18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

DERS 21. ARALIKTA GERÇEK POTANSİYEL İÇİN DİRİCHLET PROBLEMİ

Şimdiye kadar yapılanların iki tane "ciddi" uygulamasını yapmak istiyorum. Seçebileceğimiz bir çok uygulama olmasına karşın bir aralık üzerindeki Dirichlet problemi ile başlayalım. Aralık olarak $[0,2\pi]$ aralığını alacağız, çünkü bunu daha önce de ele aldık. Burada $(0,2\pi)$ üzerinde

$$(21.1) \qquad -\frac{d^2u(x)}{dx^2}+V(x)u(x)=f(x), \quad u(0)=u(2\pi)=0$$

problemini çözeceğiz. $u(0)=u(2\pi)=0$ koşulları Dirichlet sınır koşulları olarak bilinir. Burada varsayacağımız şey

$$(21.2) \quad V:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$$

fonksiyonunun sürekliliğidir.

Verilen bir $f\in C^0([0,2\pi])$ fonksiyonu için yukarıdaki denklemi çözmeğe çalışmak, yani denklemi sağlayan iki kez türevi alınabilen ve türevlerinin sürekli olduğu bir fonksiyon aramak anlamlı bir uğraşıdır. Verilen V fonksiyonuna bağlı olarak böylesi bir fonksiyon bulunamıyabilir. Ancak yapabileceğimiz şey aşağıdaki anlamda tutarlı olmaktır:

Önerme 28 Eğer (21.1) denkleminde $0\le V$ ise $C^0([0,2\pi])$ de verilen her f fonksiyonu için (21.1) denklemini çözen ve iki-kez sürekli türevlenebilir tek bir fonksiyon vardır.

Bu probleme doğrudan yaklaşımın biraz zor olduğunu-özellikle (18.13) de ele aldığımız ODD hatırlarsanız- düşünebilirsiniz. Bu probleme bir kaç yaklaşım olmasına karşın biz L^2 kuramını kullanacağız. Pekiyi de işe nasıl başlamalıyız?

Riemann integrali kullanabileceğimizden $V=0$ durumunu nasıl çözebileceğimizi biliyoruz. Dolayısı ile, sınır değerlerini boş verip aralık üzerinde iki kez integral alarak $-\frac{d^2v(x)}{dx^2}=f$ denkleminin çözümünü bulabiliriz:

$$(21.3) \quad v(x)=-\int_0^x\int_0^y f(t)dtdy$$

$(0,2\pi)$ aralığı üzerinde $-\frac{d^2v(x)}{dx^2}=f$ denklemini sağlayacaktır. Eğer f sürekli ise v gerçekten de iki-kez sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olacaktır. İyi de bunu dönüşümlerle ne ilgisi var diye sorabilirsiniz? Bunu yanıtlamak için (21.3) de integral alma sırasını değiştirerek v fonksiyonunu

$$(21.4) v(x) = -\int_0^x \int_t^x f(t)dydt = \int_0^{2\pi} a(x,t)f(t)dt, \quad a(x,t) = (t-x)H(x-t)$$

yazabiliriz. Buradaki Heaviside fonksiyonu $0 \leq y$ değerleri için $H(y) = 1$, $y < 0$ değerleri için ise 0 olarak tanımlanmaktadır. $t - x$ çarpanı $H(t - x)$ fonksiyonunun sıçrama yaptığı noktada sıfır olduğundan $a(x,t)$ fonksiyonu $[0,2\pi] \times [0,2\pi]$ kümesi üzerinde süreklidir. Dolayısı ile v integral dönüşümünün f fonksiyonuna uygulanması ile edilir.

Problem hakkında biraz daha ciddi düşünmeden önce, sağlanması gereken sınır değerlerinin de olduğunu anımsayalım.Integralin alt sınırı sıfır olduğundan,kuşkusuz $v(0) = 0$ sağlanır. Ancak

$$(21.5) \quad v(2\pi) = \int_0^{2\pi} (t - 2\pi)f(t)dt$$

ifadesinin sıfır olmasını gerektirecek bir neden yoktur. Ancak v fonksiyonuna birinci dereceden doğrusal bir fonksiyon ekleyerek hala verilen diferansiyel denklemi sağlatabiliriz. Ancak $x = 0$ noktasında sıfır olma koşulunu da bozmak istemediğimizden, bu doğrusal fonksiyonu sadece cx biçiminde seçebiliriz, ancak doğru c sabitini seçmek için

$$(21.6) \quad c = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (t - 2\pi)f(t)dt$$

düşünürsek, $(v + cx)(2\pi) = 0$ gerçeklenir ve istediğimiz çözüm

$$(21.7) \quad w(x) = \int_0^{2\pi} b(x,t)f(t)dt, b(x,t) = (t - x)H(x - t) - \frac{t - 2\pi}{2\pi}x$$

olarak elde edilir. Bu çözüm iki kez sürekli türevlenebilir ve tekdir.$-\frac{d^2w(x)}{dx^2} = f$ denklemini $(0, 2\pi)$ aralığında sağladığı gibi, aralığın son noktalarında sıfır değerini alır.□

Önteorem (21.7) de verilen integral dönüşümü sürekli olduğundan $C^0([0,2\pi])$ uzayından $L^2(0,2\pi)$ uzayına kompakt ve kendine özeşlenik bir dönüşüme genişler.

