18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

DERS 5. LEBESGUE İNTERGALLENEBİLİR FONKSİYONLAR VEKTÖR UZAYLARIDIRLAR

$\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ile, daha önce olduğu gibi, gerçel sayılar üzerinde Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların uzayını gösterelim.

Önerme 4.$\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ bir vektör uzayıdır.

Kanıt. $\mathbb{R}$ üzerindeki tüm fonksiyonlar bir vektör uzayı olduklarından sadece $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ nin toplama ve skalerle çarpma altında kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. Skalerler altında kapalı olduklarını kanıtlamak kolaydır. Eğer skaler 0 ise çarpım sıfır fonksiyonudur ve sıfır fonksiyonu integrallenebilirdir. Eğer $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ise, tanım gereği, mutlak toplanabilir olan basamak fonksiyonlar dizisi f_n için

$$\sum_n \int |f_n| < \infty \qquad \sum_n |f_n(x)| < \infty, \text{sağlayan her } x \text{ için} f(x) = \sum_n f_n(x). \tag{5.1}$$

Eğer $c \neq 0$ ise cf_n, cg için aranılan fonksiyonlardır.

g ve g' gibi iki fonksiyonun toplamının da yine $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ olduğunu göstermek biraz daha zahmetlidir. Burada yapılacak "'aşikar"' şey basamak fonksiyonları serilerinin toplamlarını almaktır. Ancak bu bizi sıkıntıya sokar. Bunun yerine eğer f_n ve f'_n; g ve g' nün $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ olduğunu veren basamak fonksiyonları serileri ise,

$$h_n(x) = \begin{cases} f_k(x) & n = 2k-1 \\ f'_k(x) & n = 2k \end{cases} \tag{5.2}$$

Bu dizi mutlak toplanabilirdir. Çünkü;

$$\sum_n \int |h_n| = \sum_k \int |f_k| + \sum_k \int |f'_k| < \infty \tag{5.3}$$

Daha da önemlisi, $\sum_n |h_n(x)|$ serisinin yakınsaması için yeter ve gerek koşul $\sum_k |f_k(x)|$ ve $\sum |f'_k(x)|$ serilerinin her ikisinin de yakınsamasıdır. Mutlak yakınsayan seriler yeniden düzenlenebileceklerinden ,

$$\sum_n |h_n(x)| < \infty \Rightarrow \sum_n h_n(x) = \sum_n f_n(x) + \sum_n f'_n(x) = g(x) + g'(x) \tag{5.4}$$

Dolayısı ile $g + g' \in L^1(\mathbb{R})$ elde edilir.

Buradaki notumuz mutlak yakınsayan seriler ile "yaklaşım" yapılırken biraz dikkatli olunması gereğidir.$\square$

Tanım 4. $E \subset \mathbb{R}$ altkümesinin ölçümünün sıfır olması, E kümesindeki her x için bulunabilecek mutlak toplanabilir basamak fonksiyonları f_n için

$$\sum_n |f_n(x)| = \infty \tag{5.5}$$

koşulunun sağlanması olarak tanımlanır.

Önerme 5. Eğer $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ve $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ve ölçümü sıfır olan E kümesi için $\mathbb{R} \setminus E$ kümesinde $g = g'$ ise $g' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ dir.

Kanıt. Burada yapmamız gereken g fonksiyonuna mutlak yakınsayan basamak fonksiyonları serisi f_n ve E kümesindeki her x için
$\sum_n |f'_n(x)| = \infty$ basamak fonksiyonları serisi f'_n bulmaktır. g''ne yaklaşmak için terimleri aşağıda verilen seriyi düşünelim:

$$h_n(x) = \begin{cases} f_k(x) & n = 3k-2 \\ f'_k(x) & n = 3k-1 \\ -f'_k(x) & n = 3k \end{cases} \tag{5.6}$$

Böylece önce f'_k ekler sonra çıkarırız. Bu seri mutlak yakınsayan bir seridir.

$$\sum_n \int |h_n| = \sum_k \int |f_k| + 2\sum_k \int |f'_n| \tag{5.7}$$

Noktasal yakınsayan bir seri ne zaman mutlak yakınsar? Varmamız gereken

$$\sum_k |f_k(x)| + 2\sum_k |f'_k(x)| < \infty \tag{5.8}$$

Yukarıdaki toplamda ikinci serinin yakınsaması $x \notin E$ verdiğinden ve ilk toplamın sonlu olmasından ,(5.8) sağlandığı zaman

$$\sum_k |h_k(x)| = g(x) = g'(x) \tag{5.9}$$

bulunur. Sonlu toplam her zaman $\sum_{k=1}^{N} |f_k(x)|$ veya bu artı $f'_N(x)$- ki bu (5.8) daki serinin mutlak yakınsamasından N üzerinden sıfıra gider. Dolayısı ile gerçekten $g' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ buluruz.$\square$

Buradan ölçümü sıfır olan kümelerin gerçekten küçük olduklarına hükmedebilmemize karşın hala $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ifadesine anlam kazandıramadık.

