \epsilon/3$ olduğundan, bu dizi bir Cauchy dizisidir. Gerçekten her $l > 0$ sayısı için

$$(13.2) \quad d(p_k, p_{k+1}) < \epsilon_k/3 + ... + \epsilon_{k+l-1}/3 < 3^{-k} < 2\epsilon_k/3$$

ve bu k sonsuza giderken sıfıra gider. M tam olduğundan bu dizi yakınsamalıdır. (13.2) den görünen limit $q \in M$, her k için $B(p_k, 2\epsilon_k/3)$ kürelerinin kapanışı içinde kalmalıdır. Dolayısı ile her k için $q \notin C_k$ olmalıdır ki, bu da (13.1) ile çelişir. Dolayısı ile en az bir C_n nin içi boş olmamalıdır.□

Bu teoremin bir uygulaması düzgün sınırlılık ilkesi olarak bilinen teoremdir.

Teorem 9 (Düzgün sınırlılık ilkesi) B bir Banach uzayı, V normlu uzay ve her $n \in \mathbb{N}$ için $T_n : B \to V$ (sürekli) sınırlı dönüşümler olsun. Eğer her $b \in B$ için $(T_n(b))$ dizisi V içinde sınırlı ise $sup_n ||T_n|| < \infty$ dir.

Kanıt. Bu Baire teoreminin doğrudan aşağıdaki kümelere uygulanması ile elde edilir. Bu bağlamda

$$(13.3) \quad S_p = \{b \in B : ||b|| \leq 1, ||T_n b||_V \leq p, \forall n\}, p \in \mathbb{N}$$

tanımlayalım. Her T_n sürekli olduğundan, her S_P kapalıdır. Dolayısı ile eğer $b_n \to b$ yakınsak bir dizi ise $||b|| \leq 1$ ve $||T_n(p)|| \leq p$ vardır. S_p kümelerinin birleşimi B uzayının birim yuvarıdır. Yani,

$$(13.4) \quad \{b \in B : d(b,0) \leq 1\} = \bigcup_p S_p$$

Noktasal yakınsamanın gereği olarak $||b|| \leq 1$ sağlayan her b vektörü bir S_p kümesinde olmalıdır. Şimdi Baire teoremini uygulayarak, S_p kümelerinden en az birinin içinin boş olmadığına hükmederiz. Bu ise p, $v \in S_p$ için bulunacak $\delta > 0$ için

$$(13.5) \quad w \in B, \quad ||w||_B \leq \delta \Rightarrow ||T_n(v+w)||_V \leq p, \forall n$$

sağlanması demektir. v yerine $(1-\delta/2)v$, δ'yıda gerektiği gibi seçerek $B(v,\delta)$ yuvarının sıfır vektörü etrafındaki bir yarıçaplı açık yuvar içinde olduğunu söyleyebiliriz. Üçgen eşitsizliğini, $||T_n(v)|| \leq p$ ve T nin dönüşüm normunun kapalı birim yuvar üzerinde alınan supremum olduğunu anımsayarak T_n' lerin dönüşüm normunda sınırlılığını, yani

$$(13.7) \quad ||T_n|| \leq 2p/\delta$$

elde ederiz.□

Geçen derste bahsettiğim gibi bir Hilbert uzayında zayıf topolojide yakınsayan bir dizinin norm sınırlı olduğunu varsaymak zorunda değiliz.

Sonuç. Bir Hilbert uzayındaki (u_n) dizisi, eğer her $v \in H$ için kompleks sayılarda,

$$(13.8) \quad (u_n, v) \to F(v)$$

yakınsaması vardır. Bu nedenle, $||u_n||_H$ sınırlıdır ve bir $w \in H$ için (u_n), w vektörüne zayıf yakınsar.

Kanıt Düzgün sınırlılık ilkesini

$$(13.9) \quad T_n(u) = (u, u_n), T_n : H \to \mathbb{C}$$

sürekli fonksiyonellerine uygulayalım. Her $(|T_n(u)|)$ dizisi kompleks sayılarda yakınsak olduğundan, sınırlıdır. Dolayısı ile, bir C sayısı için aşağıdaki

$$(13.10) \quad ||T_n|| \leq C$$

sağlanır. Ancak $||T_n|| = ||u_n||_H$ olduğundan (u_n) dizisi H uzayında sınırlıdır. Şimdi her u için $T : H \to \mathbb{C}$ fonksiyonelini

$$(13.11) \quad T(u) = lim_n T_n(u) = lim_n(u, u_n)$$

olarak tanımlayalım. Varsayımdan, bu limit her $u \in H$ için vardır. Doğrusallık ve (13.10) gereğince sınırlıdır, $||T|| \leq C$. Riesz Gösterim Teoreminden bir $w \in H$ için

$$(13.12) \quad T(u) = (u, w), \forall u \in H$$

elde ederiz. Dolayısı ile her $u \in H$ için $(u_n, u) \to (w, u)$ ve ileri sürüldüğü gibi $u_n \rightharpoonup w$ zayıf yakınsaması vardır.□

Baire teoreminin ikinci ana uygulaması aşağıdakidir.

