18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

18.102 Fonksiyonel Analize Giriş Bahar Dönemi 2009

DERS 8. CAUCHY EŞİTSİZLİĞİ VE LEBESGUE ÖLÇÜMÜ

Önce önHilbert uzayı ve Hilbert uzayının tanımlarını tartışacağız ve sonra Cauchy eşitsizliğini ve paralelkenar kuralını kanıtlayacağız. Bunlar bütün ders notlarında ve diğer yerlerde bulunabileceğinden burada tekrar edilmeyecek. Konuyla ilgili iyi bir kaynak G.F. Simmons'un "Introduction to topology and modern analysis' kitabıdır. Ancak bu kitap basılmamaktadır.

Şu anda, herkesin ılgılendığı geldiğimiz noktada Lebesgue ölçümün nasıl tanımlanacağıdır. Bunu anlayacak zamanımız olacak. Bunun için Salı günu altını çizdiğim gibi sadece integrali kullanacağız. Önce fonksiyonların yerel integrallenebilirliğini tanımlayacağız. Yani

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \tag{8.1}$$

yerel integrallenebilir olması demek her N için $f_{[-N,N]} = f\chi_{[-N,N]} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ demektir. Burada χ_A, A kümesinin karakteristik fonksiyonudur.
Örneğin, $\mathbb{R}$'da sürekli her fonksiyon yerel integrallenebilirdir.
Önteorem 4. Yerel integrallenebilir fonksiyonlar kümesi bir vektör uzayıdır.
Kanıt. $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$'in vektör uzayı olmasından hemen elde edilir.

Tanım Eğer χ_A yerel integrallenebilir ise $A \subset \mathbb{R}$ *ölçülebilirdir.* Ölçülebilir kümenin ölçümü sonlu ise $\chi_A \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ölçümü ise

$$\mu(A) = \int \chi_N \tag{8.2}$$

olarak tanımlanır. $\mu(A)$, A'nın Lebesgue ölçümüdür. A ölçülebilir ve ölçümü sonlu değilse, tanım gereği, $\mu(A) = \infty$ dir.

(a, b) aralığının (açık, yarı açık, kapalı) ölçülebilir olduğunu biliyoruz ve ölçümün sonlu olması için gerekli ve yeterli koşul aralığın sonlu olmasıdır ve ölçüm $b - a$ dır. Bunu görmek için:-

Önerme 13. Ölçülebilir bir kümenin tümleyeni ölçülebilirdir ve ölçülebilir kümelerin sayılabilir birleşimi ölçülebilirdir.
Kanıt Sabit 1 fonksiyonun yerel integrallenebilirdir ve böylece $\chi_{\mathbb{R}\setminus A} = 1 - \chi_A$ ve χ_A fonksiyonlarının yerel integrallenebilirlikleri aynı olduğundundan ilk kısım elde edilir.

Karakteristik fonksiyonlar ile onların tanımladıkları kümeler arasındaki aşağıdaki eşitliğe dikkat etmelisiniz:-

$$\chi_{A\cup B} = \max(\chi_A, \chi_B), \quad \chi_{A\cap B} = \min(\chi_A, \chi_B). \tag{8.3}$$

A_n kümeler dizisi ise $B_n = \cup_{k \le n} A_k$ kümelerin artan bir dizisidir ve

$$(8.4) \quad \chi_{B_n} \to \chi_B, \quad B = \cup_n A_n$$

artan dizi ve yakınsama noktasaldır (her noktada sıfıra yakınsar, orada kalır ya da 0'da kalır.) Eğer $\chi_{[-N,N]}$ ile çarpılırsa o zaman

$$(8.5) \quad f_n = \chi_{[-N,N]}\chi_{B_n} \to \chi_{B \cap [-N,N]}$$

integrallenebilir fonksiyonların artan dizisidir. A_k'ların ölçülebilirliği varsayımı altında integral üstten $2N$ ile sınırlıdır. Monotonluk teoremi gereği limit integrallenebilir, dolayısıyla χ_B yerel integrallenebilir ve dolayısıyla $\cup_n A_n$ ölçülebilirdir.
Önerme 14. $\emptyset$ ve $\mathbb{R}$'ide içeren $\mathbb{R}$'nin ölçülebilir altkümelerinin kümesi $\mathcal{M}$, sayılabilir birleşim, arakesit ve tümleyen işlemleri altında kapalıdır.
Kanıt. Yukarıdakine benzer tartışma, azalan diziler için, arakesit işlemine uygulanarak kanıt verilir.

