18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

18.102 Fonksiyonel Analize Giriş Bahar Dönemi 2009

DERS 7. MONOTONLUK, FATOU ÖNTEOREMİ VE SINIRLI YAKINSAMA TEOREMLERİ

Önerme 12 (Tekrar Monotonluk). $f_j \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ monoton dizi, her $x \in \mathbb{R}$ ve her j için $f_j(x) \geq f_{j+1}(x)$ ya da her $x \in \mathbb{R}$, her j için $f_j(x) \leq f_{j+1}(x)$ ve $\int f_j$ yukarıdan sınırlı ise

$$\{x \in \mathbb{R} : \lim_{j\to\infty} f_j(x) \quad \text{sonlu}\} = \mathbb{R} \setminus E \tag{7.1}$$

dır.

Burada adı geçen E kümesinin ölçümü sıfır ve

$$f = \lim_{j\to\infty} f_j(x) \quad h.h.y. \quad \mathcal{L}^1(\mathbb{R})'nın \quad \text{bir elemanı}$$

$$\lim_{j\to\infty} \int |f - f_j| = 0. \tag{7.2}$$

Burada yapılacakların ana fikri : Pozitif olma, integrali alınacak fonksiyonların sıfırdan büyük eşit olması koşulu yerine fonksiyonların integrallerinin sınırlılığı getirilmesidir. Ölçüm kuramında bu yaklaşıma gerek yoktur. Çünkü oradaki ölçülebilirlik kavramı integrali 'varolan fakat sonsuz değeri' alabilen sıfırdan büyük eşit fonksiyonlara izin verir. Burada aynı şey geçerli değildir.

Kanıt f_j'lerin işaretlerinin değiştirilmesi yapılabileceğinden f_i' lerin monoton(tekdüze) artan olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda integral dizisi de monoton artan, kabulden ötürü sınırlı, dolayısıyla yakınsaktır. f_n'nin aşağıdaki özelliği sağlayacak $g_i = f_{n_i}$ altdizisine geçebiliriz.

$$\int |g_j - g_{j-1}| = \int g_j - \int g_{j-1} < 2^{-j} \quad \forall j > 1. \tag{7.3}$$

Bu $h_1 = g_1$, $h_j = g_j - g_{j-1}$, $j > 1$ serisinin mutlak toplanabilir olmasıdır. En son sonuçtan bunun h.h.y. yakınsak olduğunu biliyoruz, yani, limit f integrallenebilirdir ve

$$\int f = \lim_{j\to\infty} \int \sum_{k=1}^{j} h_k = \lim_{j\to\infty} \int g_j = \lim_{n\to\infty} \int f_j. \tag{7.4}$$

Aslında burada heryerde $g_k(x)$ olan $\sum_j h_j(x)$ serisi yakınsaktır, dolayısıyla $f_n(x)$ yakınsaktır, çünkü, monoton olan bir dizinin altdizisidir. Buradan (7.1) ve (7.2) nın birinci kısmı elde edilir. Ikinci kısım, denklik sınıflarının $L^1(\mathbb{R})$ uzayında yakınsaması, monotonluktan elde edilir.

$$(7.5) \quad \int |f - f_j| = \int f - \int f_j \to 0 \quad (j \to \infty)$$

.

Şimdi Fatou Önteoremini ele alalım. Burada sadece monotonluk alınır ve integrali sınırlı integrallenebilir fonksiyonların genel dizisine uygulanır. İki integrallenebilir fonksiyonun maksimim ve minimumu da integrallenebilirdir ve

$$(7.6) \quad \int \min(f, g) \leq \min(\int f, \int g).$$

Önteorem 3. (Fatou) f_j, $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ de negatif olmayan (gerçel değerli integrallenebilir) bir dizi ve $\int f_j$, $\mathbb{R}$ de üstten sınırlı olsun. Bu durumda

$$f(x) = \lim inf_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{h.h.y. var,} \quad f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \quad ve$$

(7.7)

$$\int \lim inf f_n \leq \lim inf \int f_n.$$

Kanıt. $\lim inf$'nın özelliklerini yeterince hatırlayınız! k sayısını sabitleyelim ve yukarıda kısaca tartışıldığı gibi

$$(7.8) \quad F_{k,n} = \min_{k \leq p \leq k+n} f_p(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$$

olarak tanımlansın. Burada minumum, elemanları negatif olmayan, n sayılarının artan değerleri için azalan bir küme üzerinden alındığından, bu dizi azalan bir dizidir. Burada integraller aşağıdan 0 ile sınırlıdır, dolayısıyla yukarıdaki monotonluk sonucu uygulanır ve

$$(7.9) \quad g_k(x) = \inf_{p \geq k} f_p(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}), \quad \int g_k \leq \int f_n \quad \forall n \geq k$$

elde edilir. Negatif olmayan azalan sayıların limiti her zaman vardır ve limit bu azalan sayıların infimumudur. Bu gözlemden

$$(7.10) \quad \int g_k \leq \lim inf \int f_n.$$

elde edilir. Şimde k sayısını değiştirelim. O zaman (7.9) daki infimum k sayılarının artan değerleri için azalandır. Buradan $g_k(x)$ artandır elde ederiz. İntegral her zaman $\int f_n$'lerin biri tarafından sınırlıdır ve böylece k dan bağımsız olarak yukarıdan sınırlıdır, çünkü $\int f_n$ lerin bir sınırının olduğu varsayıldı. Monotonluk sonucunu tekrar uygulayabiliriz ve buradan

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x) \quad \text{h.h.y. var ve} \quad f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$$

(7.11)

$$\int f \leq \lim inf \int f_n.$$

elde edilir. $f(x) = \lim inf f_n(x)$ olduğundan lim inf tanımını kullanarak Önteoremi kanıtlarız.

