18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

DERS 19.FREDHOLM DÖNÜŞÜMLERİ

Özeşlenik kompakt dönüşümlerin spektral kuramına doğru adım atacağız. Bu kuram matrislerin spektral kuramına yakındır ve bir çok kullanışlı uygulamaları vardır. Genel olarak sınırlı özeşlenik dönüşümlerin oldukca yerleşmiş spektral kuramı olmasına karşın burada yer verilmeyecektir. Ayrıca özeşlenik olmayan kompakt dönüşümlerin spektral kuramı da de oldukça zengindir-bunlar ele alınacaktır. Örneklerden de anlaşılacağı gibi kompakt ve özeşlenik olmayan dönüşümlerin spektral kuramı yeterli değildir.

Bazı anlamlarda kompakt dönüşümlerin "küçük" olması sonlu ranklı dönüşümlere benzer. Bu kabul edilirse, aşağıdaki türden dönüşümlere "büyük" denebilir. Dollayısıyla,

$$(19.1) \quad Id - K, \quad K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$$

dönüşümleri "büyük" çağrışımı yapacaklardır. Spektral kuramın yapısı gereği bu dönüşümlerle epey ilgilenilecek. $\lambda \in \mathbb{C}$ nın, K dönüşümünün özdeğeri olması

$$(19.2) \quad Ku - \lambda u = 0$$

eşitliğının -0 dan farklı-bir çözümünün olması anlamındadır, zaten $u = 0$ da denklemin her zaman bir çözümüdür. $\lambda \neq 0$ ise λ ile bölerek,

$$(19.3)(Id - \lambda^{-1}K)u =$$

denkleminin çözümüne bakarız, bu durumda (19.1) deki kompakt dönüşüm $\lambda^{-1}K$ ile değişmiş olur.

$Id-K$ dönüşümünün özellikleri nelerdir? Bu özelliklerden üç tanesi aşağıdadır.

Önerme 26. $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ayrılabilir bir Hilbert uzayında kompakt dönüşüm ise

$$null(Id - K) = \{u \in \mathcal{H} : (Id - K)u = 0\} \quad \text{sonlu boyutlu}$$

$$(19.4) Ran(Id - K) = \{v \in \mathcal{H} : \exists \quad u \in \mathcal{H} \quad v = (Id - K)u \quad \text{kapalı } \}$$

ve

$$Ran(Id - K)^{\perp} = \{w \in \mathcal{H} : (w, Ku) = 0, \forall u \in \mathcal{H}\}, \quad \text{sonlu boyutlu}$$

ve üstelik

$$(19.5) \quad dim(null(Id-K)) = dim(Ran(Id-K)^{\perp}).$$

Tanım. Bir Hilbert uzayında tanımlı sınırlı bir dönüşüm $F \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, (19.4) deki üç koşul sağlanıyorsa, bu dönüşüme *Fredholm* denir- sıfır uzayı sonlu boyutlu, görüntüsü kapalı ve görüntüsünün diktümleyeni sonlu boyutludur.

Genelde, satır-rank = sütün-rankı olan Fredholm dönüşümlerinde (19.5) eşitliği doğru değildir. Gerçekten bu iki tamsayının farkı

$$(19.6) \quad ind(F) = dim(null(Id-K)) - dim(Ran(Id-K)^{\perp})$$

çok ilginç özellikleriyle çok önemlidir ve kullanılır.

Bir altuzayın diktümleyeni uzayın kapanışının diktümleyeni gibi olduğundan son iki koşul birbirlerinden bağımsızdırlar. Ayrılabilir bir Hilbert uzayında, örneğin, sıfır uzayı aşikar olan ve görüntüsü yoğun kapalı olmayan sınırlı dönüşümlerler vardır. Bu nasıl olabilir? $L^2(0,1)$ de x fonksiyonuyla çarpma dönüşümünü ele alalım. Bu bir dönüşümdür ve sıfır uzayında bir u elemanı $xu(x) = 0$ h.h.y özelliğındedir ve böylece u h.h.y sıfırdır. Üstelik $\epsilon > 0$ için, fonksiyonların $x < \epsilon$ üzerinde sıfır olması, görüntünün yoğun olduğunu gösterir. Açıkca bu dönüşüm tersinir değildir.

Kanıtı vermeden önce bu sonucu kontrol edelim-(19.9) deki üçüncü koşul ilkinden elde edilir.