Ölçülebilir ve ölçümü sonlu olmayan A kümesinden bahsedildi, örneğin $\mathbb{R}$. Ölçülebilir bir kümenin ölçümü negatif olmadığından (ölçülebilir değilse tanımsız) bu herhangi bir probleme neden olmaz ve gerçekte ∞ alınmasına izin verildiğinde Lebesgue ölçüm aşağıdaki anlamda sayılabilir toplamsaldır:-

$$(8.6) \quad A_n \in \mathcal{M}, \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{M} \quad \text{ve} \quad \mu(\bigcup_n A_n) \le \sum_n \mu(A_n)$$

Burada $k \neq j$ için $A_j \cap A_k = \emptyset$ ise eşitlik vardır. Bunu kanıtlamak iyi bir alıştırma olur.

Problem 4.1 H bir normlu uzay ve norm aşağıdaki paralelkenar kuralını sağlasın.

$$(8.7) \quad \|u+v\| + \|u-v\| = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \quad u, v \in H.$$

Bu normun bir pozitif Hermitsel iççarpım'dan geldiğini kanıtlayınız. Ana fikir olarak:-

$$(8.8) \quad (u,v) = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2)$$

eşitsizliğini deneyiniz.

Problem 4.2 H sonsuz boyutlu bir (ön)Hilbert uzayı olsun. Dolayısıyla H'nın her elemanı için

$$(8.9) \quad v = \sum_i c_i v_i$$

olacak biçimde (v_i) tabanı vardır. Burada v_i'ler arasında doğrusal bağımlılık ilişki yoktur-(8.9) da $v = 0$ temsili tek bir tanedir. $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ $(i = j)$ için 1, diğer durumda sıfır) anlamında H'nın bir ortonormal tabanı $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ vardır. Ortonormal taban için (8.9) da geçen katsayıların $c_i = (v, e_i)$ olduğunu kanıtlayınız ve

$$(8.10) \quad T : H \to \mathbb{C}^n, \quad T(v) = ((v, e_i))$$

nın

$$(8.11) \quad (u,v) = \sum_i (Tu)_i \overline{(Tv)_i}, \quad \|u\|_H = \|Tu\|_{\mathbb{C}^n}, \quad u, v \in H$$

özelliğini sağlayan bir izomorfizma olduğunu kanıtlayınız. Niçin sonlu boyutlu önHilbert uzayı bir Hilbert uzayıdır?

Aşağıdaki özelliklileri kanıtlamanızı ve bunun yanında daha fazla soyut kanıt vermenizi isteyeceğiz. h.h.y. eşitliğinin ölçümü sıfır olan bir kümenin tümleyeni üzerinde eşit anlamında olduğunu hatırlayınız.

Problem 3.1 Eğer f ve g, $L^1(\mathbb{R})$ içinde, yani gerçel sayılar üzerinde Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlarsa, aşağıdakileri gösteriniz.

(1) Eğer h.h.y. $f(x) \geq 0$ ise $\int f \geq 0$ dır.

(2) Eğer h.h.y. $f(x) \leq g(x)$ ise $\int f \leq \int g$ dır.

(3) Eğer f kompleks değerli bir fonksiyon ise gerçel kısmı Ref Lebesgue ölçülebilirdir ve

$$|\int Ref| \leq \int |f|$$

(4) Genel kompleks değerli bir fonksiyon için

$$(6.30) \quad |\int f| \leq \int |f|$$

gösteriniz.(İp ucu: Kaynaklara bakabilirsiniz ama genellikle yapılan şey $\theta \in [0, 2\pi]$ almak ve $e^{i\theta} \int f = \int e^{i\theta} f \geq$ kullanarak, önceki eşitsizliği $g = e^{i\theta} f$ de kullanmaktır.

(5) İntegral

$$(6.31) \quad \int : L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$$

sürekli ve doğrusaldır.

Çözüm.