Şimdi Fatou Önteoremini esas amaçımız olan aşağıdaki teoremi kanıtlamak için kullanacağız.

Teorem 2. (Lebesgue Sınırlı Yakınsama teoremi) İntegrallenebilir fonksiyonlar $f_j \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ dizisi için

$$\exists h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}), \quad |f_j(x)| \leq h(x) h.h.y. \quad \text{ve}$$

(7.12)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_j(x) \quad \text{h.h.y. var}$$

özelliğinde olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ve $\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$ (limitin varlığı da iddia içerisindedir).

Kanıt. Hipotezler gerçel ve sanal kısımlar için de geçerli olduğundan f_j'leri gerçel varsayabiliriz ve ikisi birlikte istenileni verir. Ayrıca (7.12) de verilen sınırlamanın doğru olmadığı küme üzerinde f_j fonksiyonları sıfır olacak biçimde değiştirilebilir. Bu durumda

$$(7.13) \quad -h(x) \leq f_j(x) \leq h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

olacaktır.

Özellikle $g_j = g - f_j$ negatif olmayan integrallenebilir fonksiyonların dizisidir ve integrallerinin dizisi sınırlıdır. (7.12) den $\int |f_j| \leq \int h$ elde edilir ve dolayısıyla $\int g_j \leq 2 \int h$. Buradan Fatou Önteoremi g_j ye uygulanır. g_j dizisinin h.h.y. f'ye yakınsadığı varsayıldığından

$$h - f(x) = \lim_j \inf(x) \quad h.h.y.$$

bulunur.

$$(7.14) \int h - \int f \leq \liminf \int (h - f_j) = \int h - \liminf \int f_j$$

dır.

Yukarıdaki eşitsizlikte sağ taraftaki liminf'in işaret değişimi nedeni ile limsup olduğuna dikkat ediniz. Aynı tartışmayı, $g_j' = h(x) + f_j(x)$ negatif olmayan ve integralleri üstten sınırlı olan g_j' dizisine de uygulayabiliriz. Bu dizi $h(x) + f(x)$'e h.h.y. yakınsar ve buradan

$$(7.15) \quad \int h + \int f \leq \liminf \int (h + f_j) = \int h + \liminf \int f_j$$

elde edilir. (7.14) ve (7.15) eşitsizliklerinde $\int h$ leri yok edebiliriz ve bu eşitsizlikleri kullanarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$(7.16) \quad \limsup \int f_j \leq \int f \leq \liminf \int f_j$$

Bunun yanında aynı gerçel dizi için, soldaki $\limsup$, sağdaki $\liminf$ den küçük eşittir. Bu bunların eşitliğini gerektirir ve buradan $\int f_j$ yakınsar (gerek duyuyorsanız $\liminf$ ve $\limsup$'un tanımlarına bakınız.) Böylece

$$(7.17) \quad \int f = \lim_{n \to \infty} \int f_n.$$

Genel olarak Lebesgue Sınırlı Yakınsama teoremi bazı fonksiyonların Lebesgue integrallenebilir olduğunu kanıtlamak için kullanılır.

Son olarak L^1'in bir Banach uzayı olduğunun anlaşıldığından emin olmak istiyorum. Yine bazı anlamlarda yaygın olmayan

$$(7.18) \quad \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \text{f integrallebilir}\}$$

gösterimi kullanalım. Burada "L" italiktir. $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ için $|f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ olduğunu biliyoruz (salınımı yeterince kötü f'ler için bunun tersi doğru olmayabilir). f'nin mutlak değerinin ne zaman sıfır olacağını tam olarak biliyoruz,

$$(7.19) \quad \mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) : \int |f| = 0\}$$

$$= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus E, \quad E'nin \quad \text{ölçümü sıfır}\}.$$

Öğelerini sıfırımsı fonksiyonlar olarak anacağımız $\mathcal{N}$ uzayı bir altuzayıdır. Buradan

$$(7.20) \quad L^1 = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{N}$$

tanımlanır. Burada "L" italik değildir. Bu gösterim de yaygın değildir fakat (7.20) kesinlikle yaygın bir tanımdır. L^1'nin elemanları fonksiyonların denklik sınıfları

$$(7.21) \quad [f] = f + \mathcal{N} \quad f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$$

dır. Burada $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$'nın elemanlarının farkları sıfırımsı olan fonksiyonlar olarak tanımlanıyor. Yani ölçümü sıfır olan bir küme dışında eşitlerdir. Burada küme sabit değil fakat fonksiyona bağlıdır. $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$'nin bir elemanı için integral

$$(7.22) \quad \|[f]\|_{L^1} = \int |f|$$

olarak tanımlanır. Tanımın sağ tarafı temsilden bağımsızdır.