Kanıt. Bunun nedeni w fonksiyonunun çekirdeğinin(sıfır uzayının)

$$(21.8) \quad b(t,x) = b(x,t)$$

anlamında çift (bunu bir kez de kendiniz yapın), sürekli ve gerçel değerli olduğundandır.□

Burada daha da genel bir sonuç verebiliriz.
Önerme 29 Eğer $b \in C^0([0,2\pi]^2)$ ise

$$(21.9) \quad Bf(t) = \int_0^{2\pi} b(x,t)f(t)dt$$

ile tanımlanan dönüşüm $L^2(0,2\pi)$ uzayı üzerinde kompakt bir dönüşümdür. Ek olarak b bir de

$$(21.10) \quad \overline{b(t,x)} = b(x,t)$$

sağlıyorsa, B özeşleniktir.
Kanıt. Şimdi bir problemde gördüğünüz gibi $u_k = csin(kx/2), k \in \mathbb{N}$ fonksiyonları $L^2(0,2\pi)$ için ortonormal bir baz oluşturur. Türev alarak, bu fonksiyonların

$$(21.11) \quad -\frac{d^2u_k}{dx^2} = k^2/4u_k$$

sağladığını ve $u_k(0) = 0 = u_k(2\pi)$ olduğunu görebiliriz. Yukarıda keşfettiğimiz teklik özelliğinden

$$(21.12) \quad Bu_k = \frac{4}{k^2}u_k, \quad \forall k$$

buluruz. Bu durumda ortonormal tabanın B dönüşümünün özfonksiyonları olduğunu elde ederiz. u_k özfonksiyonlarına karşılık gelen öz altuzaylar bir boyutludur ve özdeğerler ise $4k^{-2}$. Bu çok özel durum bize B dönüşümünü ortonormal taban üzerinde tanımlı bir başka dönüşümün karesi olarak yazmayı olanaklı kılar. Bir başka deyişle;

$$(21.13) \quad Au_k = \frac{2}{k}u_k \Rightarrow B = A^2$$

Burada da A dönüşümünün özdeğerleri 0'a yakınsadığından A, $L^2(0,2\pi)$ uzayı üzerinde kompakt ve özeşlenik bir dönüşümdür. Şimdi bundan çok daha fazlasının doğru olduğunu göreceğiz.
Önteorem A dönüşümü $L^2(0,2\pi)$ uzayını $C^0([0,2\pi])$ uzayına gönderir ve her $f \in L^2(0,2\pi)$ için $Af(0) = Af(2\pi) = 0$ sağlanır.
Kanıt. Eğer $f \in L^2(0,2\pi)$ uzayında ise f fonksiyonunu $u_k$lar türünden Fourier- Bessel serisine açarak

$$(21.14) \quad f = \sum c_k u_k, \quad (c_k) \in L^2$$

elde ederiz. Kuşkusuz burada, tanım gereği

$$(21.15) \quad Af = \sum_k \frac{2c_k}{k} u_k$$

vardır. Her u_k sınırlı ve sürekli bir fonksiyondur ve u_k'nın sınırı k'dan bağımsızdır. Dolayısı ile (21.15) deki seri $p \geq q$ için düzgün Cauchy olduğundan, mutlak ve düzgün yakınsar. Şimdi Cauchy-Schwartz eşitsizliğini kullanarak;

$$(21.16) \quad |\sum_{k=p}^{q} \frac{2c_k}{k} u_k| \leq 2|c| \sum_{k=p}^{q} |c_k| k^{-1} \leq 2|c| ||f||_{L^2} (\sum_{k=p}^{q} k^{-2})^{1/2}$$

elde ederiz ve bu

$$A : L^2(0, 2\pi) \to C^0(([0, 2\pi])$$

dönüşümünün sınırlılığını kanıtlar. Her k için $u_k(0) = u_k(2\pi) = 0$ olduğundan,düzgün yakınsama nedeni ile $Af(0) = Af(2\pi) = 0$ buluruz.□

Şimdi çözmek istediğimiz (21.1) denklemine geri dönelim. Vu terimini denklemin sağ tarafına geçirir,

$$(21.17) \quad u = -A^2(Vu) + A^2 f$$

ifadesinin verilen denklemi ve sınır değer koşullarını sağladığını ümit ederiz. Gerçekten, eğer (21.17) $v = -AVu + Af$ iken doğru olacaksa, $u = Av$ olmalıdır. Bunun yerine

$$(21.18) \quad v = -AVAv + Af \Rightarrow (Id + AVA)v = Af$$

arayabiliriz.

Şimdi gerçel ve sınırlı V ile çarpmanın $L^2(0, 2\pi)$ uzayı üzerinde sınırlı ve özeşlenik bir dönüşüm olduğunu biliyoruz. Dolayısı ile AVA dönüşümü de özeşlenik ve kompakt bir dönüşümdür, ve dolayısı ile spektral kuramını $Id + AVA$ dönüşümü için kullanabiliriz. Bu dönüşümün tam bir ortonormal tabanı vardır ve tersinir olması için gerek ve yeter koşul sıfır uzayının aşikar, yani, sadece sıfır olmasıdır.

A dönüşümünün sıfırları $u = -AVAu$ sağlamalıdırlar. Diğer yandan AVA dönüşümü *pozitif* olduğundan ve V'nin negatif olmamasını kullanarak,

$$(21.19) \quad (AVAw, w) = (VAv, Av) = \int_{(0,2\pi)} V(x)|Av|^2 \geq 0 \Rightarrow \int_{(0,2\pi)} |u|^2 = 0$$

çekirdeğin olmadığını görürüz- başka bir deyişle AVA dönüşümünün tüm özdeğerleri en azından negatif değildirler- dolayısıyla -1 bir özdeğer değildir.