(1) f gerçel ve f_n, f'ye mutlak yakınsayan basamak fonksiyonların gerçel değerli mutlak toplanabilir bir serisi (sadece kompleks-değerli dizimiz varsa (3)'i kullanınız.)

$$(8.14) \quad g_1 = |f_1|, \quad g_j = |f_j| - |f_{j-1}|, \quad f \geq 1$$

dizisinin $|f|$'ye h.h.y. mutlak yakınsadığını biliyoruz. Buradan $f_+ = \frac{1}{2}(|f| + f) = f$, eğer $f \geq 0$ ise, $\frac{1}{2} f_j$ ve $\frac{1}{2} g_j$ ile elde edilen serinin h.h.y. limitidir:

$$(8.15) \quad h_n = \frac{1}{2} g_k (n = 2k - 1 \quad \text{için}) \quad \text{ve} \quad h_n = f_k \quad (n = 2k \quad \text{için})$$

Böylece f_+ Lebesgue integrallenebilirdir. Üstelik

$$(8.16) \quad \int f_+ = \lim_{k \to \infty} \sum_{n \leq 2k} \int h_k = \lim_{k \to \infty} \int (\left|\sum_{j=1}^{k} f_j\right| + \sum_{j=1}^{k} f_j)$$

olduğunu biliyoruz. Burada her terim negatif olmayan basamak fonksiyonudur ve dolayısıyla $\int f_+ \geq 0$ dır.

(2) Önceki sonucu integrallenebilir $g - f$'ye uygulayarak

$$(8.17) \qquad \int g - \int f = \int (g - f) \geq 0$$

elde edilir.

(3) Temel kuralların kullanılmasıyla, f_n kompleks değerli ve f'ye h.h.y. yakınsayan basamak fonksiyonların mutlak toplanabilir bir serisi ise

$$h_{3k-2} = Ref_k, \quad h_{3k-1} = Imf_k, \quad \text{ve} \quad h_{3k} = -Imf_k$$

olarak tanımlayalım. Basamak fonksiyonların bu serisi mutlak toplanabilirdir ve

$$(8.19) \qquad \sum_n |h_n(x)| < \infty \Longleftrightarrow \sum_n |f_n(x)| < \infty \Rightarrow \sum_n |h_n(x)| = Ref$$

dır. Böylece Ref integrallenebilirdir. $\pm Ref \leq |f|$ olduğundan

$$(8.20) \qquad \pm \int Ref \leq \int |f| \Rightarrow \left| \int Ref \right| \leq \int |f| \, .$$

(4) Kompleks değerli f için aşağıda önerildiği gibi yapılır. $z \in \mathbb{C}$'yi $|z| = 1$ ve $z \int f \in [0, \infty)$ olacak biçimde seçelim. Böyle bir seçim kompleks sayıların özelliğinden yapılabilir. Integralin doğrusallığından
(8.21)

$$z \int f = \int (zf) = \int Re(zf) \leq \int |zRef| \leq \int |f| \Rightarrow \left| \int f \right| = z \int f \leq \int |f| \, .$$

(Buradaki ikinci eşitlik integralin gerçel kısmının integraline eşit olmasından elde edilir.)

(5) h.h.y. $f = g$ ise $\int f = \int g$ olduğundan,

$$(8.22) \qquad I : L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}, \quad I([f]) = \int f$$

nın doğrusal olduğunu biliyoruz. Doğrusal fonksiyonelin sürekli olması ile sınırlı olması denk olduğundan ve

$$(8.23)\quad |I([f])| = \left|\int f\right| \leq \int |f| = \||[f]\||_{L^1}$$

olduğundan

I süreklidir. (Burada $f \in L^1(\mathbb{R})$'nin yerine $[f]$ yazılması doğrudur. Ancak yazılmasa da bu herkesin bildiği ve kullandığı bır gerçektir).

(6) $L^1(\mathbb{R})$'nın dualinin bir elemani olarak I'nın normu nedir? Yanıt 1-emin olmanız için kanıtlayabilirsiniz.

Problem 3.2 $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık ($(-\infty, a)$ ya da (a, ∞) olasılıkları da dahil) ise bir $f : I \to \mathbb{C}$ fonksiyonun Lebesgue integrallenebilir olmasını

$$(8.24)\quad \overline{f} : I \to \mathbb{C}, \quad \overline{f}(x) = f\chi_I(x)$$

olarak tanımlanan fonksiyonun Lebesgue integrallebilir olması olarak tanımlayabiliriz. $\overline{f}$'nın integralini

$$(8.25)\quad \int_I f = \int \overline{f}$$

olarak tanımlarız.