Teorem 10. (Açık dönüşümler) Eğer $T : B_1 \to B_2$ Banach uzayları arasında sürekli ve üzerine ise, açık bir dönüşümdür. Yani B_1 deki her açık O kümesi için

$$(13.13) \quad T(O) \quad \text{açıktır.}$$

Kanıt. Bu bir bakıma yanlış yöndeki süreklilikter ve dönüşümlerin terslerinin sürekliliğinde kullanılır. Kanıt, Baire teoremini kullanırsa da burada benzer ancak farklı bir yol izlenecektir. Kanıtı iki kısma ayıralım.

(1). Bu kısımda kanıtlanacak husus B_1 deki açık bir yuvarın T altındaki görüntüsünün kapanışı için 0 vektörünün bir iç nokta olduğudur - başka bir deyişle- B_2 içinde sıfır vektörü etrafında açık bir yuvar içerir. Bunu görmek için Baire teoremini

$$(13.14) \quad C_p = \overline{T(B(0,p))}$$

ile tanımlanan kümelere uygulayalım. Kapanış almamızın nedeni Baire teoremindeki kümelerin kapalı olmalarındandır. Ancak buraya geçmeden önce, T üzerine olduğundan- yani iz uzayındaki herşey bir vektörün görüntüsü olduğundan,

$$(13.15) \quad B_2 = \bigcup_p T(B(0,p))$$

gerçeğini yazalım. Dolayısı ile birleşimdeki C_p kümelerinden birisinin iç noktası v vardır. T nin üzerine olduğunu kullanarak, bir $u \in B_1$ için $v = Tu$ yazılabilir. C_p kümeleri p ile arttıklarından, gereğinde daha büyük bir p seçerek ve v nin hala bir iç nokta olduğunu gözardı etmeksizin, $0 = v - Tu$ vektörünün de bir iç nokta olduğunu gözlemliyelim. Dolayısı ile bir $\delta > 0$ için

$$(13.16) \quad C_p \supset B(0,\delta)$$

bulalım.

(2) Baire teoremini kullandıktan sonra, şimdi (13.16) nın ne anlama geldiğini düşünelim. Bu her $v \in B_2$, $||v|| < \delta$ vektörünün u_n ler, $||u_n|| \le p$ olmak üzere bir (Tu_n) dizisinin limiti olduğu anlamına gelir. Bu dizinin yakınsadığını göstermek istiyoruz. T dönüşümünün doğrusallığını kullanıp, v vektörünün normunu değiştirebiliriz. Dolayısı ile (13.16) kullanarak verilen keyfi $v \in B_2$ için $v' = \delta v/2||v||$ alarak, $||u'_n|| \le p$ sağlatarak, $Tu'_n \to v'$ kabul edebiliriz. Şimdi, $u_n = ||v||u'_n/\delta$, hem $||u_n|| \le 2p||v||/\delta$ hem de $Tu_n \to v$ sağlayacaktır. Aritmetiği sadeleştirmek gayesi ile $c = p/2\delta$ olmak üzere T yerine cT alalım. Bu her $v \in B_2$ için $||u_n|| \le ||v||$ sağlamak üzere $Tu_n \to v$ sağlayan $u_n \in B_1$ dizisinin varlığını verir.

Şimdi dizinin limitine geçmeden önce v vektörüne istediğimiz kadar yakınlaşa bileceğimizi görelim. Bu, B_2 deki her v vektörü için

$$(13.17) \quad \exists u \in B_1, ||u|| < ||v||, ||v - Tu|| \le \frac{1}{2}||v||$$

demektir. Buradan öteleme ile daha iyi bir dizi seçebiliriz.Keyfi alınan $w = w_1 \in B_1$ ve normu $||w_1|| < 1$ olmak üzere (13.17) den $v = w = w_1$ için $u_1 = u$ seçelim. Böylece $||u_1|| < 1$, $w_2 = w_1 - Tu_1$ vektörü ise $||w_2|| < \frac{1}{2}$ sağlanmış olur. Şimdi tümevarım yapmak için B_1 de $j < n, u_j$ dizisini $||u_j|| \le 2^{-j+1}$ ve $w_j = w_{j-1} - Tu_{j-1}$ ve $||w_{j1}|| < 2^{-j+1}$ verilmiş kabul edelim. Tümevarımı tamamlamak ve u_n dizisini elde etmek için