Böylece $Id + AVA$ dönüşümünün $L^2(0, 2\pi)$ uzayında tersinir ve tersi, Q nin de kompakt ve özeşlenik olmak üzere $Id + Q$ biçiminde olduğunu elde ederiz. Bu nedenle (21.18) eşitliğini çözmek için yapmamız gereken $L^2(0, 2\pi)$ içinde

$$(21.20) \quad v = (Id + Q)Af \Leftrightarrow v + AVAv = Af$$

almaktır. Bu yapıldığında, gerçekten

$$(21.21) \quad u = Av$$

ifadesinin $u + A^2Vu = A^2f$ sağladığı görülür. Gerçekten $u \in C^0([0, 2\pi])$ son noktalarda sıfır olduğundan, (21.20) den $v \in L^2(0, 2\pi)$ elde ederiz.

Üstelik eğer, $f \in C^0([0, 2\pi])$ ise $Bf = A^2f$ fonksiyonunun , B nin tanımından, yani integraller ile tanımlandığından, iki kez sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olduğunu biliyoruz. Şimdi artık $u \in L^2$ fonksiyonunun $u = -A^2(Vu) + A^2f$ denklemini sağladığını biliyoruz. $Vu \in L^2(0, 2\pi)$ olduğundan $A(Vu)$ da oradadır. Dolayısı ile, yukarıda görüldüğü gibi, $A(A(Vu))$ süreklidir. Şimdi bunu yukarıdaki A^2f ile ilgili gözlemle birleştirerek, önce U'nun, sonrada Vu'nun sürekliliğini elde ederiz. Şimdi işlemleri tekrarlıyarak

$$(21.22) \quad u = -A^2(Vu) + A^2f$$

fonksiyonunun iki kez sürekli türevlenebilir fonksiyonların toplamı olduğundan, iki kez sürekli türevlenebilir olduğu elde edilir. $B = A^2$ dönüşümünün özelliklerinden, arzu edilen biçimde

$$(21.23) \quad -\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -V(x)u(x) + f(x)$$

sağladığına hükmederiz. Dolayısıyla Önerme 28 'in varlık kısmını elde ettik.Teklik kısmı da benzer şekilde yapılır. Eğer iki tane iki kez türevlenebilir fonksiyon olsaydı bunların farkı olan w,

$$(21.24) \quad -\frac{d^2w(x)}{dx^2} + V(x)w(x) = 0, w(0) = w(2\pi) = 0 \Rightarrow w = -Bw = -A^2Vw$$

sağlardı. Böylece $w = A\phi, \phi = -AVw \in L^2(0, 2\pi)$ olurdu. Buradan ϕ de $\phi = AVA\phi$ sağlacak ve o da $(Id + AVA)\phi = 0$ denkleminin çözümü olacaktı.

Ancak ($V \geq 0$ varsayımı ile) bu denklemin çözümü olmadığını bildiğimizden $\phi = 0$ ve dolayısı ile $w = 0$ olmalıdır.$\square$

Bu Önerme 28'in kanıtını tanımlar.Yaptıklarımızı özetlersek; $L^2(0, 2\pi)$ uzayı üzerinde ($V \geq 0$ varsayımı ile) $Id + AVA$ dönüşümünün tersinir ve sınırlı bir dönüşüm olduğunu ve (21.1) denkleminin çözümünün

$$(21.25) \quad u = A(Id + AVA)^{-1}Af$$

sağlayan iki kez sürekli türevlenebilir u fonksiyonu olduğunu ve $C^0([0, 2\pi])$ uzayında olan her f fonksiyonu için Dirichlet koşullarını sağladığını gösterdik.

Şimdi artık $V \geq 0$ koşulu olmaksızın da neler olduğunu söyleyebiliriz.

Önerme 30 $C^0([0, 2\pi])$ uzayında gerçel değerli her V fonksiyonu için $[0, 2\pi]$ üzerinde iki kez sürekli türevlenebilir fonksiyonlardan oluşan ve $L^2(0, 2\pi)$ için bir ortonormal taban teşkil edip, aralığın son noktalarında sıfır ve $k \to \infty$ iken $T_k \to \infty$ sağlayan T_k lar için $-\frac{d^2 w_k(x)}{dx^2} + V(x)w_k(x) = T_k w_k$ denkleminin çözümleri olan w_k fonksiyonları vardır.(21.1) denkleminin verilen $f \in C^0([0, 2\pi])$ için (iki-kez sürekli türevlenebilen) çözümü olması için gerek ve yeter koşul

$$(21.26) \quad T_K = 0 \Rightarrow \int_{(0,2\pi)} f w_k = 0$$

olmasıdır. Bu f fonksiyonunun $Id + A^2V$ dönüşümünün çekirdeğine(ki bu uzay,($Id + AVA$) dönüşümünün $L^2(0, 2\pi)$ deki çekirdeğinin A dönüşümü altındaki izidir) dik olması demektir.

Şimdi l^2 gibi ayrılabilir Hilbert uzayları ile çalışma konusunda belli bir rahatlığa ulaştığınızı umuyorum. Ancak bu tür uzayların yinede oldukça büyük oldukları konusunda düşünmeniz yararlı olacaktır. Sizi son bir kez daha rahatsız etmeme izin veriniz. Bu yöndeki önemli bir netice , kanıtını yapmanızı beklemediğim, Kuiper teoremidir. Ancak ona yakın bir neticenin Eilenberg Hilesinin detaylarını yapmanızı isteyeceğim. Belkide biraz sihirbazlık hoşunuza gidecektir. Bunun için önce biraz hazırlık yapmamız gerekecektir. Aşağıdaki herşey $[0,1]$ aralığında alacağımız x değişkeninin kapalı eğrisidir- bunun yetine bir çemberi düşünebilirsiniz.