(1) I üzerinde, bu anlamda tanımlanan integrallenebilir fonksiyonların vektör uzayı olduğunu gösteriniz. Bu tür fonksiyonların kümesini $\mathcal{L}^1(I)$ ile gösterelim.

(2) f, I üzerinde integrallenebilir ise $|f|$'nin de integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

(3) f, I da integrallenebilir ve $\int |f| = 0$ ise h.h.y. $f = 0$, yani ölçümü sıfır olan bir $E \subset I$ için, her $x \in I \setminus E$ iken $f(x) = 0$, olduğunu gösteriniz.

(4) Daha önceki soruda tanımlanan anlamda h.h.y. sıfır fonksiyonlarının vektör uzayı olduğunu gösteriniz. Bu uzayı $\mathcal{N}(I)$ ile gösterelim.

(5) $\int_I |f|$'nın $L^1 = \mathcal{L}^1(I)/\mathcal{N}(I)$ de bir norm tanımladığını kanıtlayınız.

(6) $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ise

$$(8.26)\quad g : I \to \mathbb{C}, \quad g = f\chi_I$$

olarak tanımlanan fonksiyonun $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$'de olduğunu ve dolayısıyla f'nın I üzerinde integrallenebilir olduğunu kanıtlayınız.

(7) Yukarıda tanımlanan I'ya kısıtlama dönüşümü

$$(8.27)\quad L^1(\mathbb{R}) \to L^1(I)$$

örten ve sürekli doğrusal fonksiyonel tanımlar. (Bunların h.h.y. denklik bağıntısına göre integrallenebilir fonksiyonların bölüm uzaylarının var olduğunu not ediniz.)

Çözüm.

(1) f ve g fonksiyonları I üzerinde integrallenebilir ve $h = f+g$ ise $\overline{h} = \overline{f}+\overline{g}$ olduğu tanımdandır. Dolayısıyla $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$'nın vektör uzayı olmasından $f + g$ fonksiyonu I da integrallenebilirdir. Benzer biçimde eğer $\overline{f}$ integrallenebilir ise herhangi bir sabit c için $h = cf$ olmak üzere $\overline{h} = c\overline{f}$ fonksiyonu integrallenebilirdir. Böylece $\mathcal{L}^1(I)$ bir vektör uzaydır.

(2) Yine tanımdan $h = |f|$ ise $\overline{h} = \left|\overline{f}\right|$. Buradan f'nın I da integrallenebilir olmasından $\overline{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ elde edilir. Bilgilerimizden de $\left|\overline{f}\right| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Böylece $h = |f|$ ise $\overline{h} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, dolayısıyla $|f| \in \mathcal{L}^1(I)$ elde edilir.

(3) $f \in \mathcal{L}^1(I)$ ve $\int_I |f| = 0$ ise $\int_{\mathbb{R}} \left|\overline{f}\right| = 0$ dır ve buradan da ölçümü sıfır olan bir $E \subset \mathbb{R}$ için $\mathbb{R} \setminus E$ kümesinde $\overline{f} = 0$ elde edilir. Şimdi $E_I = E \cap I \subset E$ kümesinin ölçümü de sıfırdır (sıfır ölçümlü bir kümenin altkümesi olduğundan) ve f, E_I kümesinin dışında sıfırdır.

(4) f ve g lar sıfırımsı fonksiyonlar olsun. (ölçümü sıfır olan bir küme dışında sıfır değerli anlamında), bu kümelere sırasıyla $E_f \subset I$ ve $E_g \subset I$ diyelim. Yani E_f ve E_g lerin ölçümleri sıfır ve her $a \in I \subset E_f$ ve $b \in I \subset E_g$ içn $f(a) = 0, g(b) = 0$.) $f + g$ fonksiyonu $I \setminus (E_f \cup E_g)$ üzerinde sıfırdır. $E_f \cup E_g$ kümesinin ölçümü sıfır olduğundan $f + g$ sıfırımsıdır. Aynı şey c ve d sabit olmak üzere $cf + dg$ fonksiyonları için de doğrudur, dolayısıyla $\mathcal{N}(I)$ bir vektör uzaydır.