Bunun için aşağıdakileri kontrol etmemiz gerek:
Önerme 6. $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ uzayının her öğesi f için, integral

$$\int f = \sum_n \int f_n \tag{5.10}$$

ifadesi (5.1) sağlayan ve f 'e yakınsayan mutlak toplanabilir basamak fonksiyonlarından bağımsız olarak, iyi tanımlıdır.
Kanıt.f_n ve f'_n dizileri (5.1) sağlayan ve f e mutlak yakınsayan diziler olsun. Artık biraz deneyim sahibi olduğumuzdan, doğal olarak,

$$h_n(x) = \begin{cases} f_k(x) & n = 2k-1 \\ -f'_k(x) & n = 2k \end{cases} \tag{5.11}$$

alırız. Bu seri mutlak toplanabilirdir. Noktasal tanımlanan serilerde *her* iki seride mutlak toplanabilir olduğunda seri mutlak yakınsaktır. Serilerin genel terimleri sıfıra gittiğinden

$$\sum_n |h_n(x)| < \infty \Rightarrow \sum_n h_n(x) = 0 \tag{5.12}$$

dahası, integraller dizisinin mutlak yakınsamasından

$$\sum_n |\int h_n(x)| \leq \sum_n \int |h_n(x)| < \infty \tag{5.13}$$

Buradan serileri tekrar düzenleyerek

$$\sum_n \int h_n = \sum_k \int f_k - \sum_k \int f'_k \tag{5.14}$$

elde ederiz. Şimdi sağ taraftaki toplamların eşit olduklarını istediğimizden, farklarının sıfır olduğunu görmek yeterli olacaktır. Bu ise bir sonraki neticeden elde edilir.□.
Önerme 7. $f \equiv 0$ olmak üzere (5.1) sağlayan mutlak toplanabilir bir f_n serisi

$$\sum_n \int f_n = 0 \tag{5.15}$$

sağlar.
Kanıt. Elimizde kullanabileceğimiz tek şey monotonluktur. Beceri ise onu kullanabilmektir sanırım. Bahsettiğimiz beceri ise bir doğal sayı N seçmek ve terimleri aşağıda verilen yeni bir basamak fonksiyonları serisini düşünmektir:

$$(5.16)\quad g_1(x)=\sum_{j=1}^{N} f_j(x)\quad g_k(x)=|f_{N+k-1}(x)|,\quad k>1.$$

Serilerde yakınsama serinin kuyruğunun bir özelliği olduğundan yukarıdaki seri mutlak toplanabilirdir. Yine de her durumda

$$(5.17)\qquad \sum_k\int|g_k|\le\sum_n\int|f_n|$$

Üstüne üstlük, birinci terimden sonraki terimler negatif olmadıklarından, aşağıdaki serinin kısmi toplamları

$$(5.18)\quad G_p(x)=\sum_{k=1}^{p} g_p(x)$$

azalan olmadıklarından G_p yine bir basamak fonksiyonları dizisidir. Dikkat edersek x 'e bağlı olarak iki olasılık olduğunu görürüz. Eğer ilk seri olan $\sum_n|f_n(x)|$ serisi ıraksak bir seri ise, başka bir deyişle $+\infty$ yakınsıyorsa, bu G_p - bu da serinin sonlarının bir özelliği olduğundan-için de geçerlidir. Diğer yandan, eğer $\sum_n|f_n(x)|$ sonlu ise, büyük p sayıları için

$$(5.19)\quad G_p(x)=\sum_{k=1}^{N} f_k(x)+\sum_{j=1}^{p-1}|f_{N+j}(x)|\ge\sum_{k=1}^{p+N-1} f_k(x).$$