Problem 10.1 H sonsuz boyutlu ayrılabilir Hilbert uzayı olsun. H'nın iki kopyasının direkt toplamı

$$(21.27) \quad (u_1, u_2) \in H \oplus H \, (u_1, u_2) \to (\|u_1\|_H^2 + \|u_2\|_H^2)^{\frac{1}{2}}$$

normu ile donandığında Hilbert uzayı olduğunu gösteriniz. Ya bir mesafe koruyan(izometri),eşyapı dönüşümü(izomorfizma) yada bir başka biçimde,

$$(21.28) \quad T : H \to H \oplus H, \quad \text{örten, 1-1} \quad (\|u\|_H = (\|u\|_{H\oplus H}).$$

(21.28) deki özellikleri sağlayan fonksiyon inşa ediniz.

Problem 10.2 Yukarıdaki inşa sonlu sayıda tekrar edilebilir. H sonsuz boyutlu ayrılabilir Hilbert uzayı ise

$$(21.29) \quad l_2(H) = \{u : \mathbb{N} \to H, \|u\|_{l_2(H)}^2 = \sum_i \|u_i)\|_H^2 < \infty\}$$

nin Hilbert uzayı işlemleri olduğunu ve $l_2(H)$'dan H'ye açık bir isometrik eşyapı dönüşümü tanımlayınız.

Problem 10.3 Bir şekilde $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ de kapalı eğrinin sarım sayısını hatırlayınız. $Q = [0,1]^{\mathbb{N}}$ ve $f : Q \to \mathbb{C}^*$ sürekli ve $exp(2\pi ib) = f(0)$ eşitliğini sağlayan her $b \in \mathbb{C}$ için

$$(21.30) \quad exp(2\pi iF(q)) = f(q), \quad \forall q \in Q \quad \text{ve} \quad F(0) = b$$

ifadesini sağlayan tek $F : Q \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonu olduğunu gösteriniz.

Kuşkusuz b'yi $n \in \mathbb{Z}$ için $b+n$ ile değiştirmekte serbetsiniz, fakat bu durumda F de $F + n$ ile değiştirilmelidir.

(1) $c:[0,1]\to\mathbb{C}^*$ kapalı bir eğri olsun-yani sürekli ve $c(0)=c(1)$ sağlansın. $N=1$ için $C:[0,1]\to\mathbb{C}$, F'nin bir seçimi olsun. Kapalı eğrinin sarım sayısının

$$(21.31)\quad wn(c)=C(1)-C(0)\in\mathbb{Z}$$

biçiminde tanımlanabileceğini gösteriniz.

(2)Sarım sayısı, $wn(c)$'nin homotopi altında sabit olduğunu gösteriniz. Yani, $i=1,2$ olmak üzere $c_i:[0,1]\to\mathbb{C}^*$ $c_i(1)=c_i(0)$ iki kapalı eğri ve her $x\in[0,1]$ için $f(0,x)=c_1(x)$, $f(1,x)=c_2(x)$, her $y\in[0,1]$ için $f(y,0)=f(y,1)$ olacak biçimde sürekli bir fonksiyon varsa, $wn(c_1)=wn(c_2)$ olduğunu gösteriniz.

(3) $n\times n$ matrisinin kapalı eğrisi $L_n:x\in[0,1]\to e^{2\pi ix)}Id_{n\times n}$ ele alalım. $n\times n$ matrislerinin bildik özelliklerini kullanarak, bu eğrinin aşağıdaki anlamda birim matrise kapalı eğriler üzerinden homotopik olmadığını gösteriniz: her $x\in[0,1]$ için $G(0,x)=L_n(x),\quad G(1,x)=Id_{n\times n}$ ve her $y\in[0,1]$ için $G(y,0)=G(y,1)$ olacak biçimde $G:[0,1]\to L_n(x)$ sürekli fonksiyonunun olmadığını gösteriniz.

Problem 10.4 Ayrılabilir ve sonsuz boyutlu Hilbert uzayında L_n'ye karşılık gelen, H'da tersinir dönüşümlerde değer alan kapalı eğriyi ele alalım.

$$(21.32)\quad L:[0,1]\ni x\to L(x)=e^{2\pi ix}Id_H\in GL(H)\subset\mathcal{B}(H).$$

Yukarıda olduğu gibi, H'ı, $H\oplus H$ ile eşleyerek değeri tersinir dönüşümler olan

$$(21.33)\quad M:[0,1]^2\to GL(H\oplus H)$$

sürekli fonksiyonun varlığını ve
(21.34)

$$M(0,x)=L(x),\quad M(1,x)(u_1,u_2)=(e^{4\pi ix}u_1,u_2)\quad M(y,0)=M(y,1),\quad\forall x,y\in[0,1]$$

olduğunu gösteriniz.

ip ucu Girdileri H'da olmak üzere $H\oplus H$'ı 2-vektör (u_1,u_2) gibi düşünebiliriz. Bu iki faktör arasında *dönme*yi düşünmemizi sağlar. Gerçekten

$$(23.35)\quad U(y)(u_1,u_2)=(cos(\pi y/2)u_1+sin(\pi y/2)u_2,-sin(\pi y/2)u_1+cos(\pi y/2)u_2)$$

ifadesinin $U(0)=Id$, $U(1)(u_1,u_2)=(u_2,-u_1)$ olacak biçimde $[0,1]\to GL(H\oplus H)$, $y\to U(y)$ sürekli bir fonksiyon tanımladığını gösteriniz. Şimdi $V_1(x)$ ve $V_2(x)$ fonksiyonları, sırasıyla, birinci ve ikinci bileşenleri sabit bırakarak diğerini $exp(2\pi ix)$ diğerini çarpımıyla elde edilen $H \oplus H$ üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere 2-parametreli

$$(21.36) \quad U^{-1}(y)V_2(x)U(y)V_1(x)$$

dönüşümler ailesini düşününüz.