Önerme 27. $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ bir Hilbert uzayında sınırlı ve B^* eşlenik dönüşümü ise

$$(19.7) \quad Ran(B)^{\perp} = (\overline{Ran}(B))^{\perp} = \{v \in \mathcal{H} : (u,w) = 0, \forall w \in Ran(B)\} = Nul(B^*).$$

Kanıt. $Ran(B)$ nin diktümleyeninin tanımından

$$(19.8) \quad v \in (Ran(B))^{\perp} \Leftrightarrow (v,w) = 0, \forall w \in Ran(B) \Rightarrow (v, Bu) = 0, \forall u \in \mathcal{H}$$

$$\Rightarrow (B^*v, u) = 0, \forall u \in \mathcal{H} \Leftrightarrow B^*v = 0 \Leftrightarrow v \in Nul(B^*).$$

Diğer taraftan, herhangi bir altuzay için $V^{\perp} = (\overline{B})^{\perp}$ olduğu gözlemlenmişti- sağ taraf kesinlikle sol tarafın içerisinde ve iççarpımın sürekliliğinden her $v \in V$ için $(u,v) = 0$ ise her $w \in \overline{V}$ için, V de $v_n \to w$ olacak biçimde bir (u_n) dizisi olacağından, $(u, w) = 0$ dır.

Bir sonuç olarak, kompakt K dönüşümü için $Nul(Id-K)$ sonlu boyutlu ise, $Nul(Id - K^*)$ sonlu boyutludur ve dolayısıyla $Ran(Id - K)^\perp$ sonlu boyutlu elde edilir.

Önerme 26 nın Kanıtı. Öncelikle sonlu ranklı dönüşüm $K = T$ için kontrol edelim. Bu durumda

$$(19.9) \quad Nul(Id - T) = \{u \in \mathcal{H} : u = Tu\} \subset Ran(T).$$

Sonlu boyutlu bir uzayın her altuzayı da sonlu boyutlu olduğundan sonlu ranklı dönüşümlerin durumunda bu ilk koşulu kanıtlar. Yine T'nin sonlu ranklı olması durumunda görüntü

$$(19.10) \quad Ran(Id - T) = \{v \in \mathcal{H} : v = (Id - T)u \quad \text{bazı} \quad u \in \mathcal{H}\}.$$

$\{u \in \mathcal{H} : Tu = 0\}$ uzayını ele alalım. T sürekli olduğundan, bu uzayın kapalı olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan (19.10) dan

$$(19.11) \quad Nul(T) \subset Ran(Id - T).$$

Sonlu ranklı dönüşümlerin

$$(19.12) \quad Tu = \sum_{i=1}^{N} (u, e_i) f_i$$

biçiminde yazılabildiğini hatırlayalım. Burada f_i leri T'nin görüntü uzayının tabanın olarak alabiliriz. Bu durumda e_i ler doğrusal bağımsızdır-gerçekten, eğer olmasalardı, bazı N ler için, örneğin son vektör olan e_N için, $e_N = \sum_{j<N} c_i e_j$ diğerlerinin doğrusal birleşimi olarak yazilabilirdi. Buradan

$$(19.13) \quad Tu = \sum_{i=1}^{N-1} (u, e_i)(f_i + \overline{c_j} f_N)$$

T'nin görüntüsünün en fazla $N - 1$ boyutlu olduğunu elde edilirki, bu f_i lerin taban vektörleri olmasıyla çelişir.

(19.12) ye geri gitmeyle, $Nul(T)$'nin kalan boyutu sonludur. $\mathcal{H}$'nın her elemanı

$$(19.14) \quad u = u' + \sum_{i=1}^{N} d_i e_i, \quad u' \in Nul(T)$$

biçimindedir. Dolayısıyla, (19.12)'e geri gidersek, eğer $Ran(Id - T) \neq Nul(T)$ ise ve eşitlik olmayabilirler -$Nul(T)$'nin kapalı olmasını kullanarak- $Nul(T)$'ye dik olacak biçimde bir $g \in Ran(Id - T) \setminus Nul(T)$ bulabiliriz. Bunu yapmak için $Nul(T)$ de olmayan $Ran(Id - T)$ de bir g' seçerek başlayalım. $g \perp Nul(T)$, $u'' \in Nul(T)$ olmak üzere $g' = u'' + g$ biçiminde yazabiliriz. Bu durumda $g \neq 0$, $Ran(Id - T)$ içinde ve $Nul(T)$'ye diktir. Şimdi yeni uzay $Nul(T) \oplus \mathbb{C}_g$, $Ran(Id - T)$ içinde yine kapalıdır. Bu işleme $Nul(T)$'yi kapalı ve daha büyük altuzayla değiştirerek devam ederiz. Sonlu adımdan sonra $Ran(Id - T)$'nin kapalı olma durumunu elde ederiz.