(5) $f \in \mathcal{L}^1(I), g \in \mathcal{N}^1(I)$ olmak üzere g'nin sıfır olduğu yerde $|f + g| - |f|$ fonksiyonu sıfır olduğundan $|f + g| - |f| \in \mathcal{N}(I)$ dır. Buradan aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$(8.28) \qquad \int_I |f+g| = \int_I |f| \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(I), g \in \mathcal{N}(I).$$

Buradan da

$$(8.29) \qquad \|[f]\|_I = \int_I |f|$$

fonksiyonu denklik sınıflarında aynı olduğundan $L^1(I) = \mathcal{L}^1(\mathbb{R})\backslash\mathcal{N}(I)$ üzerinde iyi tanımlı bir fonksiyondur. Buradan $\mathbb{R}$ üzerindeki aynı özelliklerinden dolayı bu fonksiyonun norm özellikleri sağladığı görülür.

(6) $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ve g (8.26) daki gibi I'ya kısıtlanış olarak tanımlansın. $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ göstermek istiyoruz. $\mathbb{R}$ de, f_n, f'ye yakınsayan basamak fonksiyonların mutlak toplanabilir serisi ise mutlak yakınsaktır. Burada $\overline{I}$, I'nın sol uc noktasının eklenmesi (zaten orada değilse) ve sağ uc noktasının çıkartılmasıyla (eğer orada ise) elde edilen yarı-açık aralık olmak üzere

$$(8.30) \quad g_n = f_n \chi_I$$

dizisini ele alalım. Burada g_n bir basamak fonksiyonudur (bu niye $\overline{I}$'ya gereksinimiz olduğunu açıklar).Üstelik $\int |g_n| \leq \int |f_n|$ ve dolayısıyla g_n mutlak toplanabilirdir ve I'nın dışında g_n'ye yakınsar ve I içindeki her noktada mutlak yakınsaktır (bu durumda f_n'de ile aynı olduğundan). Bu g'nin integrallenebilir olduğunu gösterir ve $\overline{f}$, g'den en fazla iki noktada farklı olduğundan, integrallenebilirdir. Dolayısıyla tanım gereği f, I'da integrallenebilirdir.

(7) Öncelikle fonksiyon olduğunu kontrol etmeliyiz. $f \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$ olduğundan (8.26) da verilen g kesinlikle $\mathcal{N}(I)$ dadır. "I'ya kısıtlama" $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$'den $\mathcal{L}^1(I)$'ye bir doğrusal dönüşüm olduğundan (8.27)'yi tanımlar-görüntü sadece f'nin denklik sınıfına bağlıdır. Bu dönüşümün doğrusal olduğu açık olduğundan örten olduğunu göstermeliyiz. $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{I})$ ise bu I'nın dışında 0 olacak biçimde genişletilebilir ve bu genişletilmiş fonksiyon $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$'nın bir elemanıdır ve bu fonksiyon sınıfının (8.27) altındaki izi $[g]$ dir.

(8) *Problem 3.3* Bir öncekinin devamıdır.

(1) $I = [a, b)$ ve $f \in L^1(I)$ ise her $a \leq x < b$ için f'nin $I_x = [x, b)$'ye kısıtlanışının $L^1(I_x)$ de olduğunu gösteriniz.

(2)

$$(8.31) \quad F(x) = \int_{I_x} f : [a, b) \to \mathbb{C}$$

nın sürekli olduğunu gösteriniz.

(3) $x^{-1} cos(\frac{1}{x})$ fonksiyonunun $(0, 1]$ de Lebesgue integrallenebilir olmadığını kanıtlayınız (yukarıda gösterdiğin şeyi düşün).

it Çözüm.

(1) Az önceki sorudan elde edilir. $f \in L^1([a, b))$ ve f', f'nin temsili ise f' nın aralığın dışında sıfır olarak genişletilmesiyle elde edilen fonksiyon $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ nın içinde kalır. $L^1(\mathbb{R})$'nın elemanı olarak bu f' seçimine bağlı değildir ve (8.27) $L^1([x, b))$'nın bir elemanı olarak $[x, b)$'ye kısıtlanışı verir ve doğrusal dönüşümdür.