Problem 10.5. Bir önceki probleme benzer dönme dönüşümünü kullanarak sürekli

$$(21.37) \quad G : [0,1]^2 \to GL(H \oplus H)$$

ve aşağıdaki

$$(21.38) \quad G(0,x)(u_1,u_2) = (e^{2\pi ix)}u_1, e^{-2\pi ix}u_2),$$

$$G(1,x)(u_1,u_2) = (u_1,u_2), \quad G(y,0) = G(y,1)\forall x,y \in [0,1]$$

özellikleri sağlayan fonksiyonun varlığını gösteriniz.

Problem 10.6 Yukarıda oluşturulan çeşitli yapıları aşağıdaki gibi birleştirelim: $l_2(H)$ da tanımlı (21.34) deki gibi $\overline{G} : [0,1]^2 \to GL(l_2(H)$ ve

$$(21.37) \quad \overline{G}(0,x)(u_k)_{k=1}^{\infty} = (exp((-1)^k 2\pi ix)u_k)_{k=1}^{\infty},$$

$$\overline{G}(1,x) = Id, \quad \overline{G}(y,0) = \overline{G}(y,1)\forall x,y \in [0,1]$$

özelliğinde bir homotopinin olduğunu gösteriniz.

Problem 10.7 (Eilenberg Hilesi) Ayrılabilir bir Hilbert uzayı için homotopi inşa ediniz.Yani, $l_2(H)$ da tanımlı (23.34) deki gibi bir $G : [0,1]^2 \to GL(l_2(H))$ ve (21.32) deki gibi, $G(0,x) = L(x)$, $G(1,x) = Id$ ve her $x,y \in [0,1]$ için $G(y,0) = G(y,1)$ sağlayan sürekli bir dönüşüm inşa ediniz.

İp ucu: Öğrendiklerimiz toparlıyacağız-herşeyi $[0,1]$ aralığında olacak şekilde ayarlıyabiliriz. Önce H uzayını kendisinin iki kopyasına bölebiliriz. (21.34) de L den $M(0,x)$ gecebiliriz. İkinci H parçasından bir $l_2(H)$ bölerek önceki problemdeki gibi bir tartışma ile bu parça üzerinde birim dönüşümünü $exp(\pm 4\pi ix)$ ile çarparak alterne eden(terimleri işaret değiştiren) terimler olarak, önce - işareti ile başlıyoruz, yazabiliriz. Artık $H \oplus l_2(H)$ uzayındayız. Terimleri yeniden dizmek bize yine $l_2(H)$ uzayında çalışma olanağı verir. Bu işlemler sonrasında eğrimiz + işaretli olarak başlayan ve işaret değiştirerek $exp(\pm 4\pi ix)$ ile çarpma haline gelir. Sonrasında yine, bir önceki problemde olduğu gibi, birim (kapalı eğriler üzerinden) parçalanmış olur.

Problem 9.1. Periyodik Fonksiyonlar $\mathbb{S}$ kompleks sayılarda bir yarıçaplı, 0 merkezli çember olsun, yani $\mathbb{S} = \{z : |z| = 1\}$.
(1)1) Aşağıda 1-1 ilişki olduğunu gösteriniz.

$$(21.40) \quad \mathcal{C}^0(\mathbb{S}) = \{u|u : \mathbb{S} \to \mathbb{C}, \text{sürekli}\} \to$$

$$\{u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \text{sürekli}\, u(x + 2\pi) = u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Çözüm. $E : \mathbb{R} \ni \theta \to e^{2\pi\theta} \in \mathbb{S}$ üzerine, sürekli ve 2π periyodludur. Çember üzerindeki her noktanın ters görüntüsü, $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\theta + 2\pi\mathbb{Z}$ biçimindedir. Bu fonksiyonların bileşkesi

$$(21.41) \quad E^* : C^0(\mathbb{S}) \to C^0(\mathbb{R}), E^*f = f \circ E$$

bire-bir fonksiyon tanımlar.
(2) Aşağıda 1-1 ilişki olduğunu gösteriniz.

$$(21.42) \quad L^2(0, 2\pi) \longleftrightarrow \{u \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}), u|_{(0,2\pi)} \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$$

$$\text{ve} \quad u(x + 2\pi) = u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\} \setminus \mathcal{N}_P,$$

burada $\mathcal{N}_P$, her $x \in \mathbb{R}$ için $u(x + 2\pi) = u(x)$ eşitliğini sağlayan ve hemen her yerde sıfır olan fonksiyonların uzayını göstermektedir.
Çözüm. Bizim $L^2(0, 2\pi)$ tanımımız $\mathbb{R}$ üzerinde karesi integrallenebilir ve $(0, 2\pi)$ dışında sıfır olan fonksiyonlar şeklindedir. Şimdi böylesi bir u fonksiyonu verildiğinde onu (21.40) sağ tarafındaki bir fonksiyona sıfır olacak şekilde ve periyodluk ilişkisi

$$(21.43) \quad \overline{u}(x) = u(x - 2n\pi), n \in \mathbb{Z}$$

kullanarak genişletiriz.Yukarıda $\forall x \in \mathbb{R}$ için n tamsayısı, $x - 2n\pi \in [0, 2\pi)$ olacak şekilde seçilir. Burada sıfırımsı fonksiyonlar sıfırımsı fonksiyonlara giderler ve 0 noktasında fonksiyonun değerini değiştirme $\overline{u}$ fonksiyonunu sıfırımsı bir fonksiyonla değiştirir. Bu (21.42) daki gibi bir fonksiyon verir. $(0, 2\pi)$ kısıtlaması 2-taraflı ters'tir.
(3) $L^2(\mathbb{S})$, (19.30) nın sol tarafındaki uzayı gösteriyorsa, $\mathcal{C}^0(\mathbb{S})$ uzayını $L^2(\mathbb{S})$ uzayına yoğun olacak biçimde gömen, bir

$$(19.31) \quad \mathcal{C}^0(\mathbb{S}) \to L^2(\mathbb{S})$$

dönüşümün olduğunu gösteriniz. Buradaki fikir $\mathbb{S}$ üzerindeki fonksiyonların $\mathbb{R}$ de 2π-periyodik fonksiyonlar olarak düşünülebileceğidir.