$$(13.18) \quad w - T(\sum_{j=1}^{n} u_j) = w_1 - Tu_1 - T(\sum_{j=2}^{n} u_j) = w_2 - Tu_2 - T(\sum_{j=3}^{n} u_j) = w_{n+1}$$

yazalım.Terimleri u_n olan seri, B_1 uzayı tam olduğundan mutlak toplanabilirdir ve

$$(13.19) \quad w = Tu, u = \sum_j u_j, ||u|| \le 2$$

sağlanır. Dolayısı ile B_2 de $w \in B(0,1)$ vektörünün B_1 de $B(0,2)$ yuvarının T altındaki izinde kaldığını gördük. c ile çarpılmamış T dönüşümüne geri dönersek bir $\delta > 0$ için

$$(13.20) \quad B(0,\delta) \subset T(B(0,1))$$

elde ederiz.

(3) Şimdi artık her açık O kümesinin T altındaki izinin açık olduğunu görebiliriz. Çünkü, eğer $w \in T(O)$ ise bir $u \in O$ için $w = Tu$ olacaktır ve bu nedenle yeterince küçük ϵ için, $B(w, \epsilon\delta)$ kümesi $u + B(0,\epsilon) \subset O$ sağlanacaktır.□

Şimdi Açık gönderim teoreminin iki uygulamasını vereceğiz.

Sonuç 3. $T : B_1 \to B_2$ iki Banach uzayı arasında 1-1 ve örten sınırlı doğrusal bir dönüşüm olsun. T bir homomorfizmadır. Yani, mutlaka doğrusal olması gereken, tersi aynı zamanda sınırlıdır.

Kanıt. Burada karışıklığa neden olabilecek tek şey gösterimdir. T'nin tersini S ile gösterirsek $S : B_2 \to B_1$ doğrusaldır. Eğer $O \subset B_1$ açık bir küme ise $S^{-1} = T(O)$ açık gönderim teoreminden açık ve S sürekli olacaktır.□

İkinci uygulama ise ;

Teorem 11(Kapalı Grafik Teoremi) $T : B_1 \to B_2$ iki Banach uzayı arasında doğrusal T dönüşümünün sınırlılığı için yeterli ve gerekli koşul grafiği

$$(13.21) \quad Gr(T) = \{(u,v) \in B_1 \times B_2, v = Tu\}$$

kümesinin çarpım Banach uzayı $B_1 \times B_2$ de kapalı olmasıdır. (Çarpım Banach uzaylarını işledik mi? Eğer yanıtınız hayır ise bir-iki dakika düşünün lütfen!)

Kanıt. T sınırlı (sürekli) olsun. Bir (u_n, v_n) dizisinin $Gr(T)$ de olması için gerek ve yeter koşul $v_n = Tu_n$ olmasıdır. Eğer dizi yakınsıyor ise bu $u_n \to u$ ve T nin sürekliliğinden $v_n = Tu_n \to Tv$ demektir. Bu ise limitin $Gr(T)$ kümesinde olduğunu, bir başka deyişle $Gr(T)$ grafiğinin kapalılığını verir. Şimdi grafiğin kapalı olduğunu varsayalım. $B_1 \times B_2$ çarpım uzayından çarpan uzaylarına $\pi(u,v) \to u$ ve $\pi(u,v) \to v$ tanımlı projeksiyonları düşünelim. Her ikisi de sürekli olan bu dönüşümleri $Gr(T) \subset B_1 \times B_2$ uzayına kısıtlıyalım.Buradan şu şekle ulaşırız:

$$\begin{tikzcd} & Gr(T) \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ B_1 \arrow[rr, "T"] & & B_2 \end{tikzcd}$$

Bu şekil geçişkendir. $v = Tu$ olduğundan $(u, v) \in Gr(T)$ için $T\pi_1(u, v) = \pi_2(u, v)$ vardır. $Gr(T) \subset B_1 \times B_2$ kapalı olduğundan, $Gr(T)$ kendisi de bir Banach uzayıdır.Ve π_1 ve π_2 dönüşümlerinin $Gr(T)$ kümesine kısıtlanışları da süreklidir. Her u sadece bir ikilinin, yani sadece (u, Tu) ikilisinin ilk kordinatı olabileceğinden π_1, 1-1 ve örtendir. Yukarıdaki Sonuç'tan onun tersi, S de sürekli ve netice olarak $T = \pi_2 \circ S$ de, geçişkenlikten, süreklidir.$\square$