18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

PROBLEMLER 1

Problem 1.1 Her $p, 1 \leq p < \infty$ veya sadece $p = 2$ için;

$$l^p = \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty, a_j = a(j)\}$$

dizilerinin aşağıdaki normla,

$$||a||_p = (\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p)^{1/p}$$

normlu bir uzay olduğunu gösteriniz. Bu tanımlanan dizilerin bir vektör uzayı olduklarını ve tanımlanan normun norm olmak için sağlaması gereken üç koşulu sağladığının gösterilmesi demektir.

Problem 1.2 Problem 1.1 deki zor kısım üçgen eşitsizliği idi. Eğer size her$N$ için

$$(\sum_{j}^{N} |a_j|^p)^{1/p}$$

ifadesinin $\mathbb{C}^N$ de norm olduğu verilseydi, bunu kullanabilir miydiniz?

Problem 1.3 Problem 1.1 de tanımlanan l^p nin ya da l^2 nin tam olduğunu kanıtlayınız. Yani Banach uzayı olduğunu gösteriniz. Yani her Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu kanıtlayınız. Burada problem verilen Cauchy dizisinin limitini bulmaktır. Her N için N. noktasında budanmayla elde edilen dizi $\mathbb{C}^N$ deki her dizinin $\mathbb{C}^N$ de bir Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.

Problem 1.4 İsterseniz $n = 2$ alabilirsiniz, l^p uzayının birim yuvarı S kümesini düşünelim. Bu küme uzunlukları 1 olan vektörlerin kümesidir.

$$S = \{a \in l^p : ||a||_p = 1\}$$

kümesidir.
(1) S kümesinin kapalı olduğunu gösteriniz.

(2) Dilerseniz Rudin'nin kıtabına da bakarak, metrik uzaylarda kompakt kümelerin dizisel betimlenişini anımsayınız.

(3) Dilerseniz n-inci yerde 1, kalan koordinatlarda 0 olan diziyi düşünerek S kümesinin kompakt olmadığını kanıtlayınız.

Problem 1.5 Normlu her uzayda, norm süreklidir.