18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

DERS 24. HERMİT TABANININN TAMLANIŞI

Harmonik salınım

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2, \quad Hu_0 = u_0, u_0 = e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{24.1}$$

dan başlayarak ve aşağıdaki yaradılış ve yoketme dönüşümleri

$$A = \frac{d}{dx}, \quad C = -\frac{d}{dx} + x, \quad AC - CA = 2Id, \quad H = CA + Id \tag{24.2}$$

kullanılarak

$$u_j = C^j u_0 = p_j(x)u_0(c), \quad p(x) = 2^j x^j + l.o.ts, \quad Hu_j = (2j + 1_{u_j} \tag{24.3}$$

özvektörleri incelendi ve $j \neq k$ için $u_j \perp u_k$ olduğu gösterildi ve dolayısıyla normalleştirilme yapıldığında $L^2(\mathbb{R})$ de ortonormal sistem

$$e_j = \frac{u_j}{2^{\frac{j}{2}}(j!)^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{4}}} \tag{20.4}$$

bulundu.

Burada çok detaya girmeden e_j lerin $L^2(\mathbb{R})$ de ortonormal bir taban olduğu gösterilecek, yani tam ortonormal dizi olduğu gösterilecek.

e_j lerin tamlığını göstermek için, özvektörleri bunlar olan, sıfır uzayı olmayan özeşlenik kompakt dönüşümler bulmak yeterlidir. Bunun bir kaç yolu olmasına karşın bu kanıtlardan basit olanları ters Fourier formülünü kullanır. Ben ise tamlığı kullanıp ters Fourier formülünü kanıtlamak istiyorum. Dolayısı ile Mehler formülünün bir biçimini kullanacağım. Bu bağlamda size gecen derste sizi bir miktar yönlendirmeye çalıştım. Yapacaklarımızın ilk kısmı kolay, ikinci kısmı ise biraz daha karışıktır. e_j lerin tümünün gerçel olduğunu hatırlayarak özfonksiyonları e_j olan ve buna karşılık gelen özdeğerleri $\lambda_j > 0$ olan bir dönüşüm bulmak için

$$Au(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j (u, e_j) e_j(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j e_j(x) \int e_j(y) u(y) \tag{24.5}$$

tanımını yapalım.

Bunun dönüşüm olması için $j \to \infty$ için $\lambda_j \to 0$ olmasına gereksinim vardır (serinin yakınsak olması için λ_j lerin sınırlı olması yeterlidir). Bununla beraber problem A'nın sıfır uzayının olmamasıdır-elbette bu,λ_j lerin pozitif olması varsayımı ile, λ_j lerin tam olmasına karşılık gelir;

$$(24.6) \quad Au = 0 \Longleftrightarrow u \perp e_j, \forall j.$$

Yapmak zorunda olduğumuz iş artık belli oldu. Temel fikir A'yı bir integral dönüşümü olarak yazmak ve sonuçta bununla çalışmaktır. $w \in [0,1)$ için $\lambda_j = w^j$ olarak alalım. Buradaki fikir

$$(24.7) \quad A_w u = \sum_{j=0}^{\infty} w^j e_j(x) e_j(y) = A(w,x,y)$$

için açık bir formül bulabileceğimizdir.

$A(w,x,y)$ yi bulmak için son yapılan şeyler kullanılacak. Son olarak Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0_\infty(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F}(u) = \check{u}$$

(24.8)

$$\check{u}(\xi) = \int e^{-ix\xi} u(x), \quad sup\,|\check{u}| \leq \|\check{u}\|_{L^1}$$

olarak tanımlanmış ve özellikleri incelenmişti. Sonra u_0'nın Fourier dönüşümü hesap edilmişti, yani

$$(24.9) \quad (\mathcal{F}u_0)(\xi) = \sqrt{2\pi} u_0(\xi).$$

Bunu kullanarak

$$(24.10) \quad v = e^{\frac{-x^2}{4}} \Rightarrow \check{u} = \sqrt{\pi} e^{-\xi^2}$$

olduğu gösterilir.

Değişkenlerin adları değiştirilerek

$$(24.11) \quad e^{-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixs - \frac{s^2}{4}} ds$$

elde edilir.