(2) Bir önceki sorudaki tartışmayı kullanarak, eğer f_n, f' (f'nin temsili) ve yakınsayan mutlak toplanabilir bir seri ise ki-yakınsama mutlak yakınsamadırher $a \leq x \leq b$ için

$$(8.32) \quad f_n' = \chi([a, x))f_n, \quad f_n'' = \chi([x, b))f_n$$

burada $\chi([a, b))$, aralığın karakteristik fonksiyonudur ve bazen $\chi_{[a,b)}$ ile gösterilir. Burada f_n' nın $f\chi([a, b))$ ye ve f_n'' nın $f\chi([a, b))$ ye yakınsadığı görülür, yakınsama mutlak yakınsamadır. Böylece

$$(8.33)\qquad \int_{[x,b)} f = \int f\chi([x,b)) = \sum_n \int f_n'', \quad \int_{[a,x)} f = \int f\chi([a,x)) = \sum_n \int f_n'.$$

Şimdi basamak fonksiyonları için $\int f_n = \int f_n' + \int f_n''$ olduğunu biliyoruz, dolayısıyla

$$(8.34)\qquad \int_{[a,b)} f = \int_{[a,x)} f + \int_{[x,b)} f.$$

Böylece $[a,b)$ da tanımlı her integrallenebilir f fonksiyon için

$$(8.35)\qquad \lim_{x\to a} \int_{[a,x)} f = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Aşağıdaki genel eşitsizliği kullanarak

$$(8.36)\qquad \left|\int_{[a,x)} f\right| \le \int_{[a,x)} \left|\sum_{n\le N} f_n\right| + \sum_{n>N} \int_{[a,x)} |f_n|$$

ve basamak fonksiyonların mutlak toplanabilir dizisinin tanımından görülebilir. Son toplam, N'nin yeterince büyük seçilmesiyle x'den bağımsız olarak küçük yapılabilir. Diğer taraftan N'yi sabit tutarak $x \to a$ için, basamak fonksiyonların tanımından ilk integral sıfıra gider. Bu (8.36)'yı kanıtlar ve böylece F'nın sürekliliğini kanıtlanır.

(3) $(0,1]$ aralığında $x^{-1}cos(\frac{1}{x})$ Lebesgue integrallenebilir olsaydı (aralıkta tanımlıdır), bu fonksiyon sıfırda tanımlanarak, örneğin 0'da 0 alınarak $[0,1)$ aralığında integrallenebilir olurdu. Aynı şey mutlak değeri içinde doğru olur ve Riemann integrali

$$(8.37)\qquad \lim_{t\downarrow 0} \int_t^1 x \left|cos(\frac{1}{x})\right| dx = \infty.$$

Bu limitlerin bir fonksiyonu olarak integrallerin sürekliliği ile çelişir.

Problem 3.4 [Zor ama denenmeli] $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ verilsin.

(1) Her $t \in \mathbb{R}$ için

$$(8.38)\qquad f_t(x) = f(x-t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

dönüşümülerinin $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$'nın elemanları olduğunu gösteriniz.

(2)

$$(8.39)\qquad \lim_{t\to 0} \int |f_t - f| = 0$$

olduğunu gösteriniz. Buna "integrallenebilir fonksiyonlar için integralin sürekliliği" denir. İpucu daha sonra verilecektir!

(3) Her $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ için

$$\mathbb{R} \to L^1(\mathbb{R}), t \to [f_t] \tag{8.40}$$

(bu bir "eğridir") fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

(1) f_n, f'ye mutlak yakınsayan basamak fonksiyonların mutlak toplanabilir serisi ise -yakınsama gerçekleştiği yerlerde mutlak yakınsamadır. $f_n(.-t)$ her $t \in \mathbb{R}$ için $f(.-t)$'ye yakınsar. Böylece her $f(x-t)$ Lebesgue integrallenebilir, yani $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$'nın elemanıdır.

(2) f_n, f'ye yukarıda olduğu gibi yakınsayan bir seri ise

$$\int |f| \leq \sum_n \int |f_n| \tag{8.41}$$

olduğunu biliyoruz. Ilk terimleri bir N sayısına kadar toplayabilir ve geriye kalanları yeniden toplarsak, buradan her N için,

$$|f| \leq \int \left| \sum_{n \leq N} \right| + \sum_{n>N} \int |f_n| \tag{8.42}$$

elde edilir. Bunu $f_n(.-t) - f_n(.)$ ye uygulayarak

$$\int |f_t - f| \leq \int \left| \sum_{n \leq N} f_n(.-t) - f_n(.) \right| + \sum_{n>N} \int |f_n(.-t) - f_n(.)| \tag{8.43}$$

