PROBLEMLER 10

Problem 10.1 H sonsuz boyutlu ayrılabilir Hilbert uzayı olsun. H'nın iki kopyasının direk toplamının

$$(P10.1) \quad (u_1, u_2) \in H \oplus H \quad (\|(u_1, u_2)\| = (\|u_1\|_H^2 + \|u_2\|_H^2)^{\frac{1}{2}}$$

bir Hilbert uzayı olduğunu gösteriniz. Bir isometrik inşası nedeni ile

$$(P10.2) \quad T : H \to H \oplus H, \quad \text{örten, 1-1} \quad (\|u\|_H = (\|u\|_{H \oplus H}$$

ya da değildir. Her iki durumda da (23.19) daki gibi fonksiyon iną ediniz.

Problem 10.2 Önceki inşa sonlu sayıda tekrar edilebilir. H sonsuz boyutlu ayrılabilir Hilbert uzayı ise

$$(P10.3) \quad l_2(H) = \{u : \mathbb{N} \to H, \|u\|_{l_2(H)}^2 = \sum_i \|u_i)\|_H^2 < \infty$$

nin Hilbert uzayı yapısı vardır ve $l_2(H)$'dan H'ye açık bir isometrik eşyapı tanımlayınız.

Problem 10.3 Bir şekilde $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ de kapalı eğrinin sarma sayısını hatırlayınız. $Q = [0,1]^{\mathbb{N}}$ ve $f : Q \to \mathbb{C}^*$ sürekli ve $exp(2\pi ib) = f(0)$ eşitliğini sağlayan her $b \in \mathbb{C}$ için

$$(P10.4) \quad exp(2\pi iF(q)) = f(q), \quad \forall q \in Q \quad \text{ve} \quad F(0) = b$$

ifadesini sağlayan tekbir tane $F : Q \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonu vardır.
Elbette b'yi $n \in \mathbb{Z}$ için $b + n$ ile değiştirmekte serbestsiniz, fakat bu durumda F'i $F + n$ ile değiştirilmelidir.

(1) $c : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ kapalı bir eğridir-yani sürekli ve $c(0) = c(1)$. $N = 1$ için $C : [0,1] \to \mathbb{C}$, F'nin bir seçimi olsun. Kapalı eğrinin sarma sayısının

$$(P10.5) \quad sarma(c) = C(1) - C(0) \in \mathbb{Z}$$

biçiminde tanımlanabileceğini gösteriniz.

(2) $sarma(c)$'nin homotopi altında sabit olduğunu gösteriniz. Yani, $i = 1, 2$ olmak üzere $c_i : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ $c_i(1) = c_i(0)$ olmak üzere iki kapalı eğri ve her $x \in$

$[0,1]$ için $f(0,x) = c_1(x)$, $f(1,x) = c_2(x)$, her $y \in [0,1]$ için $f(y,0) = f(y,1)$ olacak biçimde sürekli bir fonksiyon var ise, $sarma(c_1) = sarma(c_2)$ dir.

(3) $n \times n$ matrisin kapalı eğrisi $L_n : x \in [0,1] \to e^{(2\pi i x)} Id_{n\times n}$ ele alalım. Bu eğrinin aşağıdaki anlamda birimsel kapalı eğriye homotopik olmadığını gösteriniz: her $x \in [0,1]$ için $G(0,x) = L_n(x)$, $G(1,x) = Id_{n\times n}$ ve her $y \in [0,1]$ için $G(y,0) = G(y,1)$ olacak biçimde $G : [0,1] \to L_n(x)$ sürekli fonksiyonun olmadığını gösteriniz.

Problem 10.4 Ayrılabilir ve sonsuz boyutlu Hilbert uzayında L_n'ye karşılık gelen, H'da tersinir dönüşümlerde değer alan kapalı eğriyi ele alalım.

$$(P10.6) \quad L : [0,1] \to GL(H), \quad L(x) = e^{2\pi i x} Id_H \in GL(H) \subset \mathcal{B}(H).$$

Yukarıda olduğu gibi, H'ı, $H \oplus H$ ile eşleyerek değeri tersinir dönüşümler olan

$$(P10.7) \quad M : [0,1]^2 \to GL(H \oplus H)$$

olan sürekli fonksiyonun varlığını ve
(P10.8)

$$M(0,x) = L(x), \quad M(1,x)(u_1,u_2) = (e^{4\pi i x} u_1, u_2), \quad M(y,0) = M(y,1), \quad \forall x,y \in [0,1]$$

olduğunu gösteriniz.
Ipuçu Girdileri H'da olmak üzere $H \oplus H$'ı 2-vektör (u_1,u_2) gibi düşünebiliriz. Bu iki faktör arasında *dönme*yi düşünmemizi sağlar. Gerçekten

$$(P10.9) \quad U(y)(u_1,u_2) = (cos(\frac{\pi y}{2})u_1 + sin(\frac{\pi y}{2})u_2, -sin(\frac{\pi y}{2})u_1 + cos(\frac{\pi y}{2})u_2)$$

ifadesi $U(0) = Id$, $U(1)(u_1,u_2) = (u_2, -u_1)$ olacak biçimde $[0,1] \to GL(H \oplus H)$, $y \to U(y)$ sürekli bir fonksiyon tanımlar. Şimdi $V_1(x)$ ve $V_2(x)$ fonksiyonları, sırasıyla birinci ve ikinci bileşenleri sabit bırakarak $exp(2\pi i x)$ çarpımıyla elde edilen $H \oplus H$ üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere 2-parametreli

$$(P10.10) \quad U^{-1}(y) V_2(x) U(y) V_1(x)$$

dönüşümler ailesini ele alalım.

Problem 5. Bir önceki problemde benzer döndürme kullanarak sürekli

$$(P10.11) \quad G : [0,1]^2 \to GL(H \oplus H)$$

ve aağıdaki özelliği

$$(P10.12) \quad G(0,x)(u_1,u_2) = (e^{2\pi ix)}u_1, e^{-2\pi ix}u_2),$$

$$G(1,x)(u_1,u_2) = (u_1,u_2), \quad G(y,0) = G(y,1) \forall x,y \in [0,1]$$

sağlayan fonksiyonun varlığını gösteriniz.

Problem 10.6 Yukarıda oluşturulan çeşitli inşaları aşağıdaki gibi düşünelim: $l_2(H)$ da tanımlı (23.34) deki gibi bir $\overline{G} : [0,1]^2 \to GL(l_2(H)$ ve

$$(P10.13) \quad \overline{G}(0,x)(u_k)_{k=1}^{\infty} = (exp((-1)^k 2\pi ix)u_k)_{k=1}^{\infty},$$

$$\overline{G}(1,x) = Id, \quad \overline{G}(y,0) = \overline{G}(y,1) \forall x,y \in [0,1]$$

özelliğinde bir homotopinin olduğunu gösteriniz.

Problem 10.7: Eilenberg's Swindle. Ayrılabilir sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayı için bir homotopi oluşturunuz-yani $G : [0,1]^2 \to GL(H)$, (23.28) deki gibi $G(0,x) = L(x)$ ve $G(1,x) = Id$ ve elbette her $x,y \in [0,1]$ için $G(y,0) = G(y,1)$.