Çözüm. İlk fonksiyon ve ikincisinin tersinin birleşimi aranılan gömme dönüşümüdür. $(0, 2\pi)$ aralığının son noktalarında sıfır olan sürekli fonksiyonlar $L^2[0, 2\pi]$ uzayında yoğun olduklarından ,yoğunluk elde edilir. Dolayısıyla $\mathbb{S}$ üzerindeki fonksiyonları gerçel sayılar üzerinde 2π- peryodlu fonksiyonlar olarak düşünebilirz. Bunun tersi de doğrudur.

Problem 9.2: Schrödinger Dönüşümü Aşağıdaki örneği ele alalım.

$$(21.45) \qquad -\frac{d^2u(x)}{dx^2} + V(x)u(x) = f(x) \quad x \in \mathbb{R},$$

(1) Önce $V = 1$ alalım. Neden $V = 0$ almıyoruz? Bu bölümün sonına kadar bunu yanıtlamaya çalışmayın?

Çözüm. $V = 1$ veya herhangi pozitif bir sabit almamızın nedeni $\frac{d^2u(x)}{dx^2} = 0$ denkleminin periyodik çözümlerinin bir boyutlu, yani- sabitler- olmasındandır.

(2) $f(x) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S})$ gerçel sayılarda 2π-periyodlu fonksiyonlar olmak üzere

$$(21.46) \qquad -\frac{d^2u(x)}{dx^2} + u(x) = f(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

denkleminin çözümünü hatırlayın. $\mathbb{R}$ de (21.46) denklemini sağlayan iki-kez türevlenebilen ve ikinci türevi sürekli olan 2π-periyodlu tek bir u fonksiyonunun olduğunu kanıtlayınız ve bu çözüm

$$(21.47) \quad u(x) = (Sf)(x) = \int_{(0,2\pi)} A(x, y)f(y)$$

olarak yazılabilir, burada $A(x, y) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$ ve her $x, y \in \mathbb{R}$ için $A(x + 2\pi, y + 2\pi) = A(x, y)$ sağlanır. İp ucu: Önce periyodiklik kısmını yok sayarak çözüm bulunuz. Bunu yapmak için, verilen denklemin türev dönüşümünü çarpanlarına ayırırız. Karşılıklı terimler yok olacağından,

$$(21.48) \quad v = \frac{du}{dx} - v \quad \text{ise} \quad -\frac{d^2u(x)}{dx^2} + u(x) = -(\frac{dv(x)}{dx} + v)$$

denklemine bakalım. Integral çarpanları bulmak için aşağıdaki denklemi ele alalım.

$$\frac{du}{dx} - u = e^x \frac{d\phi}{dx}, \, \phi = e^{-x}u$$

(21.49)

$$\frac{dv}{dx} + v = e^{-x}\frac{d\psi}{dx},\ \psi = e^{-x}u.$$

Iki kez integral alarak denklemi çözünüz ve böylece (21.46) deki diferensiyel denklemin bir çözümünü bulunuz. Bunu iki katlı integral biçiminde yazınız ve integrallerin sırasını değiştirerek çözümü, A', $\mathbb{R}\times[0,2\pi]$ üzerinde sürekli olmak üzere

$$(21.50) \quad u'(x) = \int_{(0,2\pi)} A'(x,y)f(y)dy$$

biçiminde yazınız. $u'(2\pi) - u'(0)$ ve $\frac{du'}{dx}(2\pi) - \frac{du'}{dx}(0)$ farklarını f'yi içeren integraller biçiminde hesaplayınız ve u' yi homojen denklemin çözümü olarak ekleyiniz, $f = 0$ için $c_1e^x + c_2e^{-x}$ dir, dolayısıyla (21.46)' ün yeni çözümü $u(2\pi) = u(0)$ ve $\frac{du}{dx}(2\pi) = \frac{du}{dx}(0)$ ifadelerini sağlar. Şimdi u'nın (19.34) gibi verildiğini kontrol ediniz.

Çözüm. Integral alarak , eğer $v = \frac{du}{dx} - u$ ise

$$(21.51) \quad v(x) = -e^{-x}\int_o^x e^s f(s)ds, u'(x) = e^x\int_0^x e^{-t}v(t)dt$$

bize $-\frac{du^2}{dx^2}+u'(x) = f(x)$ denkleminin bir çözümünü verir. Bu ikiliyi birleştirip, integral alma sırasını değiştirerek,

$$(21.52) \quad u'(x) = \int_0^x \overline{A}(x,y)f(y)dy, A = 1/2(e^{y-x} - e^{x-y})$$

$$u'(x) = \int_{(0,2\pi)} A'(x,y)f(y)dy, A'(x,y) = \begin{cases} 1/2(e^{y-x} - e^{-y+x}), x \geq y \\ 0, x \leq y \end{cases}$$

$\overline{A}$, $x = y$ boyunca sıfır olduğundan, A' süreklidir, çünkü aksi halde orada süreksizlikleri olurdu. Bu, sıfırda, türevi ile birlikte sıfır olan tek çözümdür. Eğer bu çözümü periyodik olarak genişletmek istersek, homojen denklemin bir çözümünü eklemeli ve gerekli düzenlemelerle,

$$(21.53) \quad u = u' + u'', u'' = ce^x + de^{-x}, u(0) = u(2\pi), u'(0) = u'(2\pi)$$

