Çözümler 10

Alıştırma P10.1 H sonsuz boyutlu ayrılabilir Hilbert uzayı olsun. H'nın iki kopyasının direk toplamının

$$(23.18) \quad (u_1, u_2) \in H \oplus H \quad (\|(u_1, u_2)\| = (\|u_1\|_H^2 + \|u_2\|_H^2)^{\frac{1}{2}}$$

bir Hilbert uzayı olduğunu gösteriniz. Bir isometrik inşsı nedeni ile

$$(23.19) \quad T : H \to H \oplus H, \quad \text{örten, 1-1} \quad (\|u\|_H = (\|u\|_{H\oplus H})$$

. Her iki durumda da (23.19) daki gibi fonksiyon iną ediniz.

Çözüm: (e_i), H'nın bir ortonormal tabanı olsun.Böyle bir taban H'nın sonsuz boyutlu ayrılabilir olduğundan vardır. Aşağıdaki ifadeyi tanımlayalım.

$$(23.20) \quad T : H \to H \oplus H, \quad T(u) = (\sum_{i=1}^{\infty}(u, e_{2i-1})e_i, \sum_{i=1}^{\infty}(u, e_{2i})e_i).$$

Fourier-Bessel serisinin yakınsamasından bu iyi tanımlı ve doğrusaldır. $Tu = 0$ olması durumunda her i için $(u, e_i) = 0$ ve buradan da $u = 0$ olacağından T, birebirdir. Örten olması ise,

$$(23.21) \quad S : H \oplus H \to H, \quad S(u_1, u_2) = \sum_{i=1}^{\infty}((u_1, e_i)e_{2i-1} + (u_2, e_i))$$

dönüşümünün 2-yönlü olduğundan hemen elde edilir ve Bessel eşitliğinden isometri, yani, $\|S(u_1, u_2)\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$ elde edilir.

Problem P10.2 Önceki inşa sonlu sayıda tekrar edilebilir. H sonsuz boyutlu ayrılabilir Hilbert uzayı ise

$$(23.22) \quad l_2(H) = \{u : \mathbb{N} \to H, \|u\|_{l_2(H)}^2 = \sum_i \|u_i)\|_H^2 < \infty$$

nin Hilbert uzayı yapısı vardır ve $l_2(H)$'dan H'ye açık bir isometrik eşyapı tanımlayınız.

Çözüm: Önceki problemdeki benzer münakaşalar bunun içinde çalışır. H için bir (e_i) ortonormal taban alalım. $E_{i,j} \in l_2(H)$'nın elemanları, her i için i ler j'ninci terimleriu dışında sıfır, yani e_i, lerden oluşan, $l_2(H)$ için bir ortonormal tabandır. Ortonormal olduğu, iççarpım

$$(23.23) \quad (u, v)_{l_2(H)} = \sum_j (u_j, v_j)_H$$

olduğundan açıktır. Bu aynı zamanda, her j için $v = (v_j)(v, E_{j,i}) = 0$ olması H da $v_j = 0$ olmasını gerektirdiğinden ayrıca bir tabandır. $m : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ bir izomorfizma olmak üzere

$$(23.24) \quad Tu = v, \quad v_j = \sum_i (u, e_{m(i,j)}) e_i \in H$$

isometriği tanımlansın. Bunun birebir, örten ve isometrik olduğu gösterilebilir.

Alıştırma P10.3 Bir şekilde $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ de kapalı eğrinin sarma sayısını hatırlayınız. $Q = [0,1]^{\mathbb{N}}$ ve $f : Q \to \mathbb{C}^*$ sürekli ve $exp(2\pi i b) = f(0)$ eşitliğini sağlayan her $b \in \mathbb{C}$ için

$$(23.25) \quad exp(2\pi i F(q)) = f(q), \quad \forall q \in Q \quad \text{ve} \quad F(0) = b$$

ifadesini sağlayan tekbir tane $F : Q \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonu vardır.
Elbetde b'yi $n \in \mathbb{Z}$ için $b + n$ ile değiştirmekde serbetsiniz, fakat bu durumda F'i $F + n$ ile değiştirilmelidir.
(1) $c : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ kapalı bir eğridir-yani sürekli ve $c(0) = c(1)$. $N = 1$ için $C : [0,1] \to \mathbb{C}$, F'nin bir seçimi olsun. Kapalı eğrinin windin sayısının

$$(23.26) \quad sarma(c) = C(1) - C(0) \in \mathbb{Z}$$

biçiminde tanımlanabileceğini gösteriniz.