bulunur. Burada ikinci toplam $2\sum_{n>N} \int |f_n|$ ile sınırlıdır. Verilen $\delta > 0$ için, mutlak yakınsamadan dolayı, bu toplamı $\frac{\delta}{2}$ ile sınırlı olabilecek yeterince büyük N seçebiliriz. Dolayısıyla problem $|t|$ yeterince küçük ise

$$\int \left| \sum_{n \leq N} f_n(.-t) - f_n(.) \right| \leq \frac{\delta}{2} \tag{8.44}$$

eşitsizliğini kanıtlamaya indirgenir. Üstelik bu basamak fonksiyonlarının sonlu toplamıdır. Dolayısıyla her bir bileşke için, yani bir sabit c için, $2|c||t|$ ile sınırlı bir $[a, b)$ aralığındaki karakteristik fonksiyonun c katı için aşağıdakini göstermek yeterlidir. $t \to 0$ için

$$\left| \int g(.-t) - g(.) \right| \to 0, \tag{8.45}$$

(3) f_t' eğrisi için ki , bu eğri

$$(8.46) \quad \mathbb{R} \to \mathcal{L}^1(\mathbb{R}), \quad t \to f_t$$

funksiyonudur. $f_{t+s} = (f_t)_s$ dir ve yukarıdaki tartışmayı uygulayabilir ve her s için

$$(8.47) \quad \lim_{t \to s} \int |f_t - f_s| = 0 \Rightarrow \lim_{t \to s} \|[f_t] - [f_s]\|_{L^1} = 0$$

ifadesini göstermek için uygulayabiliriz. Bu (8.46) daki fonksiyonun sürekli olduğunu kanıtlar.

Problem 3.5 Son alıştırmalarda bir kompakt aralık üzerinde tanımlı bir fonksiyonun aralık dışında sıfır değeri alacak biçimde genişletilmesiyle elde edilen fonksiyonun Lebesgue integrallenebilir olduğu gösterilmişti. Bunu ve basamak fonksiyonların $L^1(\mathbb{R})$ da yoğun olduğunu kullanarak $\mathbb{R}$ da tanımlı ve bir kompakt kümenin dışında sıfır olan sürekli fonksiyonların vektör uzayının $L^1(\mathbb{R})$ de yoğun olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Basamak fonksiyonları (aslında basamak fonksiyonların denklik sınıfları) $L^1(\mathbb{R})$ da yoğun olduğundan, her basamak fonksiyonun, L^1 e göre, bir kompakt küme dışında sıfır değeri alan sürekli fonksiyonların limiti olduğunu göstermek yeterlidir. Dolayısıyla bir $[a, b)$ aralığının karakteristik fonksiyonu için kanıtı vermek yeterlidir ve sonra sabitlerle çarpma ve toplama yapabiliriz. g_n dizisi

$$(8.48) \quad g_n = n(x - a + \frac{1}{n})\chi_{[a-\frac{1}{n},a]} + n(b + \frac{1}{n} - x)\chi_{[b,a+\frac{1}{n}]}$$

olarak tanımlansın. g_n lerin sürekli açık ve bir kompakt küme dışında sıfır oldukları açıktır.

$$(8.49) \quad \int |g_n - \chi([a, b))| = \int_{a-\frac{1}{n}}^{1} g_n + \int_{b}^{b+\frac{1}{n}} g_n \leq \frac{2}{n}$$

olduğundan $L^1(\mathbb{R})$ de $[g_n] \to [\chi([a, b))]$ elde edilir. Bu kompakt dayanaklı sürekli fonksiyonların $L^1(\mathbb{R})$ da yoğun olduğunu kanıtlar.

Problem 3.6 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu sürekli, sınırlı ve $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ise $gf \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ ve

$$(8.50) \quad \int |gf| \leq \sup_{\mathbb{R}} |g| \int |f|$$

olduğunu gösteriniz.

(2) $G \in \mathcal{C}([0,1]\times[0,1])$ sürekli bir fonksiyon olsun. $C(K)$ ile bir kompakt metrik uzayı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonları gösteriyoruz.) Önceki tartışmalarda $L^1([0,1])$ i tanımladık. Birinci kısmı kullanarak $f \in L^1([0,1])$ ise her $x \in [0,1]$ için

$$(8.51) \quad F(x) = \int_{[0,1]} G(x,.)f(.) \in \mathbb{C}$$

nın iyi tanımlı olduğunu gösteriniz.Burada (.) integralin alındığı değişkeni göstermektedir.