Böylece aşağıdaki önteoremi kanıtladık.

Önteorem 13. Bir Hilbert uzayının altuzayı $V \subset \mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ da kalan boyutu sonlu kapalı bir altuzayını içeriyorsa -yani W kapalı olmak üzere $W \subset V$ ve her $u \in \mathcal{H}$ elemanı

$$(19.15) \quad u = u' + \sum_{i=1}^{N} c_i e_i, \quad c_i \in \mathcal{C}$$

olacak biçimde $e_1, e_2, ..., e_N \in \mathcal{H}$ varsa- V kapalıdır.

Bu, $K = T$ dönüşümünün sonlu ranklı olması durumunda kanıtı verir. Genel olarak K'nın kompakt olması durumunda ne yapılmalıdır? K kompakt ise ona sonlu ranklı dönüşümlerle yaklaşırız. Eğer K kompakt ise,

$$(19.16) \quad K = B + K, \quad \|B\| < \frac{1}{2}$$

olacak biçimde $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sonlu ranklı T dönüşümü vardır. Şimdi $Id - K$'nın sıfır uzayını ele alalım ve (19.16)'ı kullanarak

$$(19.17) \quad Id - K = (Id - B) - T = (Id - B)(Id - T'), \quad T' = (Id - B)^{-1} T$$

olarak yazalım. Burada Neumann serisinin yakınsaklığını kullandık. Dolayısıyla $(Id - B)^{-1}$ vardır.

Şimdi T' sonlu ranklı ise ideal özelliğinden

$$(19.18) \quad Nul(Id - K) = Nul(Id - T') \quad \text{sonlu boyutludur.}$$

$Id - B$ tersinir olduğundan $(Id - K)u = 0$ olması $(Id - T')u = 0$ ifadesine denk olmasını kullandık. Bu (19.4) deki ilk koşuldur.

Benzer biçimde farklı bir yoldan ikinci koşulu analiz edebiliriz.

$$(19.19) \quad Id - K = (Id - B) - T = (Id - T'')(Id - B), \quad T'' = T(Id - B)^{-1}$$

yazabiliriz. Burada T'' sonlu ranklıdır ve

$$(19.20) \quad Ran(Id - K) = Ran(Id - T'') \quad \text{kapalıdır.}$$

Tekrar $Id-B$ nin tersinirliğini kullanarak-$(Id-K)u$ biçimindeki her elemanın, $u' = (Id - B)u$ olmak üzere, $(Id - T'')u'$ biçiminde olduğu görülür. Tersi de doğrudur.

Böylece (19.4) dekilerin hepsi kanıtlandı, daha önce tartışıldığı gibi üçünçüsü birincisinden elde edilir.

(19.5) için durum ne olur? Öncelikle dönüşümün sonlu ranklı olması için kontrol edelim. Bir kompakt dönüşüm K için, T sonlu ranklı, $\|B\| < \frac{1}{2}$ tersinirdir ve $G = Id - B$ olmak üzere

$$(19.21) \quad (Id - K) = G(Id - T)$$

yazabiliriz. Görmek istediğimiz şey

$$(19.22) \quad dimNul(Id - K) = dimNul(Id - T) = dimNul(Id - K^*).$$

Üstelik, $Id - K^* = (Id - T^*)G^*$ ve G^* tersinirdir, dolayısıyla

$$(19.23) \quad dimNul(Id - K^*) = dimNul(Id - T^*)$$

ve böylece $dimNul(Id-T) = dimNul(Id-T^*)$ olduğunu göstermek yeterlidir-bu sonlu ranklı dönüşüm içi aynı şey demektir.

Bir sonlu ranklı dönüşüm için, (19.12) de yazıldığı gibi, bütün e_i lerle birlikte, f_i ler tarafından üretilen W uzayına bakabiliriz. Şimdi $T : W \to W$ için,

$$(19.24) \quad T^*v = \sum_{i=1}^{N} (v, f_i)e_i.$$

Dolayısıla T dönüşümü de W uzayını W uzayına götürmektedir. Aslında $w' \in W^\perp$ ise, $Tw' = 0$ ve $T^*w' = 0$ olduğundan her i için $(w', e_i) = 0$ ve $(w', f_i) = 0$ dır. Buradan, bu sonlu boyutlu uzayda $Id - T$ ye eşit dönüşüm için $R : W \longleftrightarrow W$ yazılırsa, W de R^*, $Id - T^*$ ile verilir ve Hilbert uzay yapısını W de $\mathcal{H}$'nın bir altuzayı gibi kullanılabilir. Dolayısıyla