Bu durumda u_j lerin tanımı, yeniden

$$(24.12) \quad u_j(x) = (-\frac{d}{dx} + x)^j e^{\frac{-x^2}{2}} = e^{\frac{x^2}{2}} (\frac{-d}{dx})^j e^{-x^2}.$$

olarak yazılabilir.

Bunu (24.11) de kullanarak ve türev alarak-bunu yapabilmemizin nedeni integralin yakınsamasındandır-

$$(24.13) \quad u_j(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-is)^j e^{ixs - \frac{s^2}{4}} ds$$

elde edilir. Bunu (24.7) nin sağındaki toplamda iki kez kullanarak ve normalleştirmeleri (24.4) de kullanarak,

$$(24.14) \quad \sum_{j=0}^{\infty} w^j e_j(x) e_j(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}}}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(-1)^j w^j s^j t^j}{2^j j!} e^{isx+ity-\frac{s^2}{4}-\frac{t^2}{4}} dsdt$$

bulunur. Burada olan serilerin yakınsaması ve toplamlarının üstel olmasıdır. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önteorem 19. (24.7) eşitliği aşağıdaki gibi gerçekleşir.

$$(24.15) \quad A(w,x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{1-w^2}} exp(-\frac{1-w}{4(1+w)}(x+y)^2 - \frac{1+w}{4(1-w)}(x-y)^2).$$

Kanıt. (24.14) deki serileri toplayarak

$$(24.16) \quad A(w,x,y) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}}}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^2} exp(-\frac{1}{2}wst + isx + ity - \frac{s^2}{4} - \frac{t^2}{4}) dsdt$$

elde edilir.

Daha önce yaptığımız gibi aynı formülü u_0'nın Fourier dönüşümü için uygulayarak bu integralleri açık bir biçimde hesap edebiliriz. Daha önce yapılandan daha kolay biçimde, değişkenler değiştirilerek,

$$s = \frac{(S+T)}{\sqrt{2}}, \quad t = \frac{(S-T)}{\sqrt{2}} \Rightarrow dsdt = dSdT,$$

(24.17)

$$-\frac{1}{2}wst + isx + ity - \frac{s^2}{4} - \frac{s^2}{4} = iS\frac{(x+y)}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}(1+w)S^2 iT\frac{(x-y)}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}(1-w)T^2$$

elde edilir.

$exp(-x^2)$ nin Fourier dönüşümü için formül kullanılabilir, bir değişken değişimi sonrasında,

$$\int_{\mathbb{R}} exp(iS\frac{x+y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}(1+w)S^2) dS = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{(1+w)}} exp(-\frac{(x+y)^2}{2(1+w)})$$

(24.18)

$$\int_{\mathbb{R}} exp(iT\frac{x-y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}(1-w)T^2)dS = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{(1-w)}}exp(-\frac{(x-y)^2}{2(1-w)})$$

sonuçu bulunur.

Bunların (24.16)'da yerine konmasıyla,

$$(24.19) \quad A(w,x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{1-w^2}}exp(-\frac{(x+y)^2}{2(1+w)} - \frac{(x-y)^2}{2(1-w)} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2})$$

bulunur. Bu, bazı ayarlamalarla, (24.15)'i verir.

Integral dönüşümleri diliyle elde edilen A_w'nin açık yazılımından aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 31. Gerçel değerli $f \in L^2(\mathbb{R})$ için

$$(24.20) \quad \sum_{j=1}^{\infty} |(u, e_j)|^2 = \|f\|_{L^2}^2.$$

Kanıt. A_w'nin tanımından

$$(24.21) \quad \sum_{j=1}^{\infty} |(u, e_j)|^2 = \lim_{w \uparrow 1}(f, A_w f),$$

dolayısıyla (24.20) ifadesi

$$(24.22) \quad \lim_{w \uparrow 1}(f, A_w f) = \|f\|_{L^2}^2$$

ifadesine indirgenir.