Çözüm. Bu durumda C', F'nin bir başka seçimi olsun. $g(t) = C'(t) - C(t)$ sürekli ve her $t \in [0,1]$ için $exp(2\pi g(t)) = 1$ olsun. Dolayısıyla , $C'(1) - C'(0) = C(1) - C(0)$ ve sarma sayısı iyi tanımlıdır.
(2) $wn(c)$'nin homotopi altında sabit olduğunu gösteriniz. Yani, $i = 1, 2$ olmak üzere $c_i : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ $c_i(1) = c_i(0)$ olmak üzere iki kapalı eğri ve her $x \in [0,1]$ için $f(0,x) = c_1(x)$, $f(1,x) = c_2(x)$, her $y \in [0,1]$ için $f(y,0) = f(y,1)$ olacak biçimde sürekli bir fonksiyon var ise, $wn(c_1) = wn(c_2)$ dir.
Bu f homotopi bağlantısını kullanarak F'yi seçelim. f fonksiyonu ikince değişkene göre periodik olduğundan ve $f(y,0)$, $f(y,1)$ aynı olduğundan $F(y,0) - F(y,1)$ sabit olmalı ve böylece $sarma(c_2) = F(1,1) - F(1,0) = F(0,1) - F(0,0) = sarma(c_1)$ elde edilir.
(3) $n \times n$ matrisin kapalı eğrisi $L_n : x \in [0,1] \to e^{2\pi i x} Id_{n\times n}$ ele alalım. Bu eğrinin aşağıdaki anlamda birimsel kapalı eğriye homotopik olmadığını gösteriniz: her $x \in [0,1]$ için $G(0,x) = L_n(x)$, $G(1,x) = Id_{n\times n}$ ve her

$y \in [0,1]$ için $G(y,0) = G(y,1)$ olacak biçimde $G : [0,1] \to L_n(x)$ sürekli fonksiyonunUN olmadığını gösteriniz.

Çözüm. Determinant tersi olmayan matrislerde sıfır olan sürekli bir fonksiyondur. Üstelik özdeğerlerin çarpımı ile

$$(23.27) \quad det(L_n) = exp(2\pi ixn)$$

olacak biçimde verilir. xn 'kaldırması' olduğundan bu sarma sayısı n olan periodik eğridir. Eğer bu biçimde matrislerin periodik eğrilerinin homotopisi olsa idi, herzan terslenebilir olurdu. Bu durumda önceki sonuç nedeniyle determinantın sarma sayısının geri kalanı sabit olmak zorunda olurdu. Değeri birim olan sabit eğri için sarma sayısı 0 olacağından böyle bir homotopi olamaz.

Problem P10.4 Ayrılabilir ve sonsuz boyutlu Hilbert uzayında L_n'ye karşılık gelen, H'da tersinir dönüşümlerde değer alan kapalı eğriyi ele alalım.

$$(23.28) \quad L : [0,1] \to GL(H), \quad L(x) = e^{2\pi ix} Id_H \in GL(H) \subset \mathcal{B}(H).$$

Yukarıda olduğu gibi, H'ı, $H \oplus H$ ile eşleyerek, değri tersinir dönüşümler olan

$$(23.29) \quad M : [0,1]^2 \to GL(H \oplus H)$$

olan sürekli fonksiyonun varlığını ve
(23.30)

$$M(0,x) = L(x), \quad M(1,x)(u_1,u_2) = (e^{4\pi ix}u_1, u_2), \quad M(y,0) = M(y,1), \quad \forall x,y \in [0,1]$$

olduğunu gösteriniz.
Ipuçu Girdileri H'da olmak üzere $H \oplus H$'ı 2-vektör (u_1, u_2) gibi düşünebiliriz. Bu iki faktör arasında *dönme*yi düşünmemizi sağlar. Gerçekten

$$(23.31) \quad U(y)(u_1,u_2) = (cos(\frac{\pi y}{2})u_1 + sin(\frac{\pi y}{2})u_2, -sin(\frac{\pi y}{2})u_1 + cos(\frac{\pi y}{2})u_2)$$

ifadesi $U(0) = Id$, $U(1)(u_1,u_2) = (u_2, -u_1)$ olacak biçimde $[0,1] \to GL(H \oplus H)$, $y \to U(y)$ sürekli bir fonksiyon tanımlar. Şimdi $v_1(x)$ ve $V_2(x)$ fonksiyonları, sırasıyla birinci ve ikinci bileşenleri sabit bırakarak $exp(2\pi ix)$ çarpımıyla elde edilen $H \oplus H$ üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere 2-parametreli

$$(23.32) \quad U^{-1}(y)V_2(x)U(y)V_1(x)$$

dönüşümler ailesini ele alalım.