$$(19.25)(Id - T)u = 0 \Longleftrightarrow u \in W \quad \text{ve} \quad Ru = 0,$$

$$(Id - T^*)u = 0 \Longrightarrow u \in W \quad \text{ve} \quad R^*u = 0$$

gösterilmiş oldu. Böylece Teoremi sonlu boyutta

$$(19.26) \quad dimNul(R) = dimNul(R^*)$$

ifadesine indirgedik.

Kuşkusuz bu teoremi biliyorsunuz. Bu teorem herşeyin W uzayı üzerinde olmasından ve W üzerinde $dimNul(R) = dimNul(R^*)$ ve sonlu boyutta

$$(19.27) \quad dimNul(R) + dimRan(R) = dimW = dimRan(W) + dimNul(R^*).$$

sağlanmasından elde edilir. □

PROBLEMLER 9

Aşağdaki düzeltmelere dikkat ediniz.

(1) P9.2(2) ve diğer yerlerde $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$ yerine $C^0(\mathcal{S})$ gelecek. Burada $C^0(\mathcal{S})$ daire üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlardır, ve supremum normu ile donanmıştır.

(2) (19.4) da $u = Sv$ değil, $u = Fv$ olacak.

(3) (19.41) den önce $u = Fv$ olacak.

(4) (19.43) deki tartışma detaylandırıldı.

(5) P10.2'nın son kısmı detaylandırıldı.

Bu hafta, periyodik fonksiyonlar üzerinde,

$$(19.28) \quad Qu = (-\frac{d^2}{dx^2} + V(x))u(x)$$

eşitliğini sağlayan dönüşümlerin tersinirliğini çalışmak yararlı olur. Buna yaklaşmak için integral dönüşümlere ihtiyaç vardır.

Problemlere başlamadan önce periyodik fonksiyonlara gözatmaya gereksinim vardır.

Problem 9.1 Periyodik Fonksiyonlar $\mathbb{S}$ kompleks sayılarda bir yarıçaplı, 0 merkezli çember olsun, yani, $\mathbb{S} = \{z : |z| = 1\}$.

(1) Aşağıda 1-1 ilişki olduğunu gösteriniz.

$$(19.29) \quad \mathcal{C}^0(\mathbb{S}) = \{u | u : \mathbb{S} \to \mathbb{C}, \text{sürekli}\} \to$$

$$\{u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \text{sürekli}\, u(x + 2\pi) = u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

(2) Aşağıda 1-1 ilişki olduğunu gösteriniz.

$$(19.30) \quad L^2(0, 2\pi) \longleftrightarrow \{u \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}), u|_{(0,2\pi)} \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$$

$$\text{ve} \quad u(x + 2\pi) = u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\} \setminus \mathcal{N}_P,$$

burada $\mathcal{N}_P$, her $x \in \mathbb{R}$ için $u(x + 2\pi) = u(x)$ eşitliğini sağlayan ve hemen her yerde sıfır olan fonksiyonların uzayını göstermektedir.

(3) $L^2(\mathbb{S})$, (19.30) nın sol tarafındaki uzayı gösteriyorsa, $\mathcal{C}^0(\mathbb{S})$ uzayını $L^2(\mathbb{S})$ uzayına yoğun olacak biçimde gömen, bir

$$(19.31) \quad \mathcal{C}^0(\mathbb{S}) \to L^2(\mathbb{S})$$

dönüşümün olduğunu gösteriniz. Buradaki fikir $\mathbb{S}$ üzerindeki fonksiyonların $\mathbb{R}$ de 2π-periyodik fonksiyonlar olarak düşünülebileceğidir.

Problem 9.2. Schrödinger dönüşümü

Aşağıdaki örneği ele alalım.