Şimdi gerekli hesaplar yapılarak,

$$(21.54) u'(2\pi) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(e^{y-2\pi}-e^{2\pi-y})f(y), \frac{du'}{dx}(2\pi) = -\int_0^{2\pi} 1/2(e^{y-2\pi}+e^{2\pi-y})f(y)$$

$$(21.55) c(e^{2\pi}-1)+d(e^{-2\pi}-1)=-u'(2\pi), c(e^{2\pi}-1)-d(e^{-2\pi}-1)=-\frac{du'}{dx}(2\pi)$$

$$(e^{2\pi}-1)c=1/2\int_0^{2\pi} e^{2\pi-y}f(y), (e^{-2\pi}-1)d=-1/2\int_0^{2\pi} e^{y-2\pi}f(y)$$

Burada bulduklarımızı yerine koyarak,

$$(21.56) u(x)=\int_(0,2\pi)A(x,y)f(y),\ A(x,y)=A'(x,y)+1/2\frac{e^{2\pi-y+x}}{e^{2\pi}-1}-1/2\frac{e^{-2\pi+y-x}}{e^{-2\pi}-1}$$

$$A(x,y)=\frac{cosh(|x-y|-\pi)}{e^{\pi}-e^{-\pi}}$$

(3) Doğrudan ya da dolaylı olarak $A(x,y)=A(y,x)$ ve A'nın gerçel olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Bu (21.56) dan kolayca elde edilir.

(4) S dönüşümünün, süreklilik gereği, $L^2(\mathbb{S})$ de sınırlı bir dönüşüme genişletilebileceği görünüz.

Çözüm. $||S||=\sqrt{2\pi}sup|A|$.

(5) Aşağıdaki ifadeyi doğrulayınız.

$$(21.57) \quad S(e^{ikx})=(k^2+1)^{-1}e^{ikx}, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Çözüm. Sf periyodik sınır koşullarını sağlayan tek çözümdür. e^{ikx} sınır değerlerini ve $f=(k^2+1)^{-1}e^{ikx}$ denklemini sağlar.

(6) Az önceki sonucu kullanarak ya da bir başka şekilde S'nin $L^2(\mathbb{S})$'nın özeşlenik kompakt dönüşüm olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Özeşleniklik ve kompaktlık (21.57) den elde edilir. Çünkü $e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$ bir ortonormal taban'dır. Bu nedenle S dönüşümünün özdeğerleri sıfıra yakınsar.

(7) $g\in\mathcal{C}^0(\mathbb{S})$ ise Sg'nin iki-kez sürekli türevlenebilir olduğunu gösteriniz. ip ucu: Integralin türevini alarak işlem yapınız.

Çözüm. Sf süreklidir. $u'+u''$ tanımlayan formüle geri gidersek, her iki terimin de iki kez türevlenebilir olduğunu görürüz.

(8) F, (21.57) deki gibi $L^2(\mathbb{S})$ de tanımlı, özdeğerleri $(k^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ olan özeşlenik kompakt olmak üzere, S dönüşümü de (21.57) deki gibi ise, $S = F^2$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $F(e^{ikx}) = (k^2+1)^{-1/2}e^{ikx}$ tanımlayalım. Yukarıdaki biçimde kompakt ve özeşlenik olduğu gösterilir.

(9) $F : L^2(\mathbb{S}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{S})$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Sf vektörünü tanımlayan seri

$$(21.58) \quad Sf(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_k (2k^2+1)^{-1/2}(f, e^{ikx})e^{ikx}$$

mutlak ve düzgün yakınsaktır. Örneğin, Cauchy eşitsizliğini kullanarak, sup normunda Cauchy olduğunu aşağıdan öğrenebiliriz: büyük p sayıları için

$$(21.59) \quad ||\sum_{|k|>p}(2k^2+1)^{-1/2}(f, e^{ikx})e^{ikx}|| \le \epsilon ||f||_{L^2}$$

elde ederiz,çünkü özdeğerlerin karelerinin toplamı sonludur.

(10) (21.45) deki gerçel eşitliğe gidelim. V'nin sürekli, gerçel değerli ve 2π periyodik olduğunu varsayalım. u iki-kez türevlenebilir, 2π periyodik ve verilen bir $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S})$ için (21.45) sağlanıyorsa;

$$(21.60) \quad u + S((V-1)u) = Sf \quad \text{ve böylece}\, u = -F^2((V-1)u) + F^2 f$$

olduğunu gösteriniz ve

$$(21.61) \quad v \in L^2(\mathbb{S}) \quad \text{ve} \quad v + (F(V-1)F)v = Ff \quad \text{olmak üzere} \quad u = Fv$$

olduğu sonucuna varınız, burada $V-1$, $V-1$ ile çarpma dönüşümdür.

Çözüm. Eğer u, (21.45) denklemini sağlıyorsa,

$$(21.62) \quad -\frac{d^2u(x)}{dx^2} + u(x) = -(V(x)-1)u(x)) + f(x)$$

sağlanır. Periyodik sınır değerlerini sağlayan çözümlerin tekliğinden, $u = -S(V-1)u + Sf$ ve buradan da $u = F(-F(V-1)u + Ff)$ buluruz. Dolayısı ile $v = -F(V-1)u + Ff$ olmak üzere $u = Fv$ vardır. Bu ise v'nin

$$(21.63) \quad v + F(V-1)Fv = Ff$$

sağladığını verir.

(11) Tersine, $v \in L^2(\mathbb{S})$

$$(21.64) \quad v + (F(V-1)F)v = Ff, \quad f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S})$$

ifadesini sağlıyorsa $u = Fv$, 2π periyodik, $\mathbb{R}$ de iki-kez türevlenebilen bir fonksiyondur ve (21.45) yi sağlar.