Sağ taraf sıfıra yakınsadığından, serinin sonlu olan limiti negatif olamaz. Şimdi geçen derste görülen monotonluk önermesi G_p özeline
uygulanarak

$$(5.20)\quad lim_{p\to\infty}\int G_p\ge 0$$

elde ederiz ki burada limitin $+\infty$ olma olasılığı vardır. Ancak başta seçilen N için bulunan

$$(5.21)\quad \sum_{j=1}^{N}\int f_k+\sum_{k=1}^{\infty}|f_{N+k}|\ge 0$$

eşitsizliği şimdi tüm N ler için doğrudur. Diğer yandan, integrallerin serisi sonlu olduğundan, verilen $\delta>0$ için bulunabilecek M ve $N>M$ için

$$(5.22)\quad \sum_{k\ge M}\int|f_k|<\delta\Rightarrow\sum_{j=1}^{N}\int f_k\ge-\delta\quad\forall N>M.$$

buluruz. Şimdi bu

$$\sum_k \int f_k \geq 0 \tag{5.23}$$

verir. Bu istediğimizin yarısıdır, diğer yarısını elde etmek için yukarıdaki akıl yürütmeyi $-f_k$ fonksiyonuna uygularız.□

Sonuç. 1. (5.1) deki koşulları sağlayan her yaklaşım dizisi (f_n) için

$$\int f = \sum_n \int f_n \tag{5.24}$$

ile tanımlanan integral,

$$\int : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \tag{5.25}$$

iyi tanımlı bir fonksiyondur.

Özellikle tanımlanan integral aşikar değildir. Gerçekten, eğer f bir basamak fonksiyonu ise ve dizi $f_1 = f, f_j = 0 \quad \forall j > 1$ olarak seçilirse mutlak toplanabilidir ve (5.1) anlamında f fonksiyonuna yakınsar, dolayısıla,

(5.26) $\int$ basamak fonksiyonlarındaki integral ile çakışır.

Şimdi belki biraz da gereğinden fazla hızlı giderek aşağıdaki teoreme kadar geldik.

Önerme 8. Ölçümü sıfır olan sayılabilir tane kümenin bileşiminin ölçümü sıfırdır.

Kanıt. Tanım gereğince bir E kümesinin ölçümünün sıfır olması demek, E üzerinde

$$\sum_n |f_n(x)| = +\infty \tag{5.27}$$

sağlayan, $\sum_n \int |f_n| < \infty$ olan mutlak toplanabilir basamak fonksiyonları $f_n^{(j)}$ nın varlığıdır. Elimizdeki veriler bize sayılabilir çoklukta $E_j, j = 1, ...$ ailesi ve bu ailedeki her küme için mutlak toplanabilir $f_n^{(j)}$ vermektedirki

$$\sum_n \int |f_n^{(j)}| < \infty, E_j \subset \{x \in \mathbb{R} : \sum_n |f_n^{(j)}(x)| = +\infty\} \tag{5.28}$$

Şimdi fikir her E_j üzerinde mutlak ıraksayan yeni bir mutlak yakınsayan basamak fonksiyonları serisi elde etmektir. İlk yapılacak iş

$f_n^{(j)}$ fonksiyonlarını "iyileştirmektir".(5.28) deki ıraksama serinin kuyruğunun bir özelliğidir-baştan sonlu tane terim atsak bile hala doğru olacaktır. Mutlak yakınsama kullanarak her j için bulunabilecek N_j, ki bunun

$$(5.29) \qquad \sum_{n \geq N_j} \int |f_n^{(j)}| < 2^{-j} \quad \forall j$$

sağlaması gerekir. Şimdi yapılacak iş $n = N_j$ sayısından önceki tüm terimleri silmek olacaktır. Geriye kalan diziyi yine $f_n^{(j)}$

ile damgalarsak sadece (5.28) değil, bunun yanısıra mutlak yakınsama ve ek olarak

$$(5.30) \qquad \sum_n \int |f_n^{(j)}| < 2^{-j} \forall j \Rightarrow \sum_j \sum_n \int |f_n^{(j)}| < \infty$$

elde ederiz. Böylece yukarıdaki çift toplamın(mutlak değerlerin integralleri olan) mutlak yakınsadığını elde ederiz.

Şimdi, h_k diye $f_n^{(j)}$ fonksiyonlarının yeni ve makul bir dizilişini alalım - örneğin, bu her $j + n = p$ sırasında çalışılarak- yapılabilir.

Gerçekte, çift sıranın herhangi bir sıralaması işimize yarayacaktır. (5.30) nedeni ile bu mutlak yakınsayan bir seridir. Üstelik noktasal

seri olan aşağıdaki seride ilk toplam ikincisinin içinde olduğundan, eğer her j için;

$$(5.31) \qquad \sum_n |f_n^{(j)}(x)| = \infty \quad ise \quad \sum_k |h_k(x)| = +\infty$$

elde edilir. Dolayısı ile $\sum_k |h_k(x)|$, E_j kümesinin her x noktasında ıraksadığından, birleşimin ölçümü sıfırdır.$\square$