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2} + V(x)u(x) = f(x) \quad x \in \mathbb{R}, \tag{19.32}$$

(1) Önce $V = 1$ alalım. Neden $V = 0$ almıyoruz? Bu bölümün sonına kadar bunu yanıtlamaya çalışmayınız

(2) $f(x) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S})$ gerçel sayılarda 2π-periyodik fonksiyonlar olmak üzere

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2} + u(x) = f(x) \quad x \in \mathbb{R} \tag{19.33}$$

denkleminin çözümünü hatırlayın. $\mathbb{R}$ de (19.33) i sağlayan iki-kez türevlenebilen ve ikinci türevi sürekli olan 2π-periyodlu tek bir u fonksiyonunun olduğunu kanıtlayınız ve bu çözüm

$$u(x) = (Sf)(x) = \int_{(0,2\pi)} A(x,y)f(y) \tag{19.34}$$

olarak yazılabilir, burada $A(x,y) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$ ve her $x, y \in \mathbb{R}$ için $A(x+2\pi, y+2\pi) = A(x,y)$ sağlanır. İp ucu: Önce periyodiklik kısmını yok varsayarak çözüm bulunuz. Bunu yapmak için, verilen denklemin diferansiyel dönüşümünü çarpanlarına ayırırız. Karşılıklı terimler yok olacağından,

$$v = \frac{du}{dx} - v \quad \text{ise} \quad -\frac{d^2u(x)}{dx^2} + u(x) = -(\frac{dv(x)}{dx} + v) \tag{19.35}$$

denklemine bakalım. Integral çarpanları bulmak için aşağıdaki denklemi ele alalım.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} - u &= e^x \frac{d\phi}{dx}, \ \phi = e^{-x}u \\ \frac{dv}{dx} + v &= e^{-x}\frac{d\psi}{dx}, \ \psi = e^{-x}u. \end{aligned} \tag{19.36}$$

Iki kez integral alarak denklemi ọözünüz ve böylece (19.33) deki diferensiyel denklemin bir çözümünü bulunuz. Bunu iki katlı integral biçiminde yazınız ve integrallerin sırasını değiştirerek çözümü, A', $\mathbb{R}\times[0,2\pi]$ üzerinde sürekli olmak üzere

$$(19.37) \quad u'(x) = \int_{(0,2\pi)} A'(x,y)f(y)dy$$

biçiminde yazınız. $u'(2\pi) - u'(0)$ ve $\frac{du'}{dx}(2\pi) - \frac{du'}{dx}(0)$ farklarını f'yi içeren integraller biçiminde hesaplayınız ve u' yi homojen denklemin çözümü olarak ekleyiniz, $f = 0$ için $c_1e^x + c_2e^{-x}$ dir, dolayısıyla (19.33)' ün yeni çözümü $u(2\pi) = u(0)$ ve $\frac{du}{dx}(2\pi) = \frac{du}{dx}(0)$ ifadelerini sağlar. Şimdi u'nın (19.34) gibi verildiğini kontrol ediniz.

(3) Doğrudan ya da dolaylı olarak $A(x,y) = A(y,x)$ ve A'nın gerçel olduğunu gösteriniz.

(4) S dönüşümünün $L^2(\mathbb{S})$ de sınırlı bir dönüşüme genişletilebileceği görüz.

(5) Aşağıdaki ifadeyi doğrulayınız.

$$(19.38) \quad S(e^{ikx}) = (k^2+1)^{-1}e^{ikx}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(6) Az önceki sonucu kullanarak ya da bir başka şekilde S'nin $L^2(\mathbb{S})$'nın özeşlenik kompakt dönüşüm olduğunu gösteriniz.

(7) $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S})$ ise Sg'nin iki-kez sürekli türevlenebilir olduğunu gösteriniz.
İp ucu :integralin türevini alarak işlem yapınız.

(8) F, $L^2(\mathbb{S})$ de tanımlı, özdeğerleri $(k^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ olan özeşlenik kompakt olmak üzere $S = F^2$ olduğunu gösteriniz.

(9) $F : L^2(\mathbb{S}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{S})$ olduğunu gösteriniz.

(10) (19.32) deki gerçel eşitliğe gidelim ve V'nin sürekli, gerçel değerli ve 2π periyodik olduğunu varsayalım. u iki-kez türevlenebilir, 2π periyodik ve verilen bir $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S})$ için (19.32) sağlanıyorsa

$$(19.39) \quad u + S((V-1)u) = Sf \quad \text{ve böylece}\, u = -F^2((V-1)u) + F^2 f$$

olduğunu gösteriniz ve

$$(19.40) \quad v \in L^2(\mathbb{S}) \quad \text{ve} \quad v + (F(V-1)F)v = Ff \quad \text{olmak üzere} \quad u = Fv$$

olduğu sonucuna varınız, burada $V-1$, $V-1$ ile çarpma dönüşümdür.