Çözüm. Eğer, $v \in L^2(0, 2\pi)$ ve (21.64) denklemini sağlıyorsa $u = Fv \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S})$, $u + F^2(V-1)u = F^2 f$ denklemini sağlar. Üstelik $F^2 = S$, $\mathcal{C}^0(\mathbb{S})$ uzayını iki-kez sürekli türevlenebilir fonksiyonlar uzayına götürdüğünden, u fonksiyonu (21.45) denklemini sağlar.

(12) Spektral teoremi $F(V-1)F$'e uygulayınız ve her $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ için

$$(21.65) \quad \lambda v + (F(V-1)F)v = g, \quad g \in L^2(\mathbb{S})$$

nin her $g \in L^2(\mathbb{S})$ için tek çözümünüm olması için gerekli ve yeterli koşulun her j için $\lambda \neq \lambda_j$ olacak biçimde $|\lambda_j| \to 0$ ifadesini sağlayan $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ de bir λ_j dizisinin olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $F(V-1)F$ özeşlenik ve kompakt olduğundan, $L^2(0, 2\pi)$ 'nin $F(V-1)F$ operatörünün özfonksiyonlarından oluşan bir ortonormal tabanı vardır. Bu dizi sıfıra yakınsar. Sıfırdan farklı kompleks sayı λ'nın çözüm olabilmesi için gerek ve yeter koşul onun izomorfizma, yani $\lambda \neq \lambda_j$ ise λ, $-F(V-1)F$'nın özdeğeri değildir.

(13) Her λ_j için

$$(21.66) \quad \lambda_j v + (F(V-1)F)V = 0, \quad v \in L^2(\mathbb{S})$$

denkleminin çözümünün $\mathbb{R}$ de sürekli 2π periyodik fonksiyonlar olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $\lambda_j \neq 0$ için v eğer (21.66) denkleminin çözümü ise, $v = -F(V-1)F)V/\lambda_j \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S})$ dir.

(14) (21.66) de v'yi sağlayan fonksiyona karşılık gelen $u = Fv$ fonksiyonunun iki-kez sürekli türevli, $\mathbb{R}$ de 2π periyodik ve

$$(21.67) \quad -\frac{d^2u}{dx^2} + (1 - s_j + s_j V(x))u(x) = 0, \quad s_j = \frac{1}{\lambda_j}$$

eşitliğini sağladığını gösteriniz.

Çözüm. $u = Fv$, $u = -S(V-1)u/\lambda_j$ sağlar. Dolayısıyla, iki kez sürekli türevlenebilirdir ve (21.67) denklemini sağlar.

(15) Tersine, u sıfıra eşit olmayan, iki-kez sürekli türevlenebilen, 2π periyodik fonksiyon,

$$(21.68) \qquad -\frac{d^2u}{dx^2}+(1-s+sV(x))u(x)=0, \quad s\in\mathbb{C}$$

ise bazı j ler için $s=s_j$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $u=-S(V-1)u/\lambda_j$ denkleminin periyodik çözümlerinin tekliğinden daha önceki gibi elde edilir.

(16) (21.45) denklemi için Fredholm alternatifi'nin doğruluğunu gösteriniz.

Teorem 16 Gerçel sayılar üzerinde tanımlı ve gerçel değerli sürekli 2π periyodlu V fonksiyonu için ya (21.45) sürekli ve 2π periyodlu her f için yine 2π periyodlu, iki-kez sürekli türevlenebilen tek bir çözüme , veya

$$(21.69) \qquad -\frac{d^2w(x)}{dx^2}+V(x)w(x)=0,\ x\in\mathbb{R}$$

homojen denkleminin sonlu boyutlu, iki-kez sürekli türevlenebilir ve 2π-periyodlu fonksiyonlardan oluşan çözüm uzayı vardır. (21.45) denkleminin çözümü olması için gerek ve yeter koşul (21.69) denkleminin her 2π- periyodlu çözümü w için $\int_{(0,2\pi)} fw=0$ sağlanmasıdır.

Yukarıdan, Schrödinger dönüşümünün tüm 2π periyodlu özfonksiyonlarını anlayabiliriz. Önce, $-\frac{d^2}{dx^2}$ ifadesine 1 eklemede ilahi bir şey olmadığını belirtelim, hakikaten herhangi bir pozitif sabit ekleyip, benzeri sonuçu elde edebiliriz. 0 ile ilgili problem $-\frac{d^2u}{dx^2}=0$ homojen denklemini sağlayan sabitlerdedir. Gerçekten kanıtladığımız şey;

$$(21.70) \qquad u\to Qu=-\frac{d^2u}{dx^2}u+Vu$$

dönüşümünün iki-kez sürekli türevlenebilen fonksiyonlar uzayı üzerinde sol tersinir olması veya

$$(21.71) \qquad -\frac{d^2u}{dx^2}u+Vu=0$$

denkleminin sıfırdan farklı bir çözümü olmasıdır. Bu sol ters $R=F(Id+F(V-1)F)^{-1}F$ dir. Bu dönüşüm kompakt ve özeşlenik'tir. Burada hala yapılacak çok iş vardır. Örneğin, Q dönüşümünün iki-kez türevlenebilir özfonksiyonları, yani $Qu=\tau u$ denkleminin çözümleri $Ru=\tau^{-1}u$ denkleminin sıfırdan farklı çözümleridir.

(21.72) denkleminin sıfırdan farklı çözümü olduğunda ne yapılmalıdır? Bu durumda bu çözümler uzayının sonlu boyutlu olduğunu ve $L^2(\mathbb{S})$ uzayının diktümleyeninde çalışarak aynı sonucun doğru olduğunu gösteriniz.