(24.22)'yi kanıtlamak için, önce $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ sürekli fonksiyonunu sınırlı bir aralık dışında sıfır, yani, $|x| > R$ için $f(x) = 0$ varsayarak, integral dönüşümünü basitleştireceğiz. Bu durumda L^2 uzayındaki iççarpımı çift katlı integral olarak yazabiliriz, bu gerçekten gerçek bir Riemann integralidir:

$$(24.23) \quad (f, A_w f) = \int\int A(w,x,y)f(x)f(y)dydx.$$

Burada f ve A'nın gerçel değerli oldukları kullanıldı.

(24.15) de A için verilen formüle bakalım. Önce, $(1-w^2)-\frac{1}{2}$ çarpanının $w \to 1$ için sınırsız olduğuna dikkat edelim edelim. Diğer taraftan exponensiyelin argumentinin iki teriminden ilki, $w \to 1$ için sıfıra ve ikincisi ise, en azından, $x - y \neq 0$ olduğu zaman sınırsızdır. Verilen ip uclarından

$$\text{eğer}\, \epsilon > 0, \text{ise} \quad X = \{(x, y) : |x| \leq R, |y| \leq R\, |x - y| \geq \epsilon\}$$

(24.24)

$$w \to 1 \quad \text{için} \quad \sup_X |A(w, x, y)| \to 0$$

olduğu görülür.

Böylece (24.23) deki integralin $|x - y| \geq \epsilon$ üzerindeki parçası, $w \to 1$ için sıfıra gider.

Diğer parçaya $|x - y| \leq \epsilon$ üzerinde bakalım. f'nin düzgün sürekliliğinden, verilen $\delta > 0$ için

$$(24.25) \quad |x - y| \leq \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \delta$$

olacak biçimde $\epsilon > 0$ vardır.

Şimdi ((24.23) üç parçaya ayıralım:$S = [-R, R]$ olmak üzere

$$(24.26) \quad (f, A_w f) = \int_{S \cap \{|x-y| \geq \epsilon\}} A(w, x, y) f(x) f(y) dy dx$$

$$+ \int_{S \cap \{|x-y| \leq \epsilon\}} A(w, x, y)(f(x) - f(y)) f(y) dy dx$$

$$+ \int_{S \cap \{|x-y| \leq \epsilon\}} A(w, x, y) f^2(y) dy dx$$

Şimdi önemli olduğu için (24.36) daki üçünçü integrale bakalım. Eğer değşkeni x den $t = \sqrt{\frac{1+w}{1-w}}(x - y)$ değişkenine değiştirirsek, integral

$$\int_{S \cap \{|x-y| \leq \epsilon\}} A(w, y + t\sqrt{\frac{1+w}{1-w}}, y)) f^2(y) dy dt$$

$$(24.27) \quad A(w, y + t\sqrt{\frac{1+w}{1-w}}, y)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}(1+w)} exp\left(-\frac{(1-w)}{4(1+w)}(2y + t\sqrt{1-w})^2\right) exp(-\frac{t^2}{4})$$

haline dönüşür. Burada y sınırlıdır; ilk üstel çarpan 1'e yaklaştığından her $\epsilon > o$ için (24.26) daki üçüncü terim $\int e^{-\frac{t^2}{4}} = 2\sqrt{\pi}$ olduğundan

$$(24.28) \quad w \to 1 \text{ iken } ||f||_{L^2} \text{ sayısına yakınsar.}$$

$A > 0$ olduğundan benzer akıl yürütme integraldeki ikinci terimin de δ sayısının bir katından küçük olduğunu verir. Bu, (önce δ sonra ϵ secimi ile) (24.22) ve sonrasında ise f nin sürekli ve $[-R, R]$ aralığı dışında sıfır olması nedeni ile (24.20) ifadesini kanıtlar.

Genel durumun kanıtı ise sürekli ve bir kompakt kümenin dışında sıfır olan fonksiyonların $L^2(\mathbb{R})$ içinde yoğun olmaları ve (24.20) ifadesinde her iki taraftaki $f \in L^(\mathbb{R})$ fonksiyonunun sürekliliğinden elde edilir.

(24.22) ifadesi e_j fonksiyonlarının, gösterilmek istendiği gibi, ortonornal bir taban olduğunu verir.