Çözüm. Iki boyutlu uzayda olduğu gibi $U(y)$, tersi $U(-y)$ olan terslenebilir bir dönüşümdür. Bu (23.22) de tanımlanan $[0,1]^2$ de tanımlı $W(x,y)$ fonksiyonunun $H \oplus H$ da tanımlı sınırlı ve terslenebilir dönüşümlerden oluştuğunu gösterir, yani $W : [0,1]^2 \to GL(H \oplus H)$ dır. $x = 0$ ya da $x = 1$ olma durumunda birim olur ve böylece her y için $W(0,y) = W(1,y)$ ve dolayısıyla W, x de periodiktir. Üstelik $y = 0$ için $W(x,0) = V_2(x)V_1(x)$, $L(x)$ dir, birimin bir çarpımıdır. Dğer taraftan

$$(u_1,u_2) \to (e^{2\pi ix}u_1,u_2) \to (u_2,e^{2\pi ix}u_1) \to (u_2,-e^{4\pi ix}u_1) \to (e^{4\pi ix}u_1,u_2) \tag{23.33}$$

Bu (23.30) da aranan M dir.

Problem P.10 Bir önceki problemde benzer rotasyonu kullanarak sürekli

$$G : [0,1]^2 \to GL(H \oplus H) \tag{23.34}$$

ve aşağıdaki özelliği

$$G(0,x)(u_1,u_2) = (e^{2\pi ix)}u_1, e^{-2\pi ix}u_2), \tag{23.35}$$

$$G(1,x)(u_1,u_2) = (u_1,u_2), \quad G(y,0) = G(y,1)\forall x,y \in [0,1]$$

sağlayan fonksiyonun varlığını gösteriniz.

Çözüm. S ve T 2x2 matrisleri

$$T_{11} = S_{22} = Id, \quad T_{22} = e^{-2\pi ix}, \quad S_{11} = e^{2\pi ix} \quad \text{ve} \quad S_{12} = S_{12} = T_{12} = T_{21} = 0$$

olmak üzere

$$G(y,x) = U(-y)TU(y)S \tag{23.36}$$

ifadesini ele alalım. Yukarıdaki gibi aynı neden ile, bu, (23.35)'i sağlayan $H \oplus H$ da tanımlı terslenebilir dönüşümlerin kapalı bir eğrisidirler.

Problem P10.6 Yukarıda oluşturulan çeşitli inşaları aşağıdaki gibi düşünelim: $l_2(H)$ da tanımlı (23.34) deki gibi bir $\overline{G} : [0,1]^2 \to GL(l_2(H))$ ve

$$\overline{G}(0,x)(u_k)_{k=1}^{\infty} = (exp((-1)^k 2\pi ix)u_k)_{k=1}^{\infty}, \tag{23.37}$$

$$\overline{G}(1,x) = Id, \quad \overline{G}(y,0) = \overline{G}(y,1)\forall x,y \in [0,1]$$

özelliğinde bir homotopinin olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $l_2(H)$'ı çift ve tek parçalar olmak üzere

$$D : v \in l_2(H) \to ((v_{2i-1},(v_{2i})) \in l_2(H) \oplus l_2(H) \longleftrightarrow H \oplus H \tag{23.38}$$

parçalara ayırabiliriz ve bu durumda $l_2(H)$'nın kopyası sağdaki H dır. Bu durumda önceki problemdeki homotopi

$$\overline{G}(x, y) = D^{-1}G(y, x)D$$

biçimindedir ve bu istediğimizdir.

Problem P10.7: Eilenberg's . Ayrılabilir sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayı için bir homotopi oluşturunuz-yani $G : [0, 1]^2 \to GL(H)$, $G(0, x) = L(x)$ ve $G(1, x) = Id$ ve elbette her $x, y \in [0, 1]$ için $G(y, 0) = G(y, 1)$.