18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

18.102 Fonksiyonel Analize Giriş Bahar Dönemi 2009

DERS 9. BAİRE TEOREMİ VE UYGULAMALARİ

Bu derste daha sonra kullanacağımız Baire Kategori Teoremini kanıtlayacağız. Buradaki kategori isminin modern kategori kuramı ile ilişkisi yoktur.

Bu teorem tam metrik uzaylar hakkında olup daha çok fonksiyonel analiz konusunda uygulamaya sahiptir.

Teorem 4 Baire Teoremi M, tam bir metrik uzayın boş olmayan altkümesi, $C_n \subseteq C_{n+1}, n \in \mathbb{N}$ kapalı altkümeler ve

$$M = \bigcup_n C_n \tag{9.1}$$

varsa, C_n lerden en az birinin içi boş değildir.

Kanıt. Genellikten kaybetmeden (verilen kümelerin hepsi boş olamayacağından) boş olan kimi C_n atılabilir ve boş olamayan ilk küme C_1 olarak alınabilir. İstenilenin tersine, bir çelişkiye varmak umudu ile tüm C_n kümelerinin içlerinin boş olduklarını kabul edelim. Bu M kümesinin bir p noktasındaki $B(p, \epsilon)$ açık küresinin hiçbir C_n içinde kalamayacağı anlamına gelir.

Dolayısı ile bir $p \in C_1$ vardır. Şimdi $p_1 \in B(p, 1/3)$ ancak C_1 de olmayan p_1 vardır. C_1 kapalı olduğundan $1/3$ sayısından küçük seçilebilecek bir ϵ_1 için $B(p_1, \epsilon_1) \cap C_1 = \phi$ olduğunu görelim. Bu şekilde devam ederek, C_2 de olmayan $p_2 \in B(p_1, \epsilon_1/3)$ ve $B(p_2, \epsilon_2) \cap C_2 = \phi$, $\epsilon_2 > 0$, $\epsilon_2 < \epsilon_1/3$ seçelim. Burada C_2 kümesinin içinin boş olmasının yanısıra, kapalı olduğunu da kullanıyoruz. Şimdi tümevarımla $p_i, i = 1, 2, .., k$ dizisini ve $0 < \epsilon_k < \epsilon_{k-1}/3 < \epsilon_{k-2}/3^2 < ... < \epsilon_1/3^{k-1} < 3^{-k}$ dizileri

$$B(p_j, \epsilon_j) \cap C_j = \phi, \ \mathrm{p}_j \in B(p_{j-1}, \epsilon_{j-1}/3)$$

sağlayacak biçimde seçilir. C_k kümesinin özelliği kullanılarak bir p_{k+1} daha ekliyebiliriz- C_k kümesinin içi boş olmadığından $B(p_k, \epsilon_k/3)$ kümesinde olup, C_{k+1} olmayan p_{k+1} vardır. Şimdi $\epsilon_{k+1} > 0$ fakat $\epsilon_{k+1} < \epsilon_k/3$ olmak üzere $B(p_{k+1}, \epsilon_{k+1}) \cap C_{k+1} = \phi$ sağlanmaktadır. Dolayısı ile M kümesinde olan p_k dizisi bulduk. $d(p_{k+1}, p_k) < \epsilon/3$ den ötürü, bu bir Cauchy dizisidir. Gerçekten

$$d(p_k, p_{k+l}) < \epsilon/3 + ... + \epsilon_{k+l-1/3} < 3^{-k} \tag{9.2}$$

M tam bir küme olduğundan dizi bir $q \in M$ noktasına yakınsar. Dikkat ederseniz her $k > l$ için $p_l \in B(p_k, 2\epsilon_k/3)$ olduğundan $d(p_k, q) \leq 2\epsilon_k/3$ ve bu da her k için $q \notin C_k$ verirki bu (9.1) deki aranılan çelişkidir. Dolayısıyle C_n lerden en az birinin içi boş değildir. $\square$

Bu teoremin bir uygulaması daha sonra ele alacağımiz düzgün sınırlılık ilkesidir.

Teorem 5. *B bir Banach uzayı, V normlu uzay olmak üzere $T_n : B \to V$ sınırlı(sürekli) dönüşümler olsun. Her $b \in B$ için $(T_n(b))$ dizisi V'nin normunda sınırlı ise, $sup_n||T_n|| < \infty$ vardır.*

Kanıt. Başka kaynaklara da bakabilirsiniz ama kanıt Baire teoreminin

$$(9.3) \quad S_p = \{b \in B : ||b|| < 1, ||T_n b||_V \leq p, \forall n\}, \; p \in \mathbb{N}.$$

kümelerine uygulanması ile yapılır. Bu kümeler kapalı ve bileşimleri B uzayının kapalı birim yuvarıdır(bu noktasal sınırlılığın bir sonucudur). Şimdi Baire teoremince bu kümelerden birinin içi boş değildir. Bu bir p, $v \in S_p$ ve $\delta > 0$ için

$$(9.4) \quad w \in B, ||w||_B \leq \delta \Rightarrow ||T_n(v + w)||_V \leq p, \forall n$$

Şimdi üçgen eşitsizliği ve $||T_n|| \leq p$ ve dönüşüm normunun birim yuvar üzerinde alınan değerlerin supu olduğunu kullanarak

$$(9.5) \quad w \in B, ||w||_B \leq \delta \Rightarrow ||T_n(w)||_V \leq 2p \Rightarrow ||T_n|| \leq 2p/\delta$$

bulunur.$\square$

Bunun neden yararlı olduğunu ileride göreceğiz.