(3) $f \in L^1([0,1])$ ise F'nın $[0,1]$ de sürekli fonksiyon olduğunu gösteriniz.

(4)

$$L^1([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1]), \quad f \to F$$

nın sürekli fonksiyonların Banach uzayına, $[0,1]$ deki supremum normuna göre, sınırlı (yani sürekli) doğrusal dönüşüm olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm.

(1) Öncelikle $[-1,1]$ dışında $f = 0$ olduğunu varsayalım. Alıştırmalardaki sonuçlardan birini uygulayarak her R için $[0,1)$ de $g_n \to g$ düzgün yakınsayacak biçimde basamak fonksiyonların bir g_n dizisi vardır. Bir altdiziye geçerek $\sup_{[-1,1]} |g_n(x) - g_{n-1}(x)| < 2^{-n}$ olcak biçimde ayarlayabiliriz. f_n, f ye h.h.y. yakınsayan basamak fonksiyonların murlak toplanabilir bir dizisi ise yukarıda tartışıldığı gibi f_n'i $f_n\chi([-1,1])$ ile değiştirebilir ve hala aynı sonucu elde ederiz. Böylece g_n lerin düzgün yakınsamasından

$$(8.53) \quad g_n(x)\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \to g(x)f(x) \quad \mathbb{R} \quad \text{de} \quad h.h$$

Dolayısıyla $h_1 = g_1 f_1$, $h_n(x) = g_n(x)\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - g_{n-1}(x)\sum_{k=1}^{n-1} f_k(x)$ olarak tanımlarız. Basamak fonksiyonlarının bu serisi $gf(x)$ e hemen heryerde yakınsar ve

(8.54)

$$|h_n| \le A\,|f_n(x)| + 2^{-n}\sum_{k<n} |f_k(x)|\,, \sum_n \int |h_n| \le A\sum_n \int |f_n| + 2\sum_n \int |f_n| < \infty$$

olduğundan, mutlak toplanabilirdir. Burada A, $|g_n|$ için bir sınırdır ve n den bağımsızdır.Bu $[0,1)$ dışında, $f = 0$ varsayımı altında, $gf \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ olduğunu gösterir ve

$$(8.55) \quad \int |gf| \le \sup|g| \int |f|$$

elde edilir. Bu tartışmayı $p \in \mathbb{Z}$ olmak üzere f'nin $[p, p+1)$ aralığına kısıtlanışı olan f_p fonksiyonuna uygulayabiliriz. gf, mutlak toplanabilir gf_p serisinin h.h.y. limitidir. Mutlak toplanabilirlik (8.55) den elde edilir.

$$(8.56) \qquad \sum_p \int |gf_p| \leq \sup |g| \sum_p \int_{[p,p+1)} |f| < \infty$$

. Böylece $gf \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ve

$$(8.57) \qquad \int |gf| \leq \sup |g| \int |f| \, .$$

elde edilir.

(2) $f \in L^1([0,1])$ ve temsili f' ise $G(x,.)f'(.) \in \mathcal{L}^1([0,1])$ dolayısıyla

$$(8.58) \quad F(x) = \int_{[0,1]} G(x,.)f(.) \in \mathbb{C}$$

iyi tanımlıdır-f' nın seçiminden bağımsız olduğundan, f' bir sıfırımsı fonksiyonuyla değiştirilebilir.

(3) $S = [0,1] \times [0,1]$ kompakt metrik uzayınında tanımlı sürekli bir fonksiyon düzgün sürekli olduğundan, verilen $\delta > 0$ için aşağıdaki özellikte bir $\epsilon > 0$ vardır:

$$(8.59) \quad |x - x'| < \epsilon \Rightarrow \sup_{y \in [0,1]} |G(x,y) - G(x',y)| < \delta.$$

Böylece $F \in \mathcal{C}([0,1])$, $[0,1]$ aralığında süreklidir. Üstelik $f \to F$ dönüşümü doğrusaldır ve

$$(8.61) \quad \sup_{[0,1]} |F| \leq \sup_S |G| \int_{[0,1]} |f| \, ,$$

bu

$$I : L^1([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1]), \quad F(f)(x) = \int G(x,.)f(.)$$

doğrusal dönüşümünün sürekli ya da sınırlı olması için yeterli ve $\|I(f)\|_{sup} \leq \sup |G| \, \|f\|_{L^1}$ dır.