Theorem 3. (7.22) de geçen $\|[f]\|_{L^1}$ fonksiyonu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$'de uzayında bir normdur. Bu norma göre $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ bir Banach uzayıdır.

Mutlak değerin integrali $\int |f|$, $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$'de bir yarı-normdur, yani $\int |f| = 0$ için $f = 0$ olma koşulu dışındaki tüm norm koşulları sağlanır. Bölüm uzayına geçerek bu problemi ortadan kaldırıyoruz.

Kanıt. Norm koşullarınının sağlandığına bakmayacağız, fakat siz kontrol etmelisiniz. Sadece $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$'nin $\|[f]\|_{L^1}$ normuna göre tam olduğunu göstereceğiz. Tam olduğunu göstermek, Lebesgue fonksiyonların mutlak toplanabilirliği konusunda son dersde verilen Teoremin doğrudan bir sonucudur, dolayısıyla bu teoremin ne dediğini hatırlamalısınız. f integrallenebilir olduğunda $|f|$'nin integrallenebilir olduğunun nasıl gösterildiğini hatırlayınız. Daha açıkca, f_j mutlak toplanabilir bir seri ise (önce basamak fonksiyonu, fakat burada Lebesgue integrallenebilir fonksiyonları),

$$(7.23) \quad g_1 = |f_1|, \quad g_j = \left|\sum_{k \le j} f_k\right| - \left|\sum_{k \le j-1} f_k\right|$$

olarak tanımladık. Burada

$$(7.24) \quad |g_j| \le |f_j| \quad \forall j$$

dır. Böylece g_j mutlak toplanabilirdir ve $\sum_j f_j(x)$ her yerde yakınsaktır ve

$$(7.25) \quad N \to \infty \; iken \sum_{j \le N} g_j(x) = \left|\sum_{j \le N} f_j(x)\right| \to |f(x)|.$$

Bu $|f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ve daha da fazlası

$$\int |f| = \lim_{N\to\infty} \int \left| \sum_{j\le N} f_j(x) \right| \le \sum_j \int |f_j| . \tag{7.26}$$

doğrudur. Bu başlangıçtan beri niye mutlak toplanabilir seriler kullandığımızı açıklıyor.

Tekrar f_j'ye ve $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$'de mutlak toplanabilir serilere geri gidilerek, $\sum_j |f_j|$ toplamında, yukarıdaki tartışmayı N sayısında başlayan budanmiş seriye uygulayabiliriz. Daha açık ifadeyle, $j \ge N$ için f_j, h.h.y. toplanabilir ve toplamı

$$f(x) - \sum_{j<N} f_j(x) = \sum_{j>N} f_j(x) \tag{7.27}$$

olan mutlak yakınsak bir seri verir. (7.26) nın uygulanmasıyla,

$$\int \left| f(x) - \sum_{j<N} f_j(x) \right| \le \sum_{j>N} \int |f_j| \tag{7.28}$$

elde edilir. Üstelik, mutlak yakınsama, sağdaki N den büyük sayılar üzerinden alınan toplamın küçük olması anlamındadır. Yani,

$$\lim_{N\to\infty} \int \left| f(x) - \sum_{j<N} f_j(x) \right| = 0. \tag{7.29}$$

Dolayısıyla $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ yerine $L^1(\mathbb{R})$ hakkında düşünme gereği vardir. $f_j \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ olmak üzere, $L^1(\mathbb{R})$'nin içerisindeki F_j deki mutlak toplanabilir dizi $f_j + \mathcal{N}$ denklik sınıflarının bir serisidir. Mutlak toplanabilme koşulu

$$\sum_j \|F_j\|_{L^1} = \sum_j \int |f_j| < \infty. \tag{7.30}$$

Yukarıdaki tartışmaya ihtiyacımız var. Daha açık olarak f_j'lerin h.h.y. toplamı olan f, $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$'nın bir elemanıdır ve (7.29) doğrudur. Bu sadece denklik sınıfı $F = f + \mathcal{N}$'nin

$$\lim_{N\to\infty} \left\| F - \sum_{j<N} F_j \right\|_{L^1} = \lim_{N\to\infty} \int \left| f - \sum_{j<N} f_j \right| = 0 \tag{7.31}$$

koşulunun sağlanmasıdır. Böylece $L^1(\mathbb{R})$ de $\sum_{j=1}^{N} F_j = f$ dir ve dolayısıyla tamdır.

Zararı çok fazla olmasada ve teknik olarak yanlış söylenen şeylerden biri "$L^1(\mathbb{R})$ Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların uzayıdır" ifadesidir. Halbuki olması gereken bunun hemen hemen eşitliğinden gelen denkliğe göre, fonksiyonların denklik sınıflarının uzayı olmasıdır.