(11) Tersine, $v \in L^2(\mathbb{S})$

$$(19.41) \quad v + (F(V-1)F)v = Ff, \quad f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S})$$

ifadesini sağlıyorsa $u = Fv$, 2π periyodik, $\mathbb{R}$ de iki-kez türevlenebilen bir fonksiyondur ve (19.32) yi sağlar.

(12) Spektral teoremi $F(V-1)F$'e uygulayınız ve her $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ için

$$(19.42)\quad \lambda v+(F(V-1)F)v=g,\quad g\in L^2(\mathbb{S})$$

nin her $g\in L^2(\mathbb{S})$ için tek çözümünüm olması için gerekli ve yeterli koşulun her j için $\lambda\neq\lambda_j$ olacak biçimde $|\lambda_j|\to 0$ ifadesini sağlayan $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ de bir λ_j dizisinin varlığı olduğunu gösteriniz.

(13) Her λ_j için

$$(19.43)\quad \lambda_j v+(F(V-1)F)v=0,\quad v\in L^2(\mathbb{S})$$

denkleminin çözümlerinin $\mathbb{R}$ de sürekli 2π periyodik olduğunu gösteriniz.

(14) (19.43) de v'yi sağlayan fonksiyona karşılık gelen $u=Fv$ fonksiyonunun iki-kez sürekli sürekli türevlenebilen, $\mathbb{R}$ de 2π periyodik ve

$$(19.44)\quad -\frac{d^2u}{dx^2}+(1-s_j+s_jV(x))u(x)=0,\quad s_j=\frac{1}{\lambda_j}$$

eşitliğini sağladığını gösteriniz.

(15) Tersine, u sıfıra eşit olmayan, iki-kez sürekli türevlenebilen 2π periyodik ve aşağıdaki denklemi sağlayan bir fonksiyon ise,

$$(19.45)\quad -\frac{d^2u}{dx^2}+(1-s+sV(x))u(x)=0,\quad s\in\mathbb{C}$$

bazı j ler için $s=s_j$ olduğunu gösteriniz.

(16) (19.32) denklemi için Fredholm alternatifi'nin doğruluğunu gösteriniz.

Teorem 14 Gerçel sayılar üzerinde tanımlı ve gerçel değerli sürekli 2π periyodlu V fonksiyonu için ya (19.32) sürekli ve 2π periyodlu her f için yine 2π peryodlu, iki-kez sürekli türevlenebilen tek bir çözüme , veya

$$(19.46)\quad -\frac{d^2w(x)}{dx^2}+V(x)w(x)=0, x\in\mathbb{R}$$

homojen denkleminin sonlu boyutlu, iki-kez sürekli türevlenebilir fonksiyonlardan ve 2π-periyodlu fonksiyonlardan oluşan çözüm uzayı vardır. (19.32) denkleminin çözümü olması için gerek ve yeter koşul (19.46) denkleminin her 2π- periyodlu çözümü w için $\int_{(0,2\pi)} fw=0$ sağlanmasıdır.

Yukarıdan, Schrödinger dönüşümünün tüm 2π periyodlu özfonksiyonlarını anlayabiliriz. Önce, $-\frac{d^2}{dx^2}$ ifadesine 1 eklemede ilahi bir şey olmadığını belirtelim, hakikaten herhangi bir pozitif sabit ekleyip, benzeri sonuçu elde edebiliriz. 0 ile ilgili problem $-\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ homojen denklemini sağlayan sabitlerdedir. Gerçekten kanıtladığımız şey;

$$(19.47) \quad u \to Qu = -\frac{d^2u}{dx^2}u + Vu$$

dönüşümünün iki-kez sürekli türevlenebilen fonksiyonlar uzayı üzerinde sol tersinir olması veya

$$(19.48) \quad -\frac{d^2u}{dx^2}u + Vu = 0$$

denkleminin sıfırdan farklı bir çözümü olmasıdır, bu sol ters $R = F(Id + F(V-1)F)^{-1}F$ dir. Bu dönüşüm kompakt ve özeşlenik'tir. Burada hala yapılacak çok iş vardır. Örneğin,Q dönüşümünün iki-kez türevlenebilir özfonksiyonları, yani $Qu = \tau u$ denkleminin çözümleri $Ru = \tau^{-1}u$ denkleminin sıfırdan farklı çözümleridir.

(19.48) denkleminin sıfırdan farklı çözümü olduğunda ne yapılmalıdır? Bu durumda bu çözümler uzayının sonlu boyutlu olduğunu ve $L^2(\mathbb{S})$ uzayının diktümleyeninde çalışarak aynı sonucun doğru olduğunu